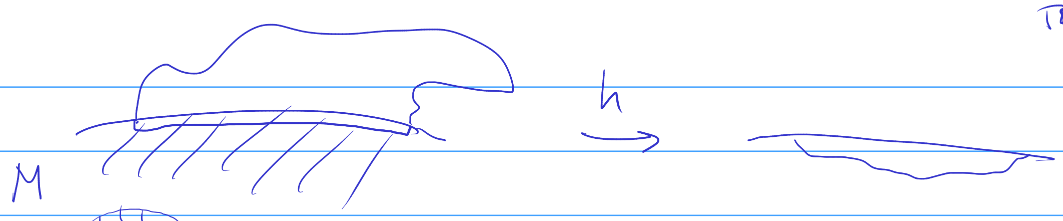
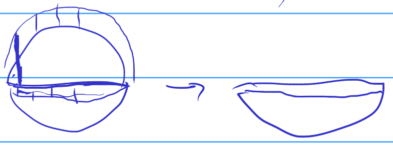
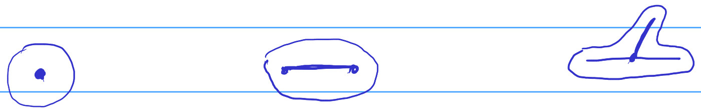
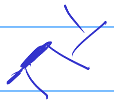
Т. Жордана-Шонфліса ⟹ Тріангуляція поверхонь ⟹ класифікація комп. поверхонь з точністю до гомеоморфізму.

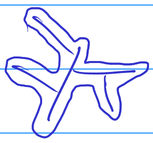


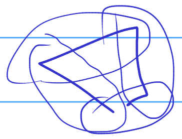


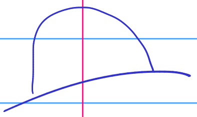
① Потовщення графів. — ε-окіл для достатньо малого ε

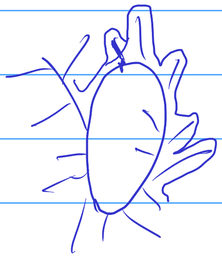


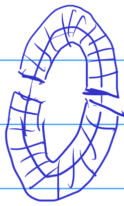
T-дерево з „лінійними" ребрами  в $\mathbb{R}^2$
то „потовщення" $N(T)$ гомеоморфне 2-диску



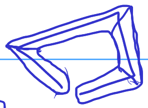


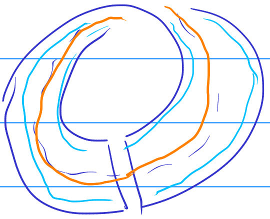


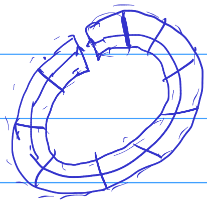




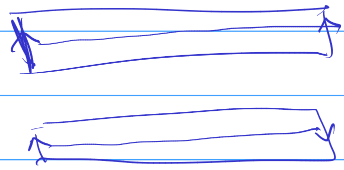
$\cong S^1\times[0,1]$





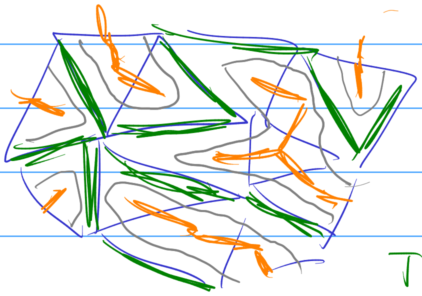


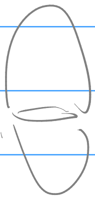
$S^1\times[0,1]$



Мб

$\mathbb{R}^3 \supset M$ тріанг. $M^{(1)} \supset T$ Γ





$= S^2$

M v e f

T v e_0

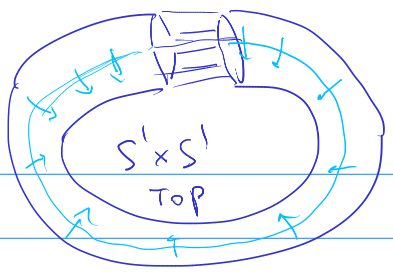
Γ f $e-e_0$

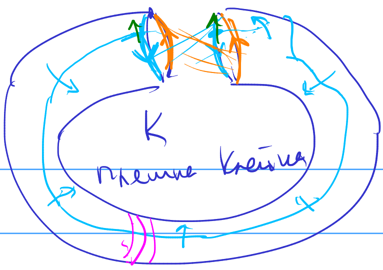
T-дерево $v-e_0=1$

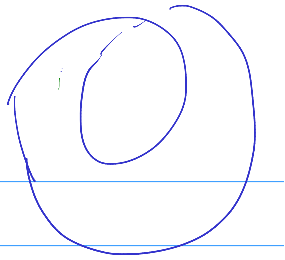
$M\setminus T \cong M\setminus$ точка
зв'язне

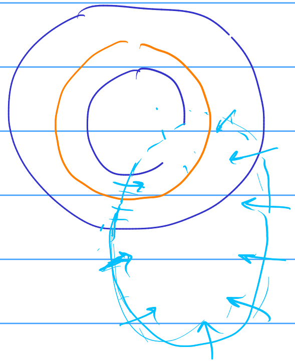
+ Γ-зв'язний граф $f-(e-e_0)\le 1$

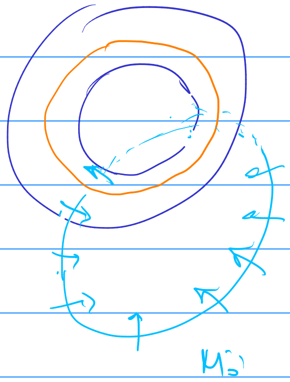
$\chi(M) = v-e+f \le 2$

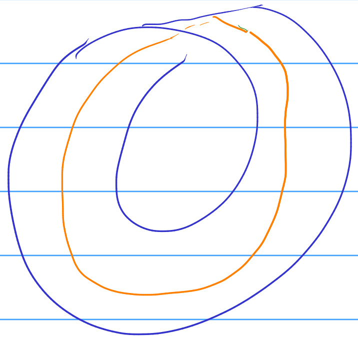










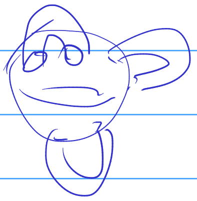


Теорема класифікації поверхонь

Нехай M – компактна поверхня

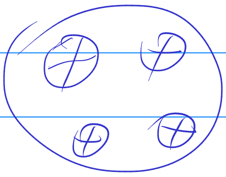
тоді виконане одне з тверджень

① $M = S^2 +$ приклейка g ручок $\qquad g \geq 0$

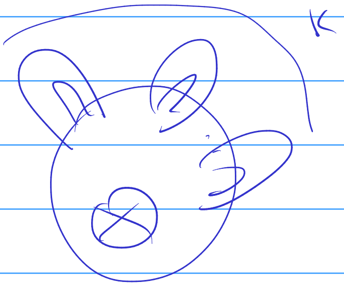


② $M = S^2$ вклеєно g стрічок Мьобіуса $\qquad g \geq 1$

$\partial \text{Mö} \cong S^1$



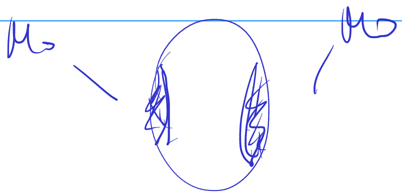
Пари стрічок Мьобіуса еквівалентні ручці.

