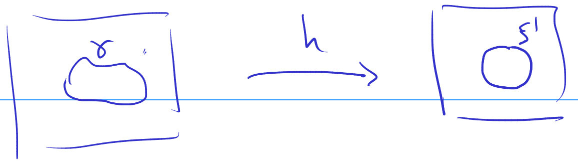
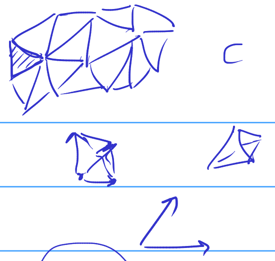
Т. Жордана, Т. Жордана-Шонфліса ⇒ Триангуляція поверхонь



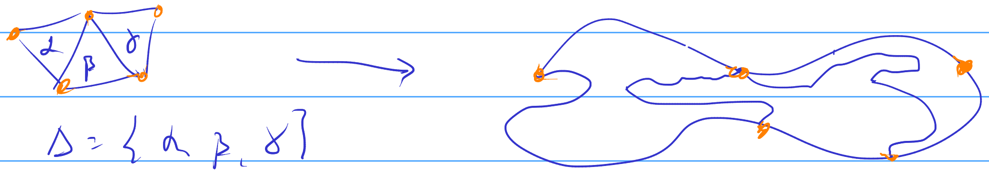
$\mathbb{R}^2 \setminus \gamma = A \sqcup B$



$\bigcup \Delta_i$ тріангуляції сітки

поліедр

Тріангульована поверхня M — гомеоморфізм поліедр з фіксов. тріанг. $\longrightarrow M$



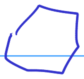
$\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$|\Delta| = \alpha \cup \beta \cup \gamma$ — носій Δ

Питання. Нехай Δ — тріангуляція. За яких умов $|\Delta|$ буде 2-многовидом?

Теорема $|\Delta|$ є 2-многовидом $\iff \forall$ вершини $v \in \Delta$ її $\mathrm{link}(v) \simeq$ простий замкнений цикл

Характеризація тріангульованих поверхонь



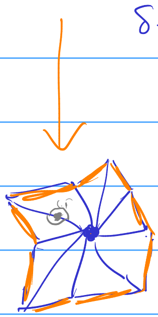
$\mathrm{st}(v) = \bigcup\limits_{v \in \text{верш}} \Delta$

$\mathrm{link}(v) = \bigcup \delta$

δ — грань симплекса в $\mathrm{st}(v)$

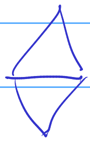
$\delta \cap v = \emptyset$

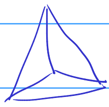
$\mathrm{st}(v) =$ конус над $\mathrm{link}(v)$

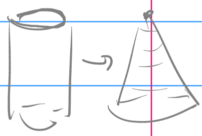


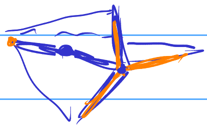
$\mathrm{st}(v)$

$CX = X \times [0,1] / (X \times 1)$

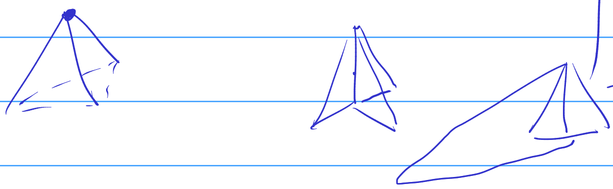


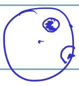






$\not\simeq D^2$?

