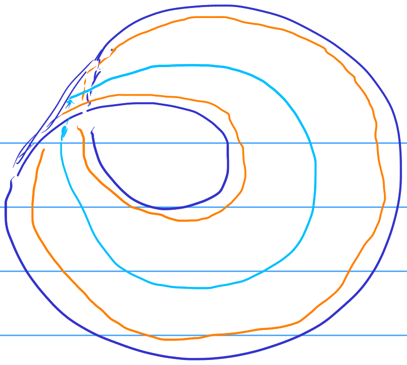
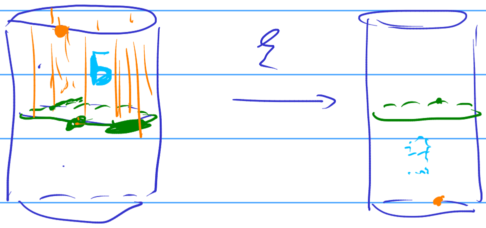


Теорем. Нехай M - стрічка Мьобіуса γ_1, γ_2 є прості замкнені криві $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathrm{Int}(M)$

Припустимо, що γ_1 і γ_2 - "змінюють орієнтацію", тоді $\exists$ гомеоморфізм $h: M \to M$ $h \circ \gamma_1 = \gamma_2$.

Проба з. Крива γ змінює орієнтацію

- $\exists$ база околів кривої, які гомеоморфні стрічці Мьобіуса
- Нехай $p: C = S^1 \times [-1,1] \to M$ дволистне орієнтовне накриття. Тоді $p^{-1}(\gamma)$ - зв'язна множина (пр. замкнена крива)



