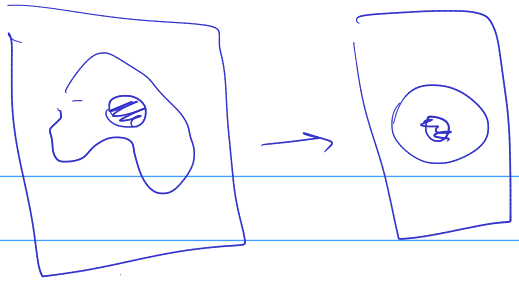
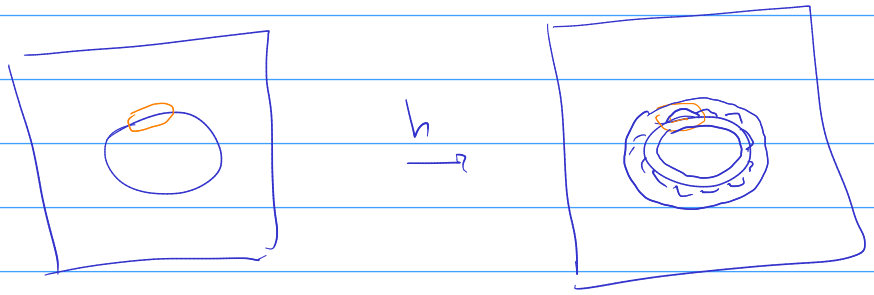
Теорема Жордана

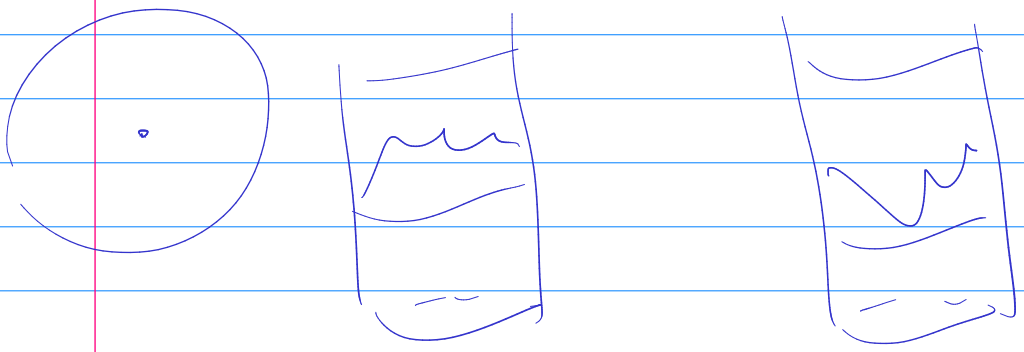
Теорема Жордана – Шонфліса



Тріангульовані поверхні

Класифікація поверхонь





Теорема Жордана

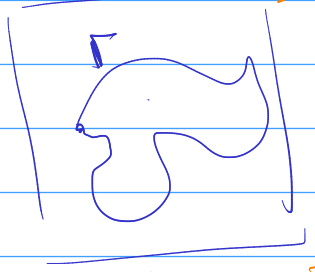
$\Gamma = \gamma(S^1)$

Нехай $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ ін'єктивне неперервне відображення (гомеоморфізм на образ = вкладення)

Тоді $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(S^1)$ має рівно 2 компоненти зв'язності, $C_1 \sqcup C_2$

при цьому $S^1 = \partial C_1 = \partial C_2$

$\overline{C_1} \setminus C_1 \quad \overline{C_2} \setminus C_2$

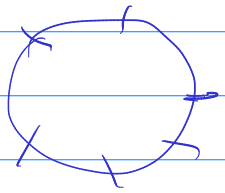


тоді $\gamma(S^1)$ - проста замкнена крива

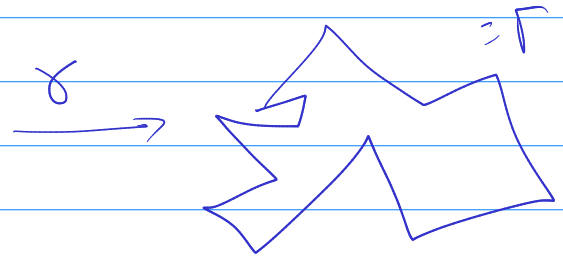
$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$

φ - неперер. $\Rightarrow$ локально постійна

$\Downarrow$ γ - ламана



$[0,1] \xrightarrow{\lambda(t) = t_2 e^{2\pi i t}}$



$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$

$\gamma \circ \lambda(t) = \{(a_i t + b_i,\ c_i t + d_i) \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$