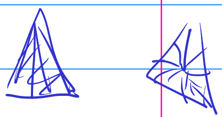




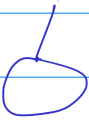
$CX \overset{h}{\simeq} CY$

$h(X \times 1) = Y \times 1$

Нехай Γ — скін. граф. $C\Gamma \simeq D^2 \iff \Gamma$ — простий цикл



$\uparrow$ $\mathrm{link}(v)$



$\uparrow$ $\mathrm{st}(v)$

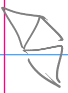
$H_2(CA, A) = H_2(P, P \setminus v)$

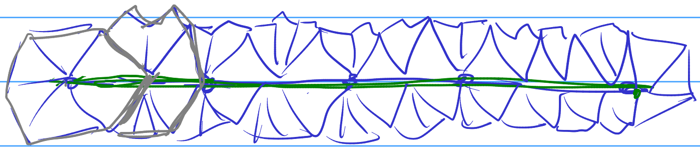
$H_1(P, P \setminus v)$

$H_i(|M| \to H_i(|P| \to H_i(|P|,|M|) \to$

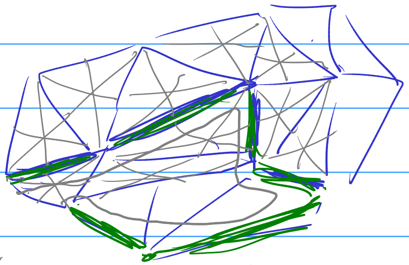
Нехай M – триангульована поверхня, M'' – друге барицентр. підрозбиття

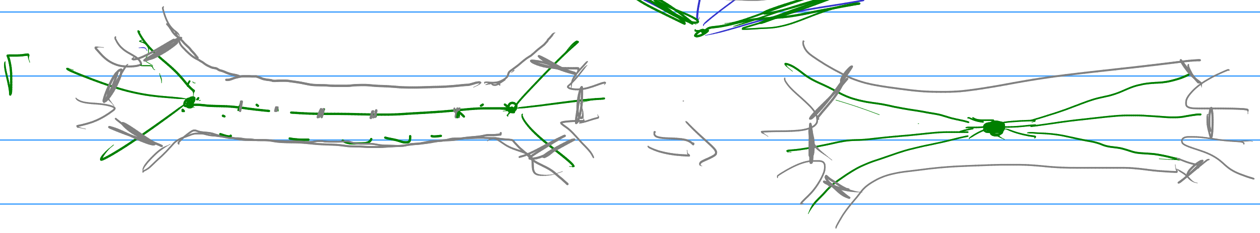
Нехай γ – це простий шлях з ребер в M''

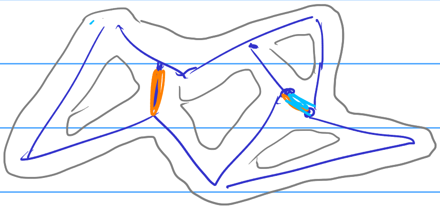


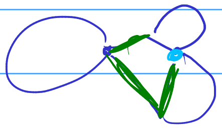


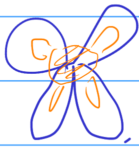
$\simeq D^2$







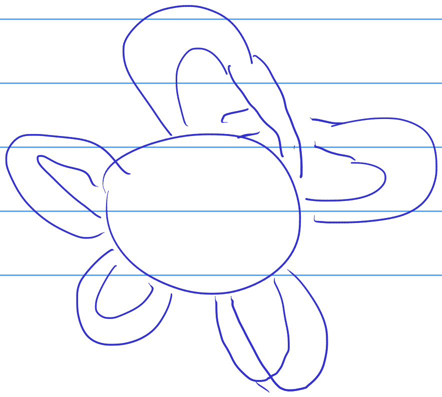


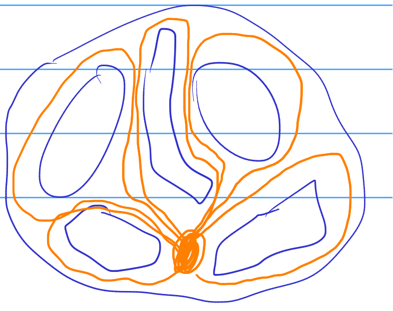


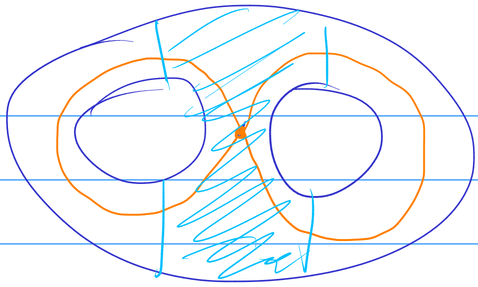
Теорема Нехай Γ – зв'язний 1-підкомплекс в M (граф, ребра якого – це симплекси M)

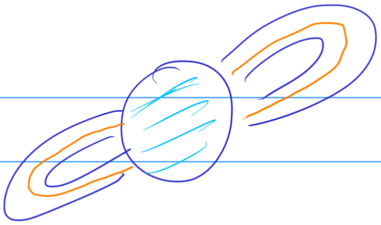
Нехай $N(\Gamma) = \operatorname{star}(\Gamma)$ відносно 2-го барицентр. підрозбиття

Тоді $N(\Gamma)$ гомеоморфне D^2, до якого приклеєно скінченне число смуг, можливо з перекрутками.





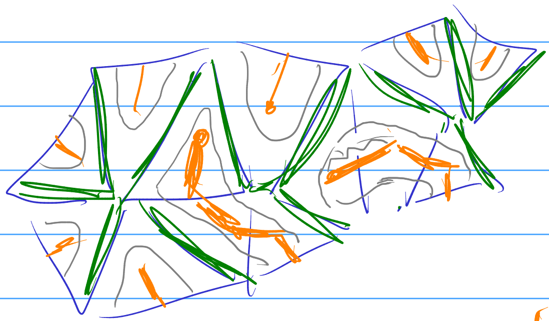




Нехай Δ – тріанг поверхні

Γ – максимальне піддерево в $\Delta^{(1)}$

T – дуальний граф



N(Γ) – 2 диск бо Γ-дерево

N(T) – "потовщення" графа T

≅ D^2 з полосками,

причому ∂N(T) = коло

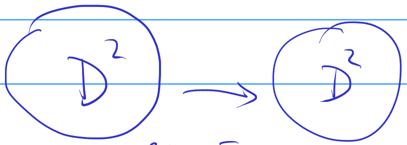
M гомеом $\frac{D^2 \text{ з полосками}}{N(T)}$, яке заклеєне 2-диском N(Γ)

причому ∂N(T) – коло

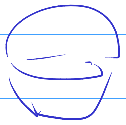
V – число вершин e – число ребер f – число граней M

Нехай k – число стрічок $\chi(M) = V - e + f \leq 2$

① k = 0



склеюємо по межі



$= S^2$

$\chi(M) = V - e + f = 2 \quad M \cong S^2$

бо Γ-дерево

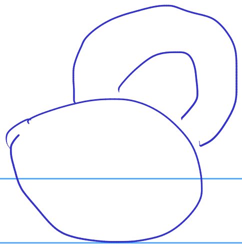
$\Gamma \quad V - e_0 = 1$

$T \quad f - (e - e_0) \leq 1$

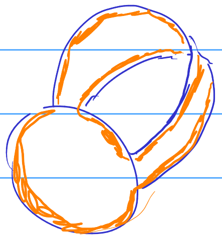
$V - e + f \leq 2$

$V - e + f + \boxed{k} = 2$

② $k=1$



– 2 коли мехі X



= Стрічка Мьобуса

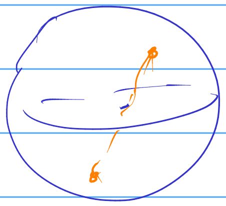
$M = Mö \cup D^2$

$v - e + f = 1$

M – називається проективна площина, $\mathbb{RP}^2$

$\mathbb{RP}^2$ – "множина всіх прямих в $\mathbb{R}^3$, які проходять через початок координат" + топологія

Модель 1



$S^2/$ розбиття на пари $\{\pm x\}$ антиподальних точок $= S^2/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^2$

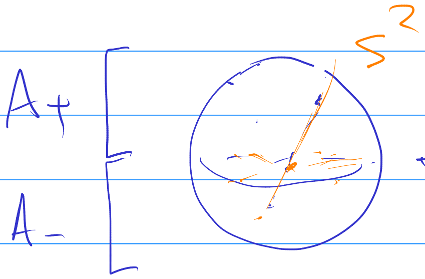
$\mathbb{Z}_2 \times S^2 \to S^2$

$\{\pm 1\}$

$(\varepsilon, x) \to \varepsilon x$

$S^2 \xrightarrow{p} S^2/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^2$