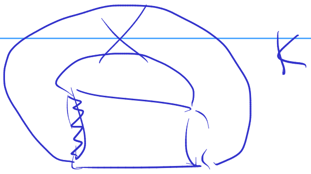


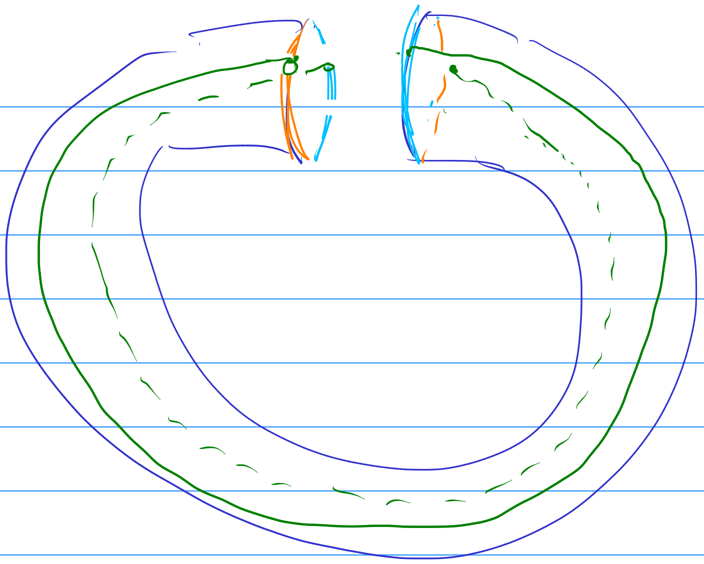
$g = 2k+1$

$g = 1$ – проект площ.

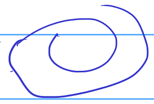
$g = 2$ – пляшка Кляйна





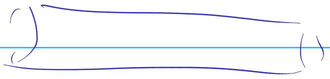


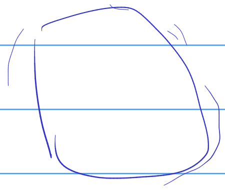
M – неорієнтовна <=> коли M містить стрічку Мьобіуса



комп.
M – Тріангулм $\partial M = \varnothing$

$$H_2(M, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & - M \text{ – орієнт} \\ 0 & \text{не орієнт} \end{cases}$$



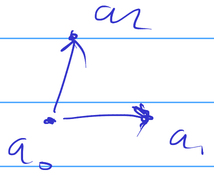


(не) орієнтовність rank $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$, кінці

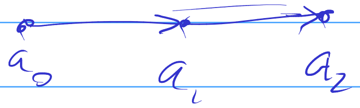
① ЛНЗ система точок в $\mathbb{R}^n$

$A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$

A – ЛНЗ, якщо вектори $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_k - a_0$ – ЛНЗ



ЛНЗ



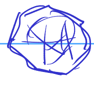
ЛЗ

Помітьте ЛНЗ не залежить від точки a_0

② $A \subset \mathbb{R}^n$ Опукла оболонка множ A – це

$$ch(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i t_i \;\middle|\; x_i \in A, \ \sum t_i = 1, \ t \in [0,1] \right\}$$

$0 \le t_i \le 1$

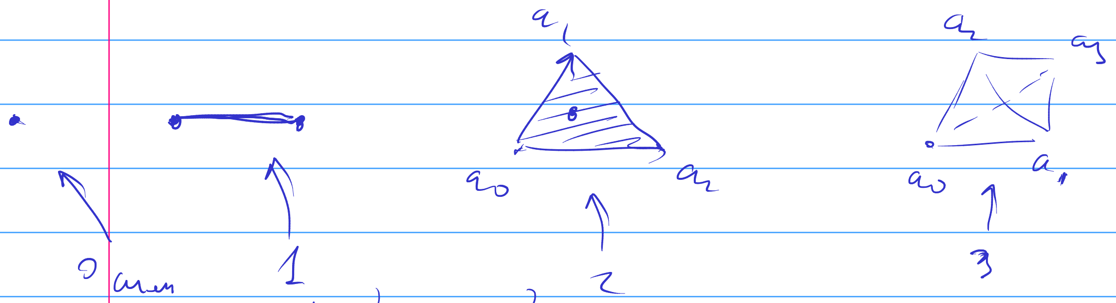


Convex hull of A

② Якщо $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ – ЛНЗ система в $\mathbb{R}^n$, то

$\boxed{k+1}$

ch(A) – називають k-симплексом



$A = \{a_0, \dots, a_n\}$

$$ch(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \;\middle|\; \sum t_i = 1 \quad t_i \in [0,1] \right\}$$

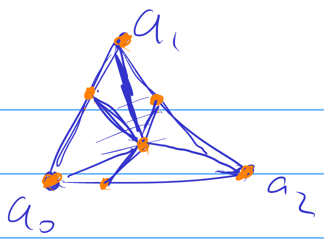
Лема A – ЛНЗ $\Leftrightarrow$ $\forall \ x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \in ch(A)$ числа $(t_0, \dots, t_n)$ визначені однозначно