$$\xi(z,t) = (-z,-t)$$

$$\xi \circ \xi(z,t) = (z,t)$$

① $\xi^2 = \mathrm{id}$

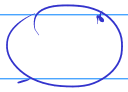
② ξ -не має нерух. точок

$$\xi(z,t) = (z,t) = (-z,t)$$

$$\Downarrow$$

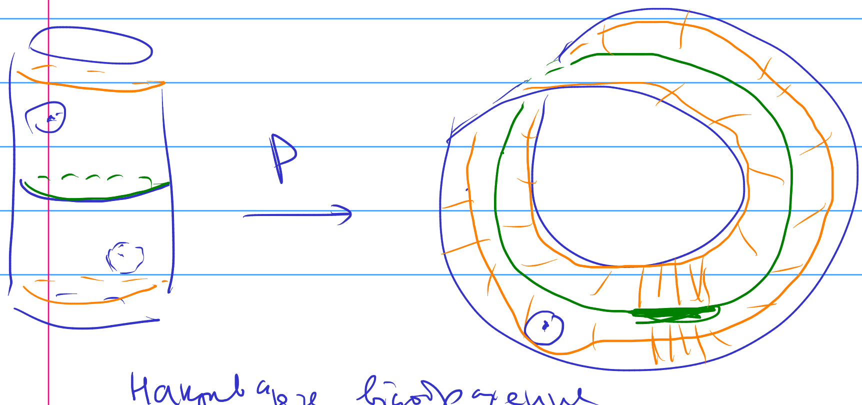
$t = 0$ $\nexists z \in S^1$

$z = -z$



$C = S^1 \times [-1,1]$

$$C /_{(z,t) \sim (-z,-t)} = M$$

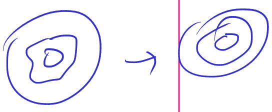


Накриваюче відображення

$\mathbb{Z}_2 = \langle \mathrm{id}_C, \xi \rangle$

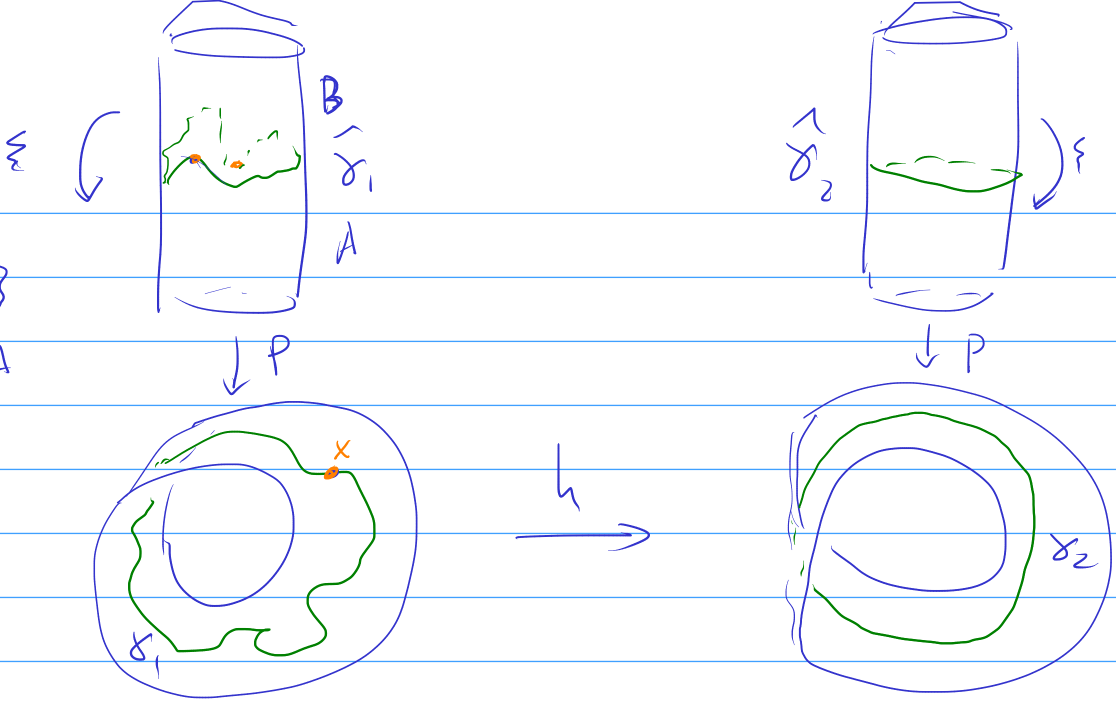
діє на C.

$$C/\mathbb{Z}_2 = M$$



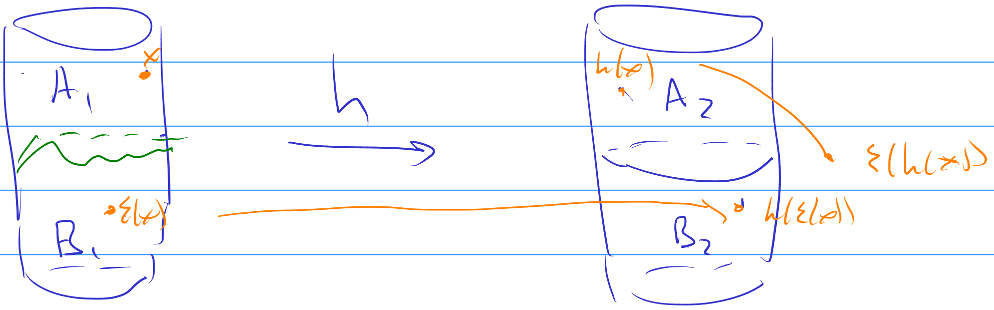
$\xi(A) = B$

$\xi(B) = A$



Заув 1 $\forall\, x \in \gamma_1 \quad p^{-1}(x) \in \hat\gamma_1 \Rightarrow \xi(\hat\gamma_1) = \hat\gamma_1$

Заув 2 За т. Жордана–Шонфліса $\exists\ \hat h : C \to C \quad \hat h(\hat\gamma_1) = \hat\gamma_2$



Потрібно побудувати h так щоб $h(\xi(x)) = \xi(h(x))$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\xi"'] & C \arrow[d, "\xi"] \\
C \arrow[r, "h"] & C
\end{tikzcd}$$

буде слідувати $\Rightarrow$ що h індукує гомеоморфізм

$$\begin{tikzcd}
C/_\xi \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & C/_\xi \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
M_o \arrow[r] & M_o
\end{tikzcd}$$

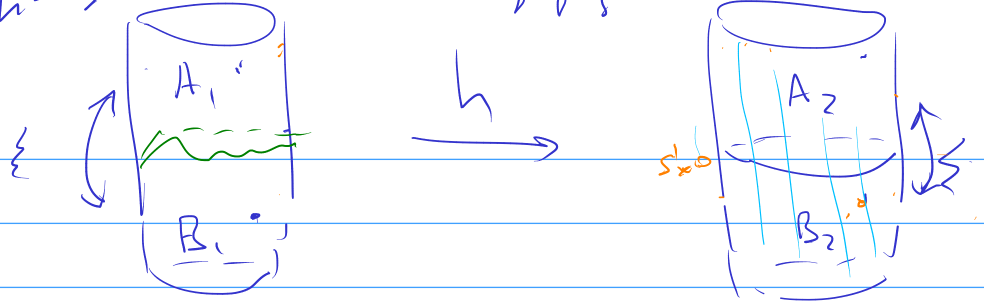
$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[d, "p"] \\
M_o \arrow[r, "\tilde h"] & M_o
\end{tikzcd}$$

$h(\{x\}) = \{h(x)\} \qquad h(\xi(x))$

$\{x, \xi(x)\} \qquad \{h(x), \xi(h(x))\}$

Нехай h - довільний гомеоморфізм

$h(A_1) = A_2$
$h(B_1) = B_2$



$$\hat{h} : C \to C$$

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \in A_1 \\ \underbrace{\underbrace{\varepsilon\circ h\circ \underbrace{\varepsilon(x)}_{A_1}}_{A_2}}_{B_2} & x \in B_1 \end{cases}$$

Для того, щоб $\hat{h}$ був гомеоморфізмом потрібно, щоб

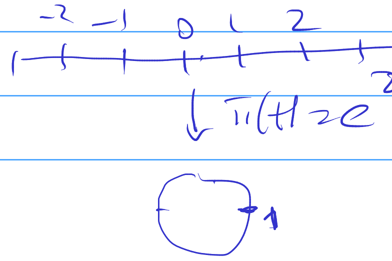
$h(x) = \varepsilon h \varepsilon(x)$
$\forall \in \bar{A}_1 \cap \bar{B}_1 = S_1$

$\varepsilon^2 = id \Leftrightarrow \varepsilon = \varepsilon^{-1}$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\hat{h} = h"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A_2 \arrow[d, "\varepsilon"] \\ B_1 \arrow[r, "\varepsilon h \varepsilon = \hat{h}"] & B_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "\hat{h} = \varepsilon h \varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & B_2 \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A_1 \arrow[r, "\varepsilon\varepsilon h \varepsilon\varepsilon = h = \hat{h}"] & A_2 \end{tikzcd}$$

Лема Нехай $h: S^1 \to S^1$ гомеоморфізм кола. Тоді h ізотопний або до id_{S^1} або до компл. спряження $z \to \bar{z}$



Зокрема $\varepsilon: z \to -z$

$c: z \to \bar{z}$ $id: z \to z$

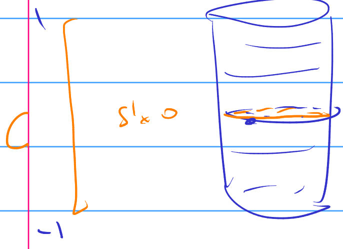
$\varepsilon \circ c = c \circ \varepsilon$
$\varepsilon \circ id = id \circ \varepsilon$

Лема Нехай $H: S^1\times[0,1] \to S^1$ – ізотопія $H_0 = \mathrm{id}_{S^1}$

$S^1\times 0$

(це ізотопія кривої по собі в C)

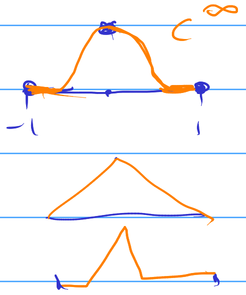
Тоді H продовжується до ізотопії $\hat{H}: C\times[0,1]\to C$ яка нерухома на ∂C



$\mu: [-1,1] \to [0,1]$

$\mu(-1)=\mu(1)=0$

$\mu(0)=1$



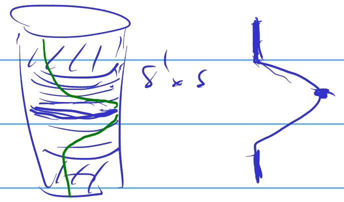
$\hat{H}: (S\times[-1,1])\times[0,1] \to S^1\times(-1,1]$

- $\hat{H}((z,s)\ t) = (H(z,0),t)$
- $\hat{H}((z,s),t) = (H(z,t\cdot\mu(s)),t)$

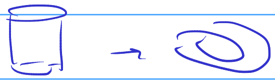
$t=0$ $\quad (H(z,0),t)$ $\quad \hat{H}=\mathrm{id}_C$

$\parallel$

(z,t)



$p: C\to M_{\ddot{o}}$



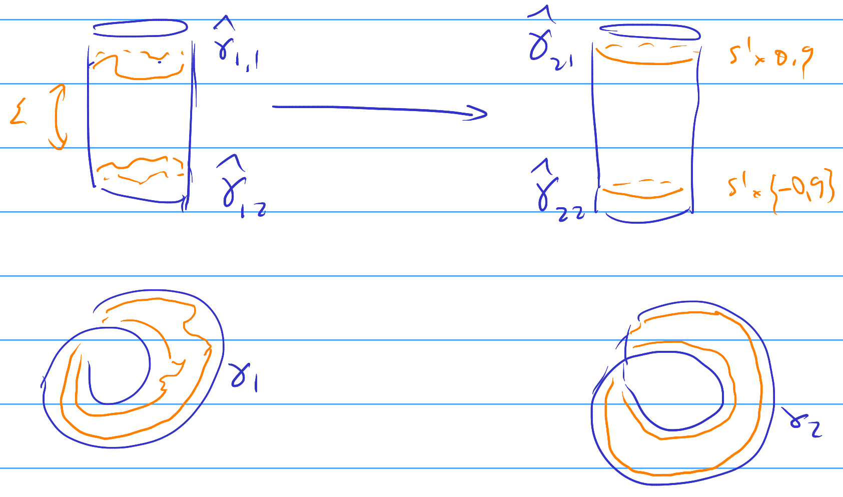
Теорема 2 Нехай $\gamma_1, \gamma_2: S^1\to M_{\ddot{o}}$ два вкладення, такі, що

① γ_1 і γ_2 – не обмежують диски

② γ_1 і γ_2 – "зберігають орієнтацію" $p^{-1}(\gamma_1)$ і $p^{-1}(\gamma_2)$ є об'єднан 2-х пр. замкнених кривих

Тоді $\exists$ гомеоморфізм $h: M_{\ddot{o}}\to M_o$: $h\circ\gamma_1=\gamma_2$

①



① Редукц

$\exists\ \hat{h}: C\to C$

- $\hat{h}\circ\varepsilon = \varepsilon\circ\hat{h}$
- $\hat{h}(\hat{\gamma}_{1,i}) = \hat{\gamma}_{2,i}$

$i=1,2$

$\Downarrow$

$\hat{h}$ індукує гомео

$h: M_o\to M_o$

$h(\gamma_1)=\gamma_2$ $\Longleftarrow$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\hat{h}"] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[d, "p"] \\
M_o \arrow[r, "\hat{h}"] & M_o
\end{tikzcd}$$