вводимо на $\mathbb{RP}^2$ фактор топол

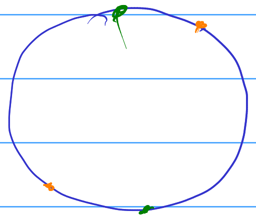


← екватор $\forall x \in A_+ \sim -x \in A_-$

$p(A_+) = \mathbb{RP}^2$

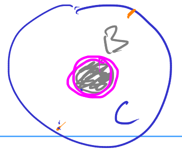
$\forall$ кожна пряма $\ell \subset \mathbb{R}^3$ $0 \in \ell$ перетинає A_+ по одній або 2-м точках, які лежать на екваторі

Модель 2 $A_+ \cong D^2$



$\mathbb{RP}^2 = D^2 / x \sim -x \in \partial D^2$

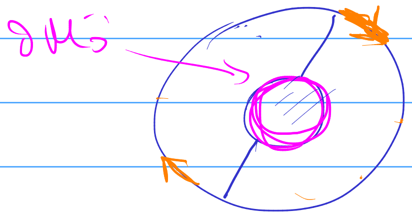
D^2

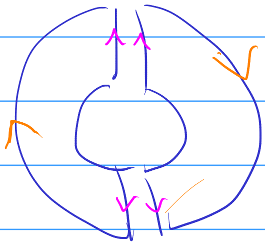


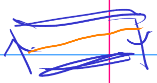
$\overline{D^2 \setminus B} = C$

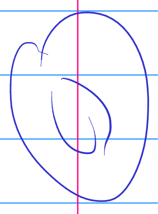
$C/\sim \; = Mö$

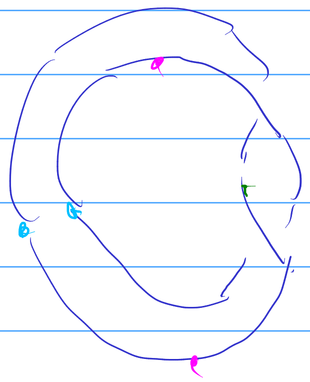
$C/\sim \; \cup B = \mathbb{RP}^2$

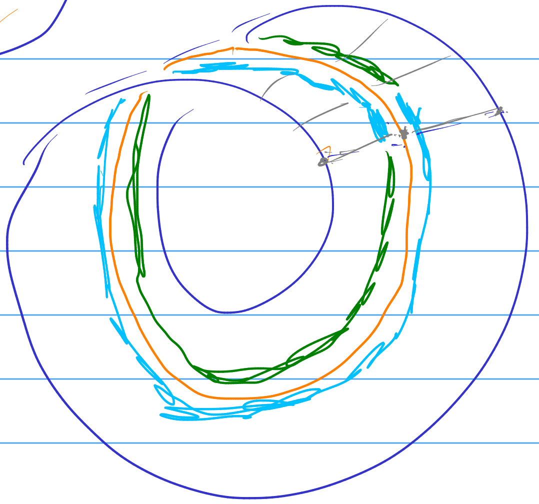












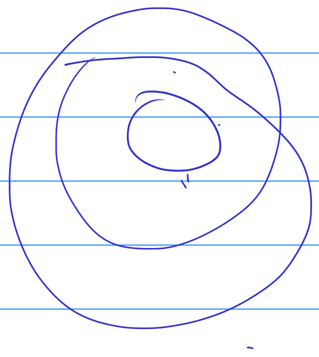
$S^1 \xrightarrow{f} S^1$

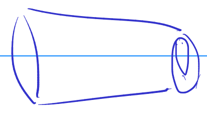
$z \to z^2$

$C(f) = S^1 \times [0,1] \cup S^1$

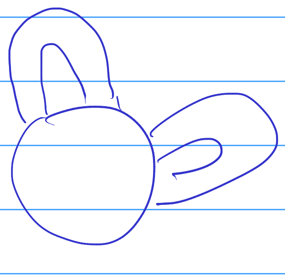
$/ \quad (z,1) \sim f(z)$

Mö

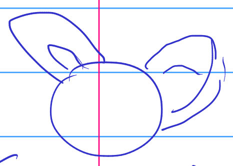




$\boxed{k=2}$

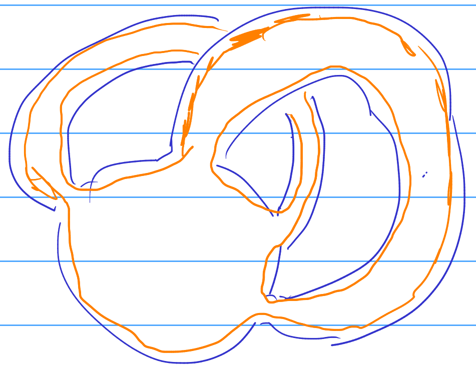


$-X$ 3-ком uexi



2 ком uexi

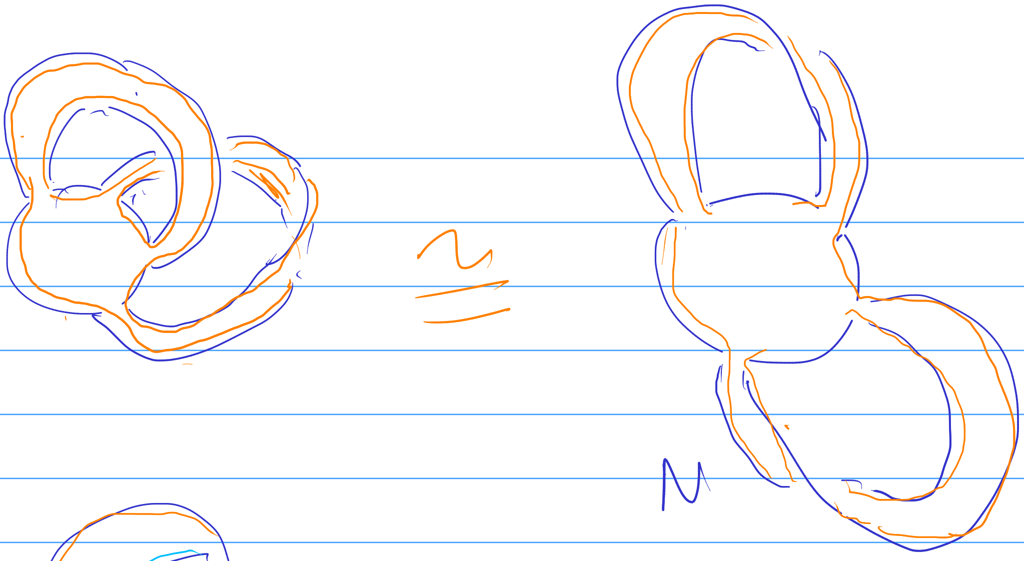
Top