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} t_i a_i = \sum_{i=0}^{n} s_i a_i}_{\Updownarrow} \qquad \sum t_i = \sum s_i = 1, \quad t_i, s_i \in [0,1]$$

$t_i = s_i \ \forall i$

$(t_0, \dots, t_n)$ – барицентричні координати т. X

Барицентричне підрозбиття симплекса

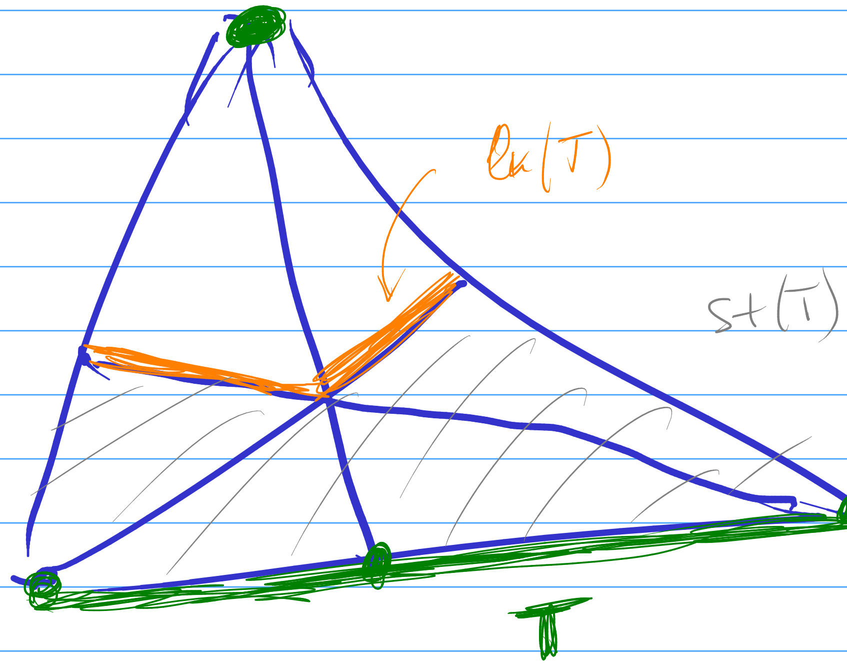


$A = \{a_0 \dots a_n\}$

$B \subset A$

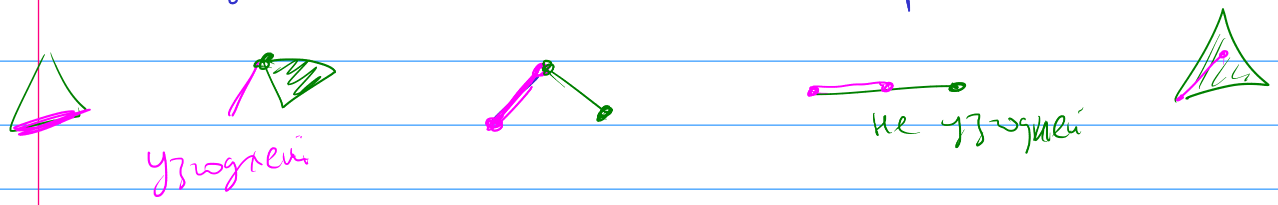
$\mathrm{ch}(B)$ – грань A

У внутрішності кожної грані виберемо точку



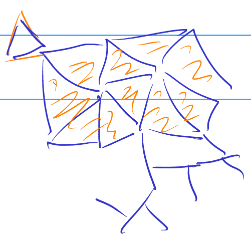
Тріангуляції і поліедри

Нехай $K, L \subset \mathbb{R}^n$ – два симплекси. K і L – узгоджені якщо $K \cap L$ є їх спільною гранню



- Нехай $\Delta = \{K_i\}_{i=1..m} \subset \mathbb{R}^n$ – мн-на симплексів

Δ називається тріангуляцією, якщо $\forall K, L \in \Delta$ є узгодженими

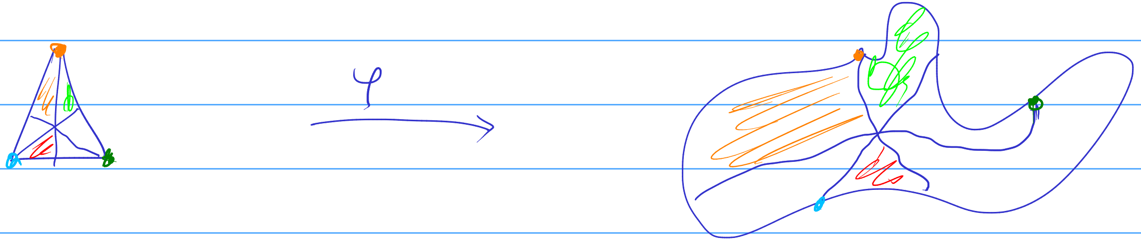


При цьому $\cup K_i = |\Delta|$ – носій тріангуляції

$A \subset \mathbb{R}^n$ назив **поліедром** якщо A є носієм деякої тріангуляції.

Нехай M – компактний зв'язний 2-многовид $\partial M = \varnothing$.

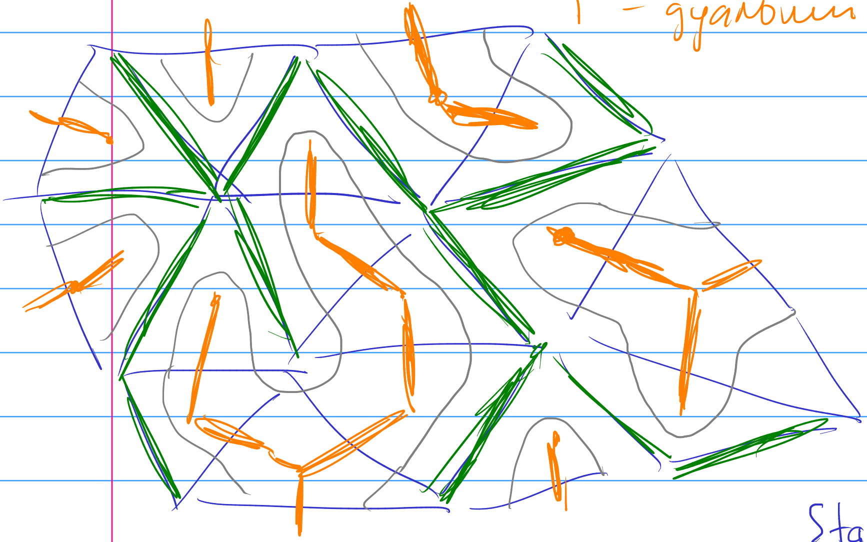
Тріангуляція M – це гомеоморфізм $\varphi : |\Delta| \to M$, де $|\Delta|$ – носій деякої тріангуляції Δ.

