Симетрійні властивості нелінійного еволюційного рівняння 4-го порядку

Лариса О. ТУЛУПОВА

Полтава, Україна
E-mail: *Lar2dar@gmail.com*

Розглянемо нелінійне еволюційне рівняння 4-го порядку такого вигляду

$$\Delta\big(f_1(u)\,\Delta u + f_2(u)\big) = f_3(u)\,u_t, \tag{1}$$

де $u = u(x) \in \mathbb{R}$, $x = (x_0, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{1+n}$, Δ – оператор Лапласа; $f_i(u)(i = \overline{1,3})$ – довільні диференційовні функції, причому $f_3(u) \not\equiv 0$.

Проведемо класифікацію симетрійних властивостей рівняння (1) в залежності від вигляду функцій $f_i(u)$.

Треба відзначити, що ліївська симетрія рівняння (1) у випадку, коли $f_1(u) \equiv 0$ досліджена у [1], [2], [3]. Умовна симетрія одновимірного рівняння (1), коли $f_1(u) \equiv 0$, досліджена у [4], а двовимірного – у [5].

Якщо $f_1(u) \not\equiv 0$, то за класичним алгоритмом Лі знаходимо, що функції $f_i(u)(i = \overline{1,3})$ і координати інфінітезимального оператора (див. [6]) визначаються такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\xi^1_1 = \xi^2_2 = \cdots = \xi^n_n, \qquad \xi^a_b = -\xi^b_a, \qquad \xi^0_a = \xi^\alpha_u = 0,\\
&\eta_{uu} = 0, \qquad \eta_{abu} = 0 \quad (a \neq b), \qquad 2\eta_{au} = \Delta\xi^a,\\
&\dot f_1\,\eta_a = 2 f_1\,\xi^a_{11}, \qquad f_3\eta_0 + \dot f_2\,\Delta\eta + f_1\,\Delta^2\eta = 0,\\
&\left(\frac{\dot f_1}{f_1} - \frac{\dot f_3}{f_3}\right)\eta = 4\xi^1_1 - \xi^0_0, \qquad \left(\frac{\dot f_1}{f_1}\eta\right)_u = 0,\\
&\ddot f_2\,\eta + 2\dot f_1\,\Delta\eta + 2 f_1\,\Delta\eta_u + 4 f_1\,\eta_{11u} + \dot f_2\left(2\xi^1_1 - \frac{\dot f_1}{f_1}\eta\right) = 0,\\
&\left(\frac{\dddot f_1}{\ddot f_1} - \frac{\dot f_1}{f_1}\right)\eta + 2\eta_u = 0,\\
&-\frac{1}{2} f_3\xi^a_0 + \Big(\dot f_2\eta_a + f_1\Delta\eta_a\Big)_u + f_1\Delta\eta_{au} = 0,\\
&\Big(\ddot f_2\eta + \dot f_1\Delta\eta\Big)_u + \dot f_1\left(\Delta\eta_u + 4\eta_{11u} - 2\Delta\xi^1_1\right) + \ddot f_2\left(2\xi^1_1 - \frac{\dot f_1}{f_1}\eta\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

З системи (2) випливає, що існує чотири можливі випадки вигляду функції $f_1(u)$ і функції η:

1.
$$f_1(u) = \lambda_1, \qquad \eta = \alpha(x)u + \beta(x);$$

2.
$$f_1(u) = \lambda_1 u^k, \qquad \eta = \alpha(x)u;$$

3.
$$f_1(u) = \lambda_1 e^{ku}, \qquad \eta = \beta(x);$$

4.
$$f_1(u) = \varphi(u), \qquad \eta = 0,$$

де λ_1 – довільна стала ($\lambda_1 \neq 0$); $\varphi(u)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – довільні диференційовні функції.

Крім того, з рівнянь системи (2) випливає, що алгебри інваріантності рівняння (1) для деяких функцій $f_1(u)$ будуть розрізнятися в залежності від розмірності n простору, в якому це рівняння розглядається.

Після розв'язання системи (2) були визначені функції $f_i(u)$ і алгебри інваріантності відповідних рівнянь. Усі неекквівалентні випадки зведені до таблиць 1–3. В цих таблицях через AE позначена алгебра Евкліда $\langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \rangle$.

Табл. 1. Випадок $f_1(u) = \lambda_1$, n – довільне

N	$f_2(u)$	$f_3(u)$	Алгебра інваріантності
1	0	λ_3	$AE,\ \partial_u,\ I = u\partial_u,\ D_1 = 4x_0\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a}$
2	$\lambda_2 u$	λ_3	$AE,\ \partial_u,\ I$
3	$\lambda_2 e^u$	λ_3	$AE,\ D_2 = 4x_0\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a} - 2\partial_u$
4	$\lambda_2 u^m$	$\lambda_3 u^s$	$AE,\ D_3 = (2m - s - 2)x_0\partial_{x_0} + \frac{m-1}{2}x_a\partial_{x_a} - u\partial_u$
5	$\lambda_2 \ln u$	$\lambda_3 u^s$	$AE,\ D_4 = (s+2)x_0\partial_{x_0} + \frac{1}{2}x_a\partial_{x_a} + u\partial_u$
6	0	$\lambda_3 e^{su}$	$AE,\ D_1,\ D_5 = sx_0\partial_{x_0} + \partial_u$
7	$\lambda_2 u$	$\lambda_3 e^{su}$	$AE,\ D_5$
8	$\lambda_2 e^u$	$\lambda_3 e^{su}$	$AE,\ D_6 = 2(2 - s)x_0\partial_{x_0} + \frac{1}{2}x_a\partial_{x_a} - \partial_u$

Табл. 2. Випадок $f_1(u) = \lambda_1 e^{ku}$

N	$f_2(u)$	$f_3(u)$	Умови	Алгебра інваріантності
1	0	$\lambda_3 e^{su}$	–	$AE,\ D_1,\ D_{10} = (s-k)x_0\partial_{x_0} + \partial_u$
2	0	$\lambda_3 e^{-ku}$	$n = 2$	$AE,\ D_1,\ D_{10},$ $K_a = \mathbf{x}^2\partial_{x_a} - 2x_a x_b\partial_{x_b} - \frac{4}{k}x_a\partial_u$
3	$\lambda_2 u$	$\lambda_3 e^{su}$	–	$AE,\ D_{11} = 2(s+k)x_0\partial_{x_0} + kx_a\partial_{x_a} + \partial_u$
4	$\lambda_2 e^{mu}$	$\lambda_3 e^{su}$	–	$AE,\ D_{12} = 2(k+s-2m)x_0\partial_{x_0} +$ $+(k-m)x_a\partial_{x_a} + 2\partial_u$

Табл. 3. Загальний випадок $f_1(u)$

N	$f_2(u)$	$f_3(u)$	Алгебра інваріантності
1	0	довільна	$AE,\ D_1$
2	довільна	довільна	AE

Таким чином, рівняння (1) має найбільш широку симетрію, коли воно набуває вигляду

$$u^{\frac{4}{2-n}}\,\Delta\left(u^{\frac{4}{2-n}}\,\Delta u\right) = u_t, \qquad n \neq 2, \tag{3}$$

та вигляду

$$e^{ku}\,\Delta\left(e^{ku}\,\Delta u\right) = u_t, \qquad n = 2. \tag{4}$$

Алгебра інваріантності $AC(n)$ рівняння (3) породжується операторами

$$\partial_{x_0}, \quad \partial_{x_a}, \quad J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}, \quad D_1 = 4x_0\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a},$$

$$D_2 = 2x_a\partial_{x_a} + (2-n)u\partial_u, \quad K_a = \mathbf{x}^2\partial_{x_a} - 2x_ax_b\partial_{x_b} + (n-2)x_au\partial_u;$$

а алгебра інваріантності $AC(n)$ рівняння (4) – операторами

$$\partial_{x_0}, \quad \partial_{x_a}, \quad J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}, \quad D_1 = 4x_0\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a},$$

$$D_2 = 2kx_0\partial_{x_0} - n\partial_u, \quad K_a = \mathbf{x}^2\partial_{x_a} - 2x_ax_b\partial_{x_b} - \frac{4}{k}x_a\partial_u.$$

Подяки

Подяка професору, доктору фіз.-мат. наук Сєрову Миколі Івановичу за наукове керівництво, корисні вчені та життєві поради, а також підтримку протягом багатьох років.

Література

[1] Дородницын В.А., Князева И.В., Свищевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплоплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения – 1983.– **19**, N 7.– С. 1215–1224.

[2] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П. и Самаркин А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: проявления максимума, локализация, симметрия, точные решения, асимптоты, структуры // Журн. советск. математики – 1988.– **41**, С. 1222–1292.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики– Киев, Наукова думка, 1989. – 339 с.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений– М.: Наука, 1978.

[5] Fushchich W.I., Serov N.I., Tulupova L.A. The Conditional Invariance and Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation // Dopovidi Ukr. Academii Nauk– 1993.– No. 4.– P. 37–40.

[6] Сєров М.І., Тулупова Л.О., Андреєва Н.В. Q-умовна симетрія нелінійного двовимірного рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн.– 2000.– № 6.– С. 846–849.