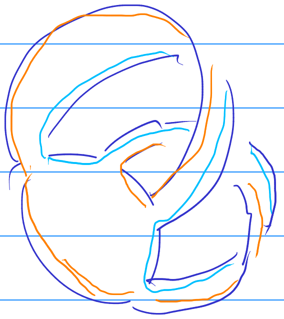
$\cup D^2 = T^2$

$\| $

$S^1 \times S^1$

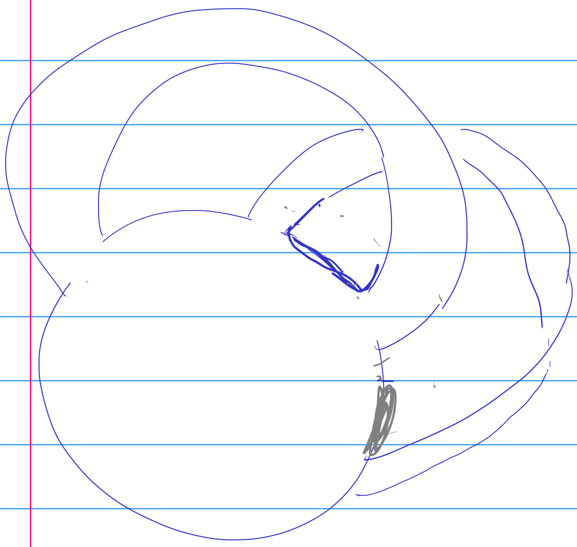


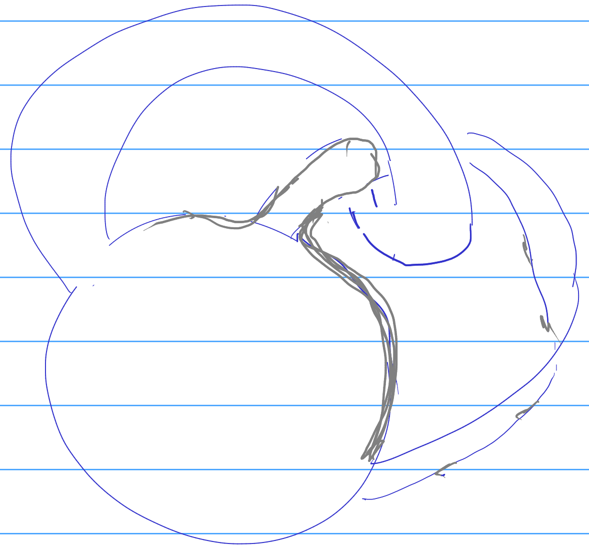
2 ком межі

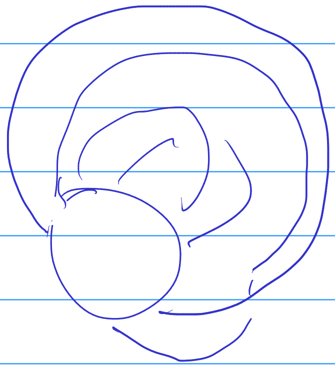


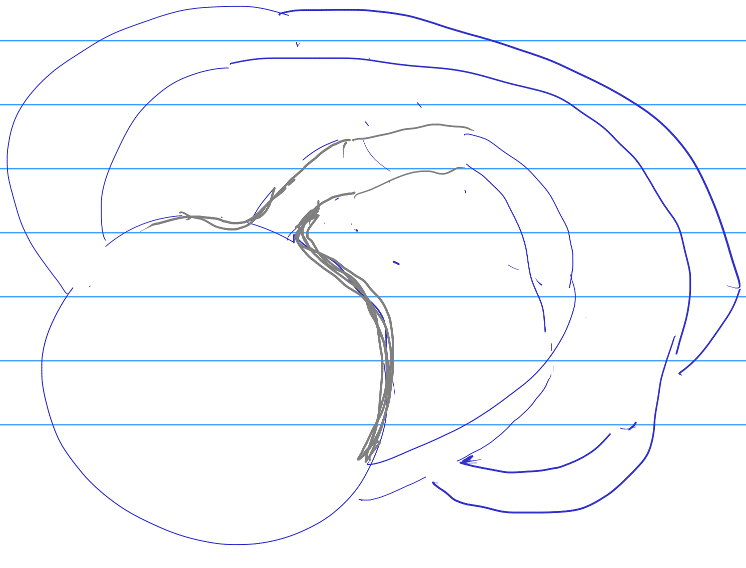
$N \cup D^2 = K$

пляшка Клейна



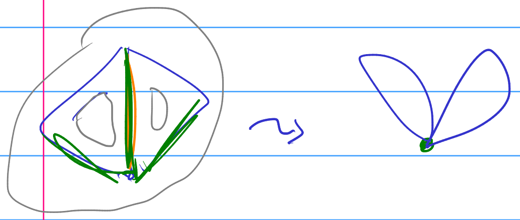


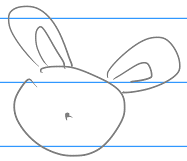




T — граф

$$\chi(T) = V - e = 1 - \overset{\operatorname{rank} H_1(T)}{\underbrace{\text{число}\ \overset{\text{лнз}}{\ }\ \text{циклів}}_{K}}$$





число ребер в
доповнені до
макс. піддерева
||
кількість полосок.