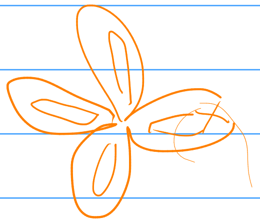


Класифікація

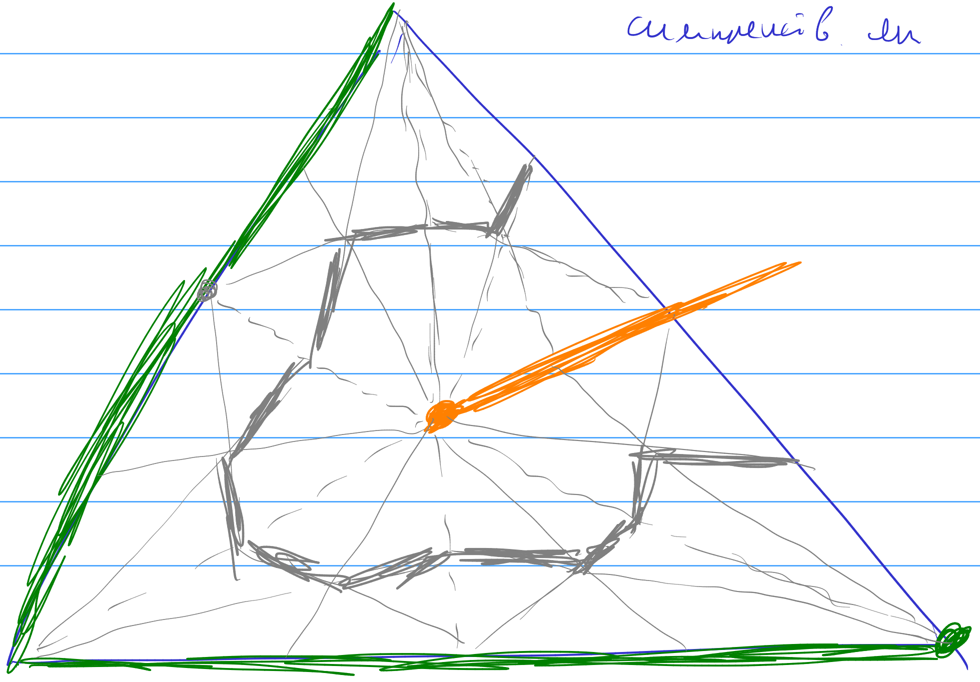
Γ – максимальне піддерево

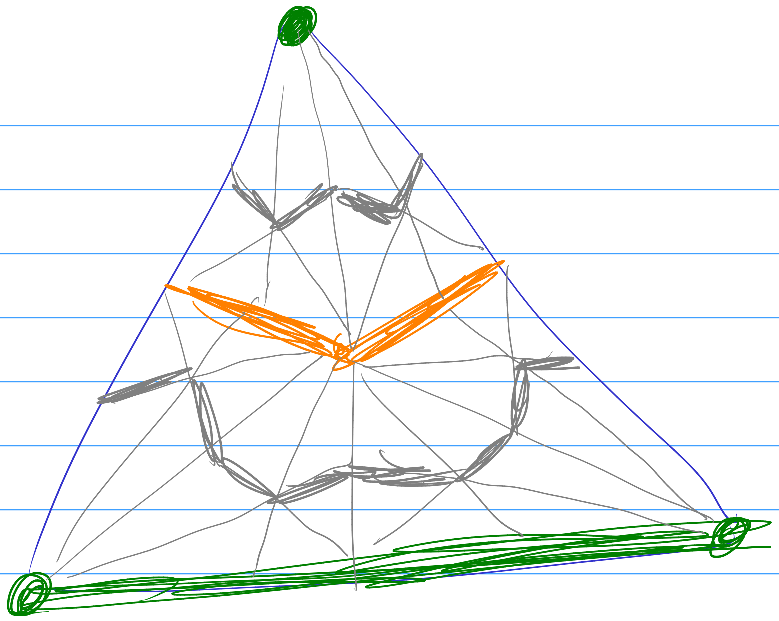
T – дуальний граф

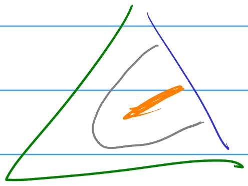


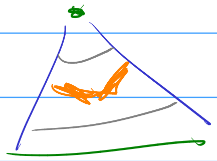


Star $|\Gamma|$ – об'єднання всіх симплексів [illegible]









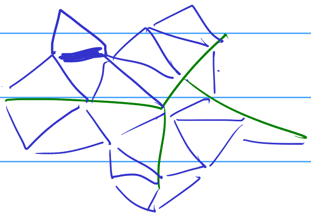
T — об'єднання деяких ребер триангуляції поверхні M

то "потовщення T" — зірка T відносно другого барицентричного підрозбиття M.

N(T)

Леми ① Якщо T — дерево, то N(T) гомеоморфне 2-диску

② Якщо T зв'язний граф і має єдиний цикл то N(T) гомеом. або $S^1 \times [0,1]$ або стрічці Мьобіуса.



Δ – триангуляция. $T \subset \Delta$ – подтриангуляция

$$st(T) = \bigcup_{\substack{\delta\in\Delta \\ \delta\cap T\neq\emptyset}} \delta . \qquad lk(T) = \bigcup_{\substack{q\in st(T) \\ q\cap T=\emptyset}} q$$