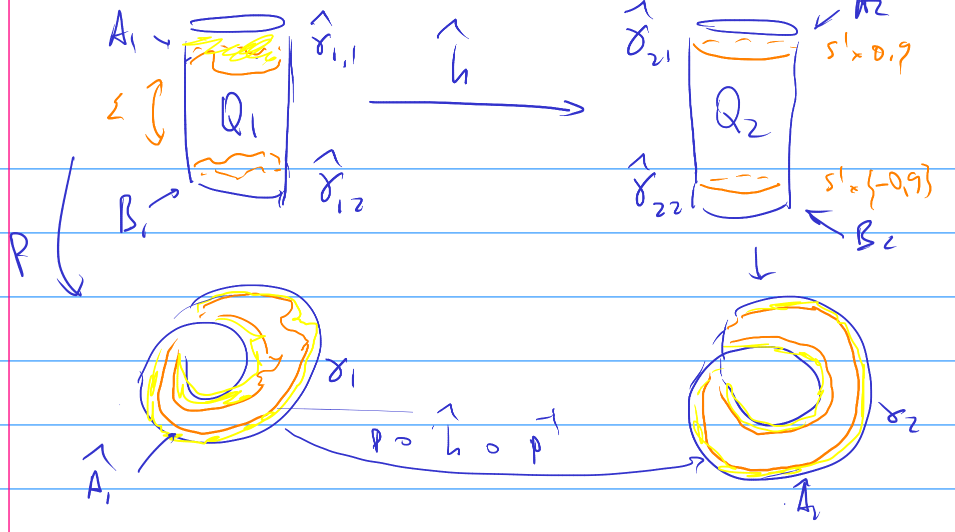
$P|_{A_1 \cup B_1}$

$\downarrow$

$\hat{A}_1$

двол накр.

$\hat{A}_1$



① Нехай $\hat{h}: C \to C$ довільний гомеом. $\hat{h}(\gamma_{1i}) = \gamma_{2i}$ (він існує за Т. ЖШ для циліндр)

② Можна підібрати $\hat{h}$ і вважати що $\varepsilon \circ \hat{h} = \hat{h} \circ \varepsilon$ на γ_{1i} γ_{2i}

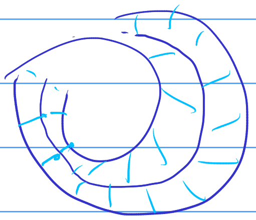
- $p: A_1 \to \hat{A}_1$ – гомеоморфно
- $\hat{h}(Q_1) = Q_2$ і $p: Q_2 \to$

$\overline{M_0 \setminus \hat{A}_1}$ і $\overline{M_0 \setminus \hat{A}_2}$ – стрічки Мебіуса

Лема Нехай $\varphi: \partial M_0 \to \partial M_0$ тоді φ продовж. до гомеоморфіз. $\varphi: M_0 \to M_0$

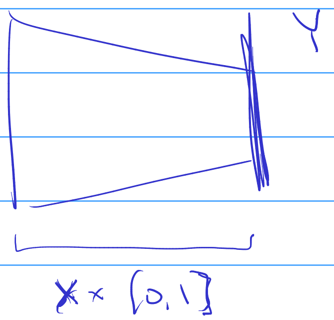
Нехай φ – зберігає орієнтацію $\partial M_0 = S^1$