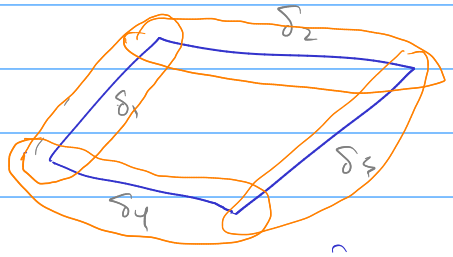
① Якщо γ - ламана, то $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ має не більше 2-х компонент зв'язності

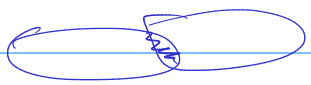
$N_\varepsilon^i = \{ z \in \mathbb{R}^2 \mid d(z, \delta_i) < \varepsilon \}$



N_ε

Γ розбиває кожну N_ε^i на 2 компоненти зв'язності $N_\varepsilon^{i,0}$ і $N_\varepsilon^{i,1}$





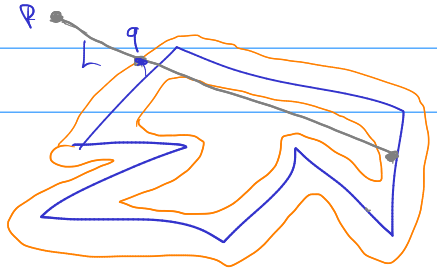
і $N_2 \bigcup_{i=1}^{n} N_\varepsilon^i$

$N_\varepsilon^{i,0} \cap N_\varepsilon^{i+1,0} \neq \emptyset$

$N_\varepsilon^{i,1} \cap N_\varepsilon^{i+1,1} \neq \emptyset$

$N \setminus \Gamma$ - має 2 комп. зв'язності N^0 та N^1

$\mathbb{R}^2 \ni p$



проведемо L

з'єднує p з Γ і бере участь

перший раз перетин $L \cap \overline{N}$

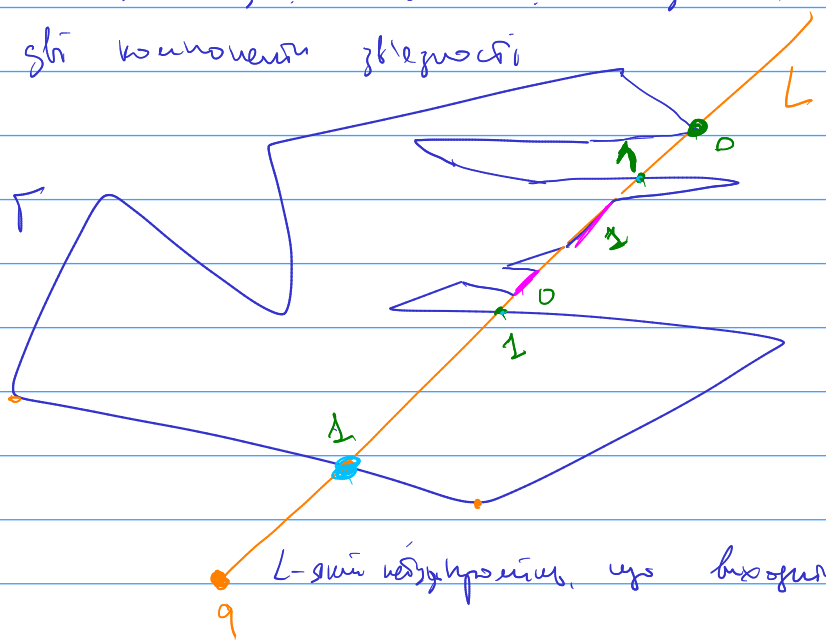
Нехай $q \in N^0$ або N^1

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ має не більше 2-х компонент зв'язності

K^i – компонента зв'язності $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, яка містить N^i

Тоді $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = K^0 \cup K^1$

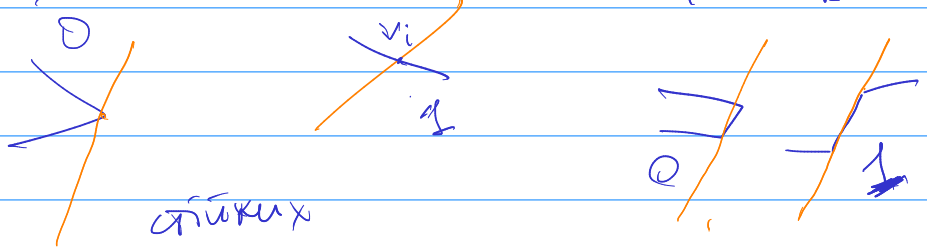
② Нехай Γ проста замкