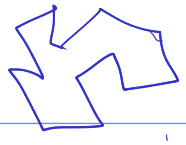
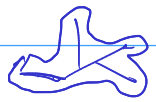
① Гомеоморфізм $[0,1]$ S^1, зокрема ті що групи гомеоморфізмів

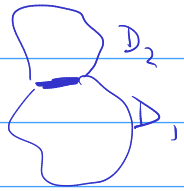
② Т. Жордана для замкнених Жорданівих

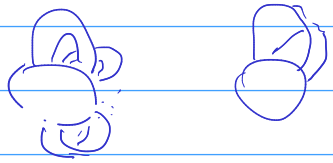




③ Існування трикутних поверхонь $\Rightarrow$ класифікація

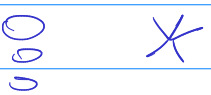




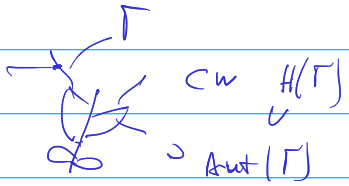


④ Групи Гомотопій $G/G_0 = MCG(G)$

$MCG(G)$ $\equiv$



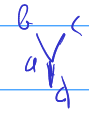






$\to H(\Gamma) \underset{p}{\overset{s}{\rightleftarrows}} Aut(\Gamma)$

$\Gamma(V, E)$



abcd $\in$ ab ac ad

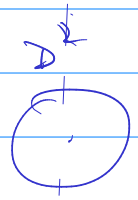
Групи Вимірності компактних поверхонь

M $H(M) \supset H_0(M)$ - гомотопії тотожні id_M

$F: M \times I \to M$ $F_t: M \to M$ - гомеоморфізми

$H(M)/H_0(M) = MCG(M)$ $F_0 = \mathrm{id}_M$ F_1

$\uparrow$ матриці цих груп $\cong$ гомеотопій M





$S^1 \times [0,1]$



S^2

$S^1 \cup S^1$

$MCG(S^2) = \mathbb{Z}_2$

① $O(2) \subset H(D^2)$

③ $O(2) \times \mathbb{Z}_2 \subset H(S^1 \times [0,1])$

② $O(3) \hookrightarrow H(S^2)$

Теорема

Ці вкладення є гомотопічними еквівалентностями.

$S^1 \hookrightarrow H_0(D^2)$

$S^1 \hookrightarrow H_0(S^1 \setminus \{1\})$

$SO(3) \hookrightarrow H_0(S^2)$

} тех гомот. еквівалентності

$M = \mathbb{RP}^2$ – проективна площина =

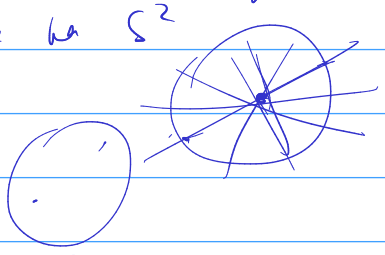
- множина всіх прямих в $\mathbb{R}^3$, що проходять через $0 \in \mathbb{R}^3$
- множина пар антиподальних точок на S^2

$\{(x,y,z), (-x,-y,-z)\}$

$\mathbb{Z}_2 \times S^2 \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$

$(\varepsilon, q) \to \varepsilon \cdot q$

$\mathbb{RP}^2 = S^2 / \mathbb{Z}_2$



$S^2 \to \mathbb{RP}^2$ – накриття

- $\mathbb{RP}^2 = D^2 / q \sim -q$, $q \in \partial D^2$



$O(3) \ni A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – ортогональне перетв. $A \in SO(3)$, $-A \in O(3) \setminus SO(3)$

$\exists$ лінійне $A \Rightarrow A(-x) = -A(x)$ $\forall x$

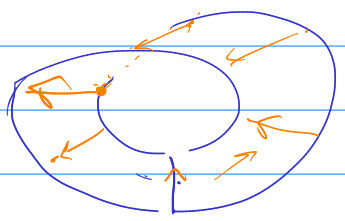
$A(\{x, -x\}) = \{A(x), -A(x)\} \Rightarrow$ A індукує деяке $\mathbb{RP}^2$

$-id$ і A індукують одне і те ж саме відображення $\mathbb{RP}^2$

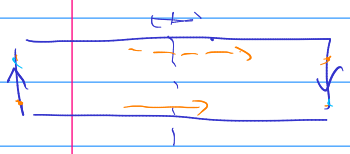
Теорема: Існує $\varphi : SO(3) \to M(\mathbb{RP}^2)$ – гомот. еквівалентність.

$\pi_1 M(\mathbb{RP}^3) = \pi_1 SO(3) = \mathbb{Z}_2$

M = стрічка Мебіуса



$\cup D^2 = \mathbb{RP}^2$



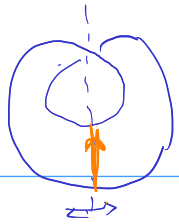
$\exists$ ізотопія яка прокручує M_0 один по собі

Теорема $S^1 \hookrightarrow M(M_0)$ – гомот. еквівалентність

$S^1 \cup S^1 \hookrightarrow M(M_0)$



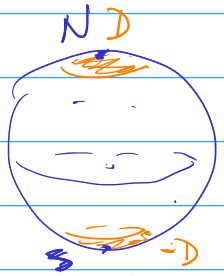
гвинтове накриття



$A = S^1 \times [-1,1]$

$\mathbb{Z}_2 \times A \to \mathbb{Z}_2$

$\varepsilon \cdot (z,t) \to (\varepsilon z, \varepsilon t)$



$\xrightarrow{p}$ $\mathbb{RP}^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_2 \times S^2 \to S^2$

$(\varepsilon, q) \to \varepsilon q$

$(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$

$A = \overline{S^2 \setminus (D \cup -D)}$ = циліндр, інвар відносно $\mathbb{Z}_2$

$A \to p(A) = \mathbb{RP}^2 \setminus D = M_5$

$O(2) \subset O(3)$

↑

підгр, які здіймають площини вперед

$O(2)$ - здійсн. інвар A $\Rightarrow$ кожне $P \in O(2)$ індукує деяке $A/\mathbb{Z}_2 = M_5$

Теорема $O(2) \hookrightarrow H(M_5)$ є гомот. еквівал.

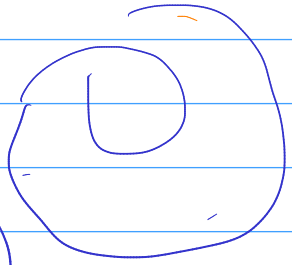
$$H(M^3, \partial M^3) \longrightarrow H(M^3) \xrightarrow{p} H(S^1 = \partial M^3) \qquad O(2)$$

$$h \xrightarrow{\Sigma} h|_{\partial S^1}$$

Эдр $\xrightarrow{p}$ голон. M^3 перехід на ∂M^3

Гомотопія

- $\exists$ неперер. перетв. $s: H(S^1) \to H(M^3)$ не обов'язково гомотопія груп



$\Rightarrow$ $H(M^3) \cong H(S^1) \times H(M^3, \partial M^3)$ Гомотопія

- $H(M^3, \partial M^3)$ – скорочена "Алгебра групи Александера" для M^3

$$H(M^3) \cong H(M^3, \partial M^3) \times H(S^1) \cong O(2)$$

$\cong$ $\cong$ $O(2)$

$M = T^2 = S^1 \times S^1$



T^2 - це абелева група - добуток $S^1 \cong SO(2) \times S^1 \cong SO(2)$

$T^2 \times T^2 \xrightarrow{M} T^2$ - операція множення - покоор

$(a,b)(c,d) \to (ac, bd)$ $\quad a,b,c,d \in S^1 \cong \{|z|=1\}$

$L_{ab} : T^2 \to T^2$ $\quad L_{ab}(c,d) = (ac, bd)$

L_{ab} - неперервне бієкт. $\quad L_{ab}^{-1} = L_{a^{-1}b^{-1}} = L_{\bar{a}\bar{b}}$ $\Big\} \Rightarrow$ L_{ab} - гомеоморфізм

$(a,b) \longrightarrow L_{ab} \in H(T^2)$

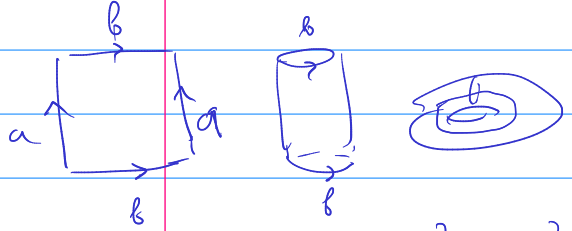
Отже T^2 - топологічна група, що вкладається в свою групу гомеоморф.
$T^2 \xhookrightarrow{L} H(T^2)$

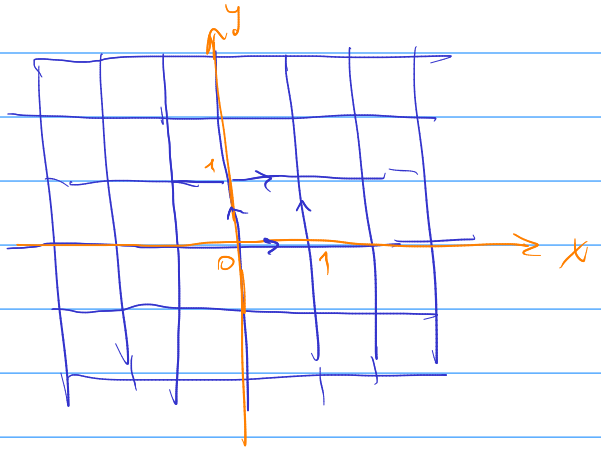
Отже T^2 - лінійно зв'язний $\Rightarrow$ $T^2 \xhookrightarrow{L} H_0(T^2)$

Теорема $T^2 \xhookrightarrow{L} H_0(T^2)$ - гомеоморфно вкладається

Зауваження $S^1 \cong SO(2) \hookrightarrow H(S^1)$ - гомеоморфно вкладається
група поворотів

$MCG(T^2) = H(T^2) / H_0(T^2)$



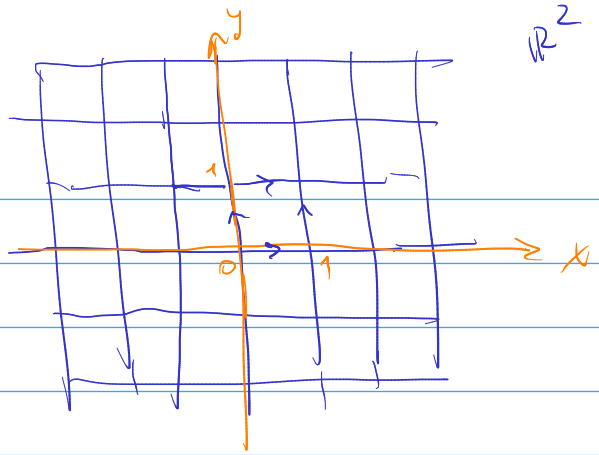


$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(m,n), (x,y) \to (m+x, n+y)$

$\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = T^2$

Афінний перетв. $\mathbb{R}^2$ — це композиція з проекцією p.



$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$$

$\downarrow p$ $\qquad$ $\downarrow p$

$T^2 \xrightarrow{\tilde{A}} T^2$

$A(x,y) = (\alpha(x,y),\ \beta(x,y))$

$\alpha(x,y) = ax + by + e$

$\beta(x,y) = cx + dy + f$

Якщо:

$\forall m,n \in \mathbb{Z}\ \exists m', n' : A(x+m, y+n) = A(x,y) + (m', n') \quad \forall x,y$

то A індукує гомеом $\tilde{A}: T^2 \to T^2$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+m\\ y+n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}}_{A(x,y)} + \underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}}_{\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ повинні бути цілими.

$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} \neq 0$ бо інакше A — не гомеоморф. $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$ — індукує гомеом $T^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{Z})$

$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = \pm 1$

$$GL(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \text{Homeo}(T^2)$$
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \mathbb{Z}^2$ — так будем еще обозначать $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \end{pmatrix}$

Вложен $GL(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2 \longrightarrow \mathrm{Homeo}(T^2)$

дискретна $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times T^2 \longrightarrow H_0(T^2)$

$GL(2,\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$

Теорема Вложен $GL(2,\mathbb{Z}) \times T^2 \hookrightarrow H(T^2)$

гомотопически эквивалентен.

$MCG(T^2) = H(T^2)/H_0(T^2) = \pi_0(GL(2,\mathbb{Z}) \times T^2) =$

$= GL(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2)$

$h: T^2 \to T^2$, и h индуцирует изоморфизм $h_1^*: H_1(T^2,\mathbb{Z}) \to H_1(T^2,\mathbb{Z})$

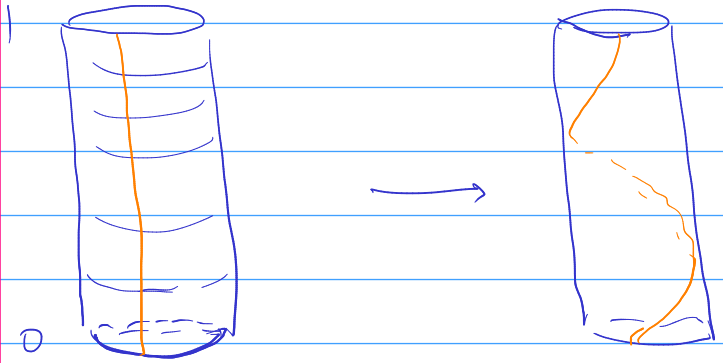
гомеоморфизм $\mathbb{Z}^2$ $\mathbb{Z}^2$

$H_0(T^2) \to \mathrm{Homeo}(T^2) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Aut}(H_1(T^2,\mathbb{Z})) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) = GL(2,\mathbb{Z})$

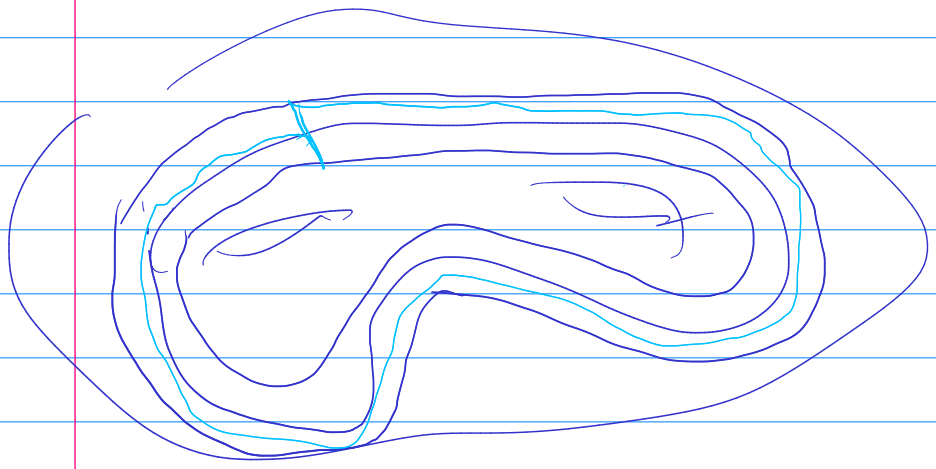
$h \to h_1^*$ $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix}$

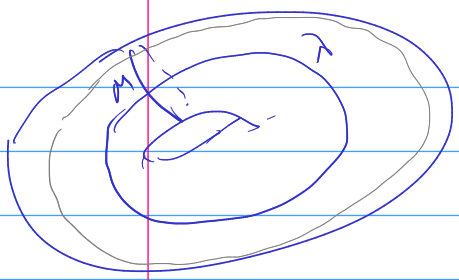
$\ker \varphi = H_0(T^2)$, тогда $h \in H(T^2)$ индуцирует тождественный $\Leftrightarrow$ h гомотопен id_{T^2}.

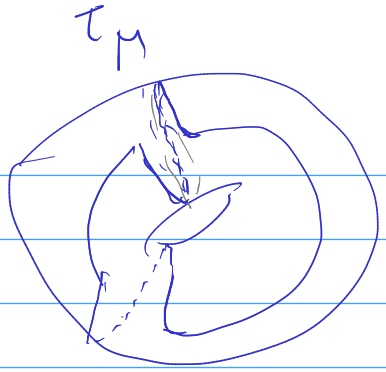
Скручивание Дена

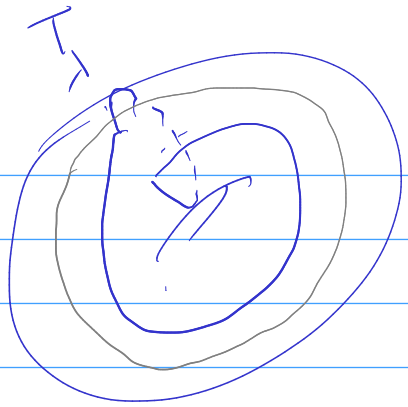


$S^1 \times [0,1] \xrightarrow{T} S^1 \times [0,1]$ $\quad T(z,t) = (ze^{2\pi i t}, t)$



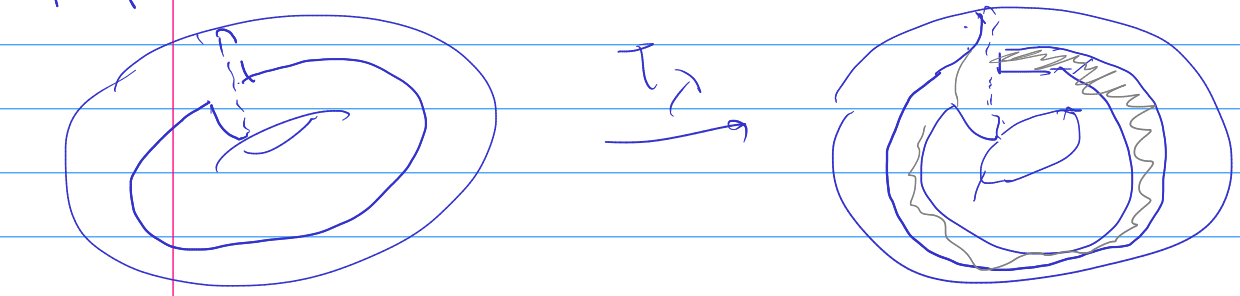






$\exists\ h = \tau_\lambda \circ \tau_\mu$ композиція скручувань Дена

Тоді $h(\lambda)$ ізотопна μ



$H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \langle \lambda, \mu \rangle = \mathbb{Z}^2$

$(\tau_\lambda)^*_1 : H_1(T^2) \to H_1(T^2)$

$\mu \to \lambda + \mu$

$\lambda \to \lambda$

$\tau_\lambda^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ λ

$\tau_\mu^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$ μ

Лема $\forall$ матриця $B \in SL(2, \mathbb{Z})$ є добутком матриць вигляду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5-4 & 2 \\ 7-6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2-2 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$T_x^a \quad T_x^b \quad T_x^{a+b}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & 2 \\ 7-3 & 3 \end{pmatrix}$$

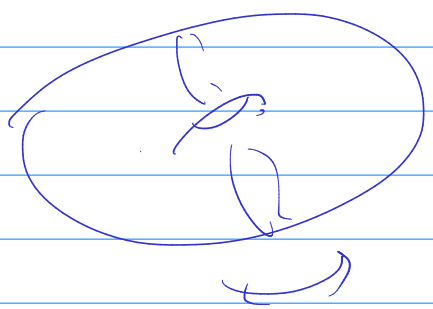
Нехай $MCG^+(T^2) = H(T^2) / H_0(T^2)$ — класи ізотопій гомеоморфізмів, які зберігають орієнтацію.

Породжуються класами ізотопій скручувань

Дена узагальнення,

$\xi : T^2 \to T^2$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xi(x, y) = (\bar{x}, y)$



$$GL(2,\mathbb{Z}) = MCG^*(T^2) = \langle T_\mu, T_\lambda, \xi \rangle$$

4

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$