$M_0 = Cf$ $\quad f: S^1 \to S^1 \quad f(z) = z^2$

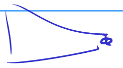


$f: X \to Y \qquad Cf = X \times [0,1] \cup Y$

$(x,1) \sim f(x)$



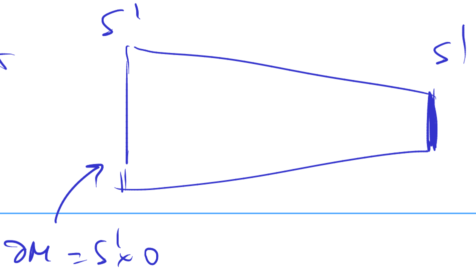
① $f: X \to \bullet$ постійне

$Cf =$  $= CX$

$M_0 = C_f$

$S^1 \xrightarrow{f} S^1$

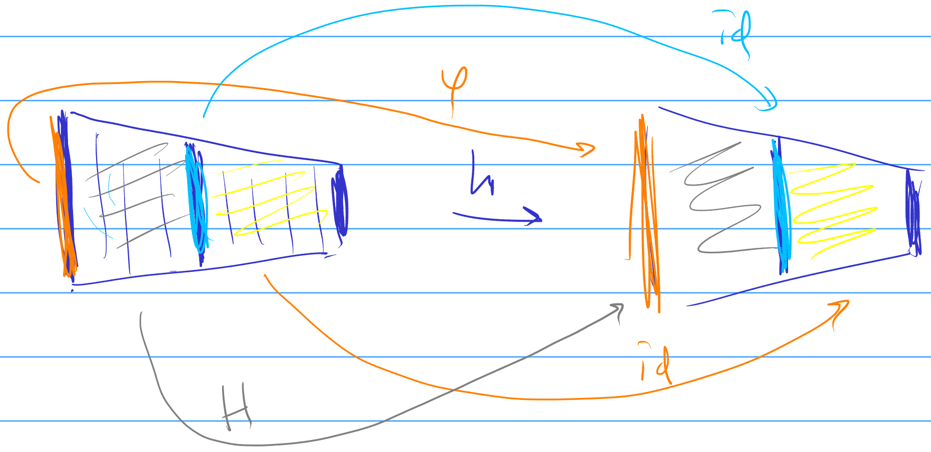
$z \to z^2$



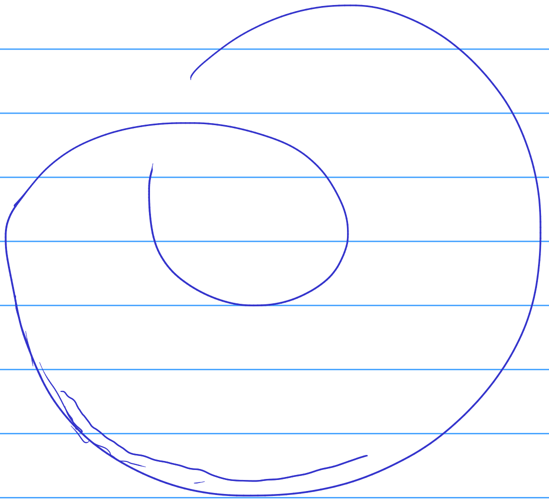
$\varphi: S^1 \times 0 \to S^1 \times 0$ – збер. орієнтацію $\Longleftrightarrow$ φ ізотопний до id_{S^1}

$H: S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$ – пошарові гомеоморфізми

$H(x,1) = x \qquad H(x,0) = \varphi(x)$



$$h(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ (x,t) & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$



Група гомеотопій (mapping class group)

M – зв'язна комп. поверхня.

M – дов. топ простір

$H(M)$ – група гомеоморфізмів M

$H_0(M)$ – множина гомеоморфізмів які ізотопні до id_M

Лем 1 $H_0(M)$ – нормальна підгрупа в $H(M)$

⇓ $h \in H_0(M)$, тобто $\exists F_t : M \to M$, $t \in [0,1]$, ізотопія $F_0 = h$ $F_1 = id_M$

$F : M \times [0,1] \to M$

Нехай $g \in H(M)$. Покажемо, що $g h g^{-1} \in H_0(M)$

$$G_t = g F_t \circ g^{-1} : M \to M \qquad G_0 = g F_0 g^{-1} = g h g^{-1}$$

$$G_1 = g F_1 g^{-1} = g\, id_M\, g^{-1} = id_M$$

⇑

$$q : M \times [0,1] \to M \times [0,1], \quad q(x, t) = (g(x), t)$$

Ізотопія $F : M \times [0,1] \to M \times [0,1]$ – це шар. гомеоморфізм

$$G : M \times [0,1] \to M \times [0,1] \qquad G = q F q^{-1}$$

⇑

Означ. Фактор група $H(M) / H_0(M)$ – називається групою гомеотопій M або mapping class group

Якщо на $H(M)$ ввести "компактно - відкрита топологія" τ

передбаза $N_{K,V} = \{ h : M \to M \mid h(K) \subset V \}$

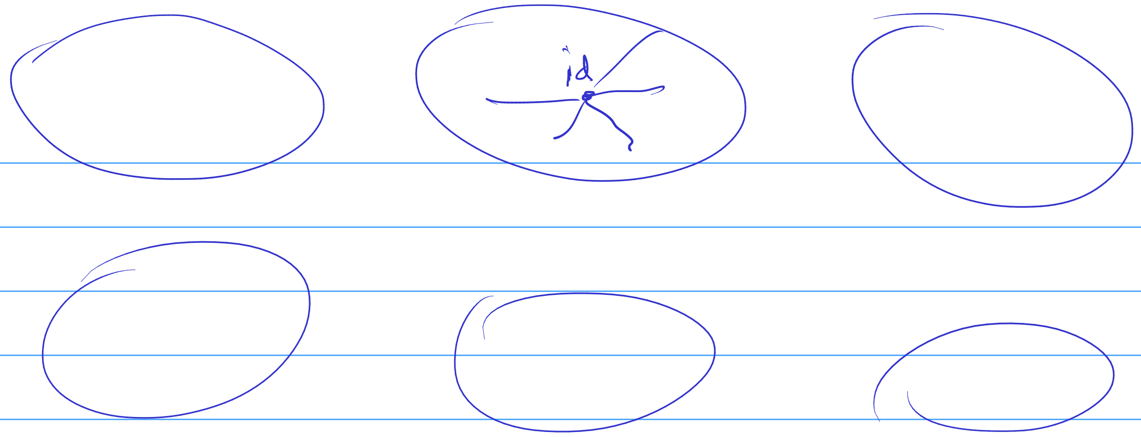
$K \subset M$ - компакт $V \subset M$ - відкрита

$\{ N_{K,V} \}$ породжує деяку топологію, яка назив комп.-відкрита

• M - метричний компакт τ – рівномірна топ. $d(f, g) = \sup\limits_{x \in M} d(f(x), g(x))$

$H_0(M)$ – компонента лінійної зв'язності $H(M)$ відносно комп. відкр. топології

$H(M)$



$$H(M)/_{H_0(M)} = \pi_0 H(M)$$

Приклади $\quad G = O(2) \qquad O(2) = S^1 \sqcup S^1 \qquad \emptyset$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right\} \qquad \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\right\}$$

$a^2+b^2=1$

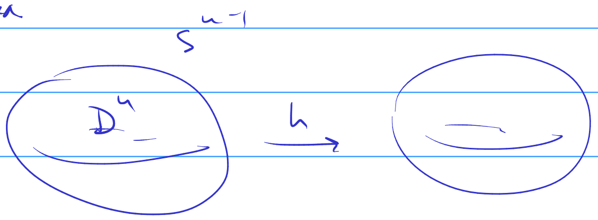
$O(2) < H(S^1)$ – гом. еквівалентн

- $\mathbb{Z}_2 = \pi_0 O(2) \cong \pi_0 H(S^1)$
- $H([0,1]) \qquad \pi_0 H([0,1]) = \mathbb{Z}_2$
- Трюк Александера $\quad h: D^n \to D^n$ нерух. на ∂D^n ізот. до id

$H(D^n, \partial D^n)$ – стягуване

Лема $\quad H(D^n) \xrightarrow{p} H(S^{n-1})$ – гомот. еквівал

$\Downarrow \qquad h \longrightarrow h|_{\partial D^n}$

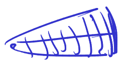


- p – гомоморфізм $\quad p(h\circ g) = (h\circ g)|_{\partial D^n} = h|_{\partial D} \circ g|_{\partial D} = p(h)\circ p(g)$
- $\ker p \overset{\text{def}}{:=} H(D^n, \partial D^n)$

$$1 \to H(D^n, \partial D^n) \longrightarrow H(D^n) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H(S^{n-1}) \to 1$$

| стяг. (Трюк Александера)

$D^n = CS^{n-1}$



- p – сюр'єктивне і має переріз $\quad \varphi: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$

$$s(\varphi): D^n \to D^n \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ |x|\varphi\left(\frac{x}{|x|}\right) & x \neq 0 \end{cases}$$

s – гомоморфізм

$$H(D^n) \simeq H(D^n, \partial D^n) \cancel{\oplus} H(S^{n-1})$$

$|$

стезь

⇑

β – гомот. эквивал.

Группы гомотопий поверхность