X - топ. простір. $n \geq 1$

$$C_n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \ i \neq j\} \subset X^n$$

n-й конфігураційний простір X.

Σ_n - група перестановок n-символів

Σ_n діє на $C_n(X)$, $C_n(X)/\Sigma_n = \hat{C}_n(X)$

$\uparrow$ впорядковані n-ки попарно різних точок X

$\uparrow$ n-ки попарно різних точок

$X = \mathbb{R}$

$(1\,2\,3\,4 \ldots n)$ } різні елем $C_n(\mathbb{R})$ — однакові в $\hat{C}_n(\mathbb{R})$

$(3\,2\,1\,4 \ldots n)$

$$p : C_n(X) \longrightarrow C_n(X)/\Sigma_n = \hat{C}_n(X)$$ — накривальне відображення

Σ_n діє без нерухомих точок іншими словами, дія Σ_n на $C_n(X)$ - вільна

Озн Дія групи G на множині Y назив. вільною, якщо виконана одна з еквівал. умов

① Нехай $g \in G$ такий, що $g(y) = y$ для деякої т. $y \in Y$ тоді $g = id_Y$

② $\forall y \in Y$ $Stab_G(y) = \{id_Y\} = \{g \in G \mid g(y) = y\}$

③ відобр. в орбіту $G \longrightarrow Orb(y)$ - бієкція.
$g \longrightarrow g(y)$

$$Orb(y) = \{g(y) \mid g \in G\}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "g \to g(y)"] \arrow[dr] & & Orb(y) \\
& G/Stab(y) \arrow[ur, "\leftarrow \text{бієкція}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$g(y) = y = h(y)$$

$$h^{-1}g(y) = y \Leftrightarrow h^{-1}g \in Stab(y) \Leftrightarrow g \in h\,Stab(y)$$

① Припустимо, що M — $\overset{\text{гаусд.}}{}$ многовид без межі (напр $\mathbb{R}$, поверхні)

$$C_n(M) = \underbrace{M\times\dots\times M}_{\text{многовид}} \setminus \underbrace{\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i = x_j \text{ для деяк } i\neq j\}}_{\text{замкнена}}$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^k\times\dots\times\mathbb{R}^k}_{n} = \mathbb{R}^{kn}$$

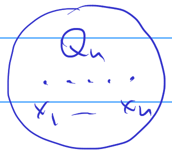
$$M^n \xrightarrow{p_i,\, p_j} M$$

Відкрита підмн. многовида M^n тому воно теж є многовидом.

$p_i(x_1\dots x_n) = x_i$ $\quad p_j(x_1\dots x_n) = x_j$

② $Q_n = \{x_1\dots x_n\} \subset M$ $\quad x_i \neq x_j \ \forall\, i\neq j$

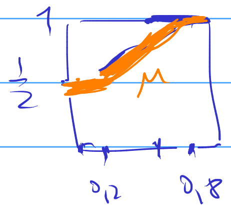
$M = D^2$



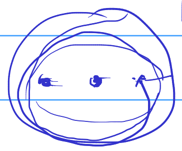
$H(M, Q_n) = \{h\in H(M) \mid h(x_i) = x_i \ \forall i\}$

$H_{inv}(M, Q_n) = \{h\in H(M) \mid h(Q_n) = Q_n\}$

$\mu: [0,1] \longrightarrow [0,1]$



поворот на $180^\circ \in H_{inv}(M, Q_3)$

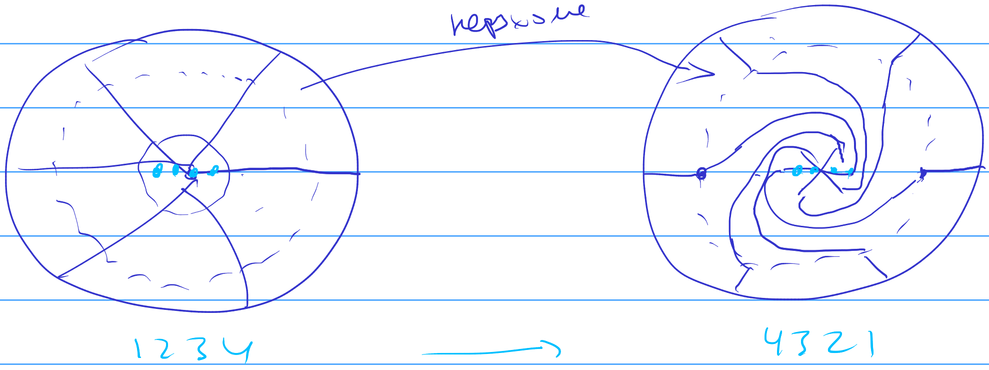


$h: D^2 \to D^2 = \{|z|<1\}$

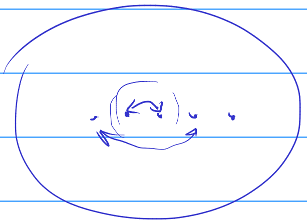
$h(z) = z\cdot e^{2\pi i\,\mu(z)}$

поворот на 360

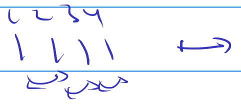
$0{,}8 \le |z| \le 1$



$1<2<3<4$

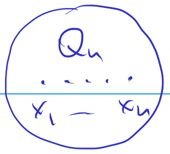


$(14) = (12)\,(23)\,(34)$



$Q_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ $x_i \neq x_j$ $\forall i \neq j$

$M = \overset{\circ}{D}{}^2$



$H(M, Q_n) = \{h \in H(M) \mid h(x_i) = x_i \ \forall i\}$

$H_{inv}(M, Q_n) = \{h \in H(M) \mid h(Q_n) = Q_n\}$

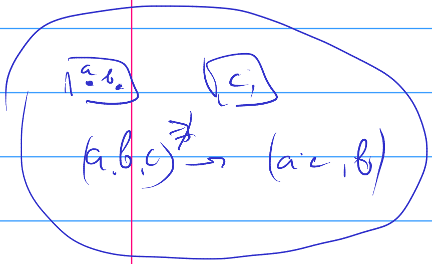
$H(M)$ – всі гомеоморфізми

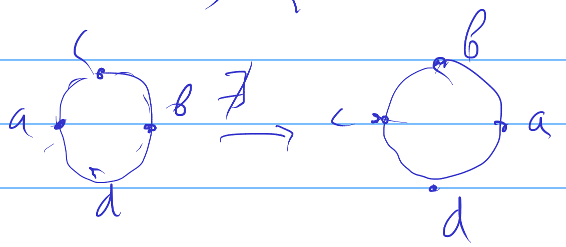
$$p : H(M) \longrightarrow C_n(M)$$

$$h \qquad (h(x_1), \dots, h(x_n))$$ – попарно різні зв h-бітні

$$\hat{p} : H(M) \longrightarrow \hat{C}_n(M) = C_n(M)/\Sigma_n$$

$$h \qquad h(Q_n) = \{h(x_1) \dots h(x_n)\}$$

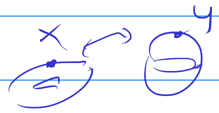


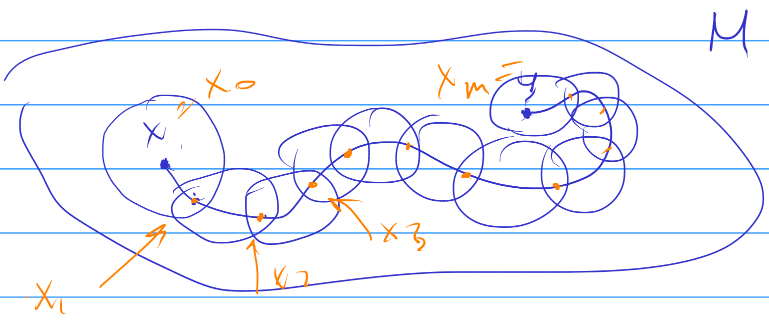


Лема Нехай M – зв'язний многовид без межі і $P = \{x_1 \dots x_n\}$ $Q = \{y_1 \dots y_n\}$ – дві множини, що складаються з попарно різних точок.
Питання – чи існує гомеоморфізм $h : M \to M$: $h(x_i) = y_i$?

Лема Нехай $x, y \in M$ – довільні точки. Тоді $\exists$ гомеоморф. $h : M \to M$: $h(x) = y$

$\Downarrow$





M – лок. лін. зв і зв'язний.
$\Downarrow$
лін. зв'язний

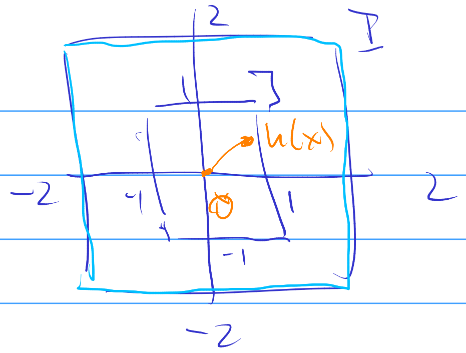
Нехай $\gamma : [0, 1] \to M$ – шлях $\gamma(0) = x$ $\gamma(1) = y$

Якщо $\exists h_i : M \to M$ $h_i(x_i) = x_{i+1}$

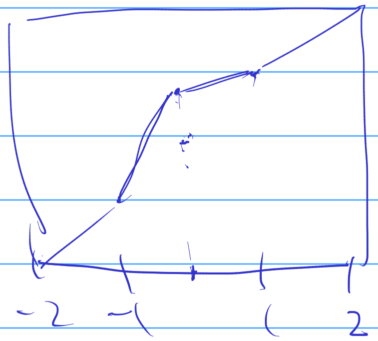
$$h = h_{m-1} \circ h_{m-2} \circ \dots \circ h_1 \circ h_0$$

Лема Нехай $I^n = \prod^n [-2;2]^n$ — куб в $\mathbb{R}^n$ зі стороною $[-2,2]$

$$J = \prod_{i=1}^{n} (-1;1)$$

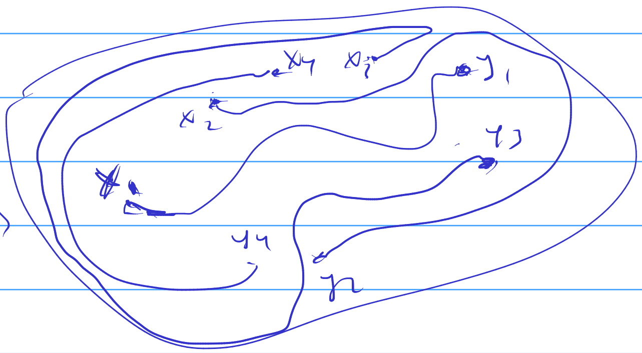


Тоді $\forall\ x \in J$ $\exists$ гомеом. $h: I^n \to I^n$?
h — нерухомий на ∂I^n
$h(0) = x$



Лем. Якщо $\dim M \geq 2$, то $\forall\ P = \{x_1 \dots x_n\}$ і $Q = \{y_1 \dots y_n\}$
$\exists\ h: M \to M$ $h(x_i) = y_i$

$\Downarrow$ $\exists$ шляхи x_i і y_i
шляхи $\gamma: [0,1] \to M$
$\gamma([0,1]) \cap (P \cup Q) = \{x_i, y_i\}$



$\Uparrow$

Лема з фіксацією

$$H([-2;2]) \xrightarrow{p} (-2,2)$$
$$h \longrightarrow h(0)$$

p має неперервний переріз на $(-1,1)$ тобто
$\exists\ s: (-1,1) \longrightarrow H([-2,2])$

$\forall t \in (-1,1)$: $p(s(t)) = t$

$s(t): [-2,2] \to [-2,2]$ — гомеом.
$s(t)(0) = t$

$$\begin{tikzcd} H([-2,2]) \arrow[r, "p"] & (-2,2) \\ h \arrow[r, mapsto] & h(0) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Маємо дію $H([-2,2])$ на $(-2,2)$

$$h$$

$$H([-2,2]) \times (-2,2) \to (-2,2)$$

p - це відобр. в орбіту т. 0

$\mathrm{stab}(0) = H([-2,2], 0) = \{h : h(0)=0\}$

$\text{Орб}(0) = (-2,2)$

$$\begin{tikzcd} H([-2,2]) \arrow[r] \arrow[d] & (-2,2) = \text{орб}(0) \arrow[l, bend right, "s"'] \\ H([-2,2]) / H([-2,2], 0) = \mathrm{Stab}(0) \arrow[ur, "\text{бієкція}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & K \arrow[r] & G \arrow[r, "p"] & G/K \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1 \end{tikzcd} \quad K \times (G/K) \simeq G \quad (k,g) \to k \cdot s(g)}$$

M - зв'язний многовид $\quad \dim M \geq 2 \quad \partial M = \varnothing$

Теорема

$$H(M) \xrightarrow{p} C_n(M)$$

$$p(h) = (h(x_1), \ldots, h(x_n))$$

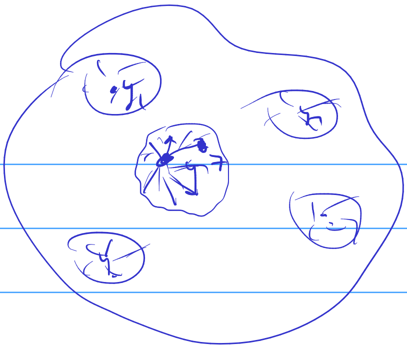
Відобр p допускає локальні перерізи

$\forall (y_1 \ldots y_n) \in C_n(M)$ $\exists$ окіл $U_1 \times \ldots \times U_n$

і відобр $s: U_1 \times \ldots U_n \to H(M)$

$s(z_1 \ldots z_n)(y_1 \ldots y_n) = (z_1 \ldots z_n)$.

$\boxed{p\text{ - локально тривіальне розшарування.}}$



$$\begin{tikzcd} H(M) \times C_n(M) \arrow[r] & C_n(M) \\ h \quad (y_1, \ldots, y_n) \arrow[r] & (h(y_1), \ldots, h(y_n)) \end{tikzcd}$$

$Q_n = (x_1, \ldots, x_n)$

$H(M, Q_n)$ = стабілізатор Q_n

$$\begin{tikzcd} p: H(M) \arrow[r] & C_n(M) \\ h & (h(x_1), \ldots, h(x_n)) \end{tikzcd}$$ - орбіта Q_n

$\forall\, P \in C_n(M)\ \exists\, h: M \to M \quad h(Q) = P \Rightarrow p$ - сюр'єкт.

$$\begin{tikzcd} H(M) \arrow[r, "p"] \arrow[dr] & C_n(M) \text{ - орб.} \\ & H(M) / H(M, Q_n) \text{ - стаб} \arrow[u, "\text{бієкція}"'] \end{tikzcd}$$

Не зрозуміло чи має p глобальний переріз $s: C_n(M) \to H(M)$
$p \circ s = \mathrm{id}_{C_n(M)}$

але воно має локальні перерізи

$$\begin{tikzcd} H(M) \arrow[r, "p"] & C_n(M) \\ = p^{-1}(U) & U \ni y \arrow[l, "s"'] \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

↑ об'єднання деяких сум. класів $\bar{H}(M) / H(M, Q_n)$

$$\begin{tikzcd} H(M,Q_n)\times U \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, bend right, "pr_2"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

— гомеоморфізм

$h \quad p \longrightarrow s(p)\circ h$

це означає, що p є локально-трив. розшар. з шаром $H(M,Q_n)$.

∃ послідовність гомотоп. груп

$$\boxed{H(M,Q_n) \longrightarrow H(M) \xrightarrow{p} C_n(M)}$$

$$\to \pi_k H(M,Q_n) \to \pi_k H(M) \to \pi_k C_n(M) \to$$
$$\to \pi_{k-1} H(M,Q_n) \to \pi_{k-1} H(M) \to \ldots$$

Означ. Нехай X - топол. простір, $n \geq 1$ і $Q \in C_n(X)$.

Тоді $\pi_1(C_n(X), Q)$ — назив. n-група чистих pure кіс X в т. Q.

- M - зв'язна поверхня, $C_n(M)$ - зв'язна

$$\pi_1(C_n(M)) = B_n(M)$$

Якщо $M = D^2$ то $P_n(M)$ позн. P_n

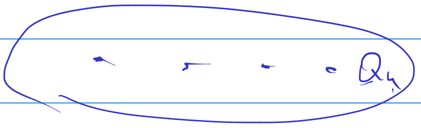
(pure) braid group, група кіс

$\pi_1(\hat{C}_n(X), Q)$ = n-та група кіс $B_n(X, Q)$

$\hat{C}_n(X) = C_n(X)/\Sigma_n$

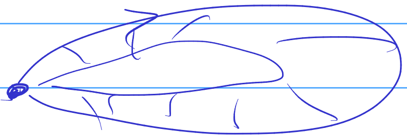
$P_n = P_n(D^2)$ $\qquad$ $B_n = B_n(D^2)$

D^2 $\qquad$ $I = [0,1]$



$\pi_1(\hat{C}_n(M), Q) = [(I, \partial I), (C_n(M), Q)]$

$Q = \{x_1 \dots x_n\}$



$\gamma = (\gamma_1 \dots \gamma_n)$

$I \longrightarrow C_n(M) \subset M \times \dots \times M$

γ – n-петля в т. $x_1 \dots x_n$

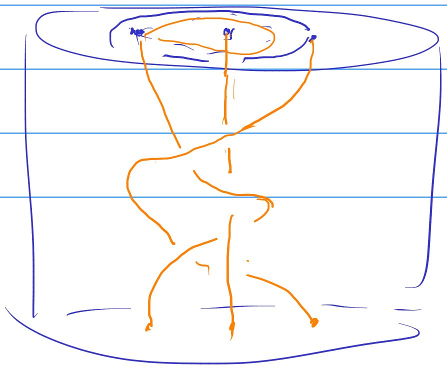
$$\boxed{\forall\, i \neq j \;\; \forall\, t \in [0,1] : \gamma_i(t) \neq \gamma_j(t)}$$

$(\gamma_1 \dots \gamma_n)$

$\gamma : I \longrightarrow C_n(M)$ – петля

$\hat{\gamma} : \bigsqcup_n I \longrightarrow M \times I$ $\qquad$ ін'єктивне

$t \in I_i \longrightarrow (\gamma_i(t), t)$



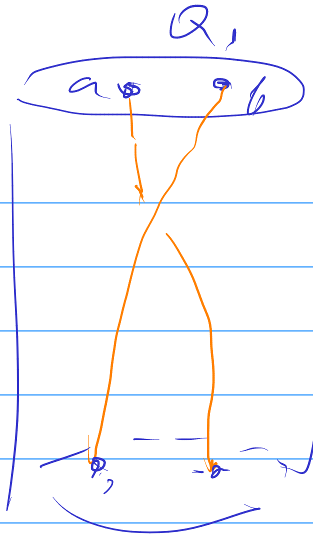
– чиста коса $\beta \in \pi_1(C_3(D))$

$M \times [0,1]$

$(\gamma_i(t), t) = (\gamma_j(t'), t')$

$\Rightarrow t = t' \Rightarrow \gamma_i(t) = \gamma_j(t)$

$\Rightarrow i = j$



— петля в $\hat{C}_2(D^2)$

але не петля в $C_2(D^2)$

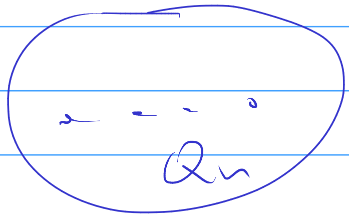
$Q = \{a, b\} \to (b\ a)$

$\nwarrow \pi_1(\hat{C}_2(D)) \quad P_2$

$B_n = MCG_g(D, Q_n)$

$\mathcal{G} = H(D^2, \partial D) \cap \underset{inv}{H}(D^2; Q_n)$ — гомео

Нерух на ∂D^2 і зберігають інвар Q_n

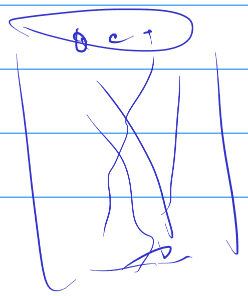


$\mathcal{G}_0 = \{h \mid h$ ізот id_{D^2} rel $Q_n \cup \partial D^2\}$

$\mathcal{G} \ni h$ ізот id_{D^2} в $\mathcal{G}$

$$\boxed{B_n = \mathcal{G}/\mathcal{G}_0}$$

$$P_n \to B_n \xrightarrow{\text{перестановки } Q_n} \Sigma(Q_n)$$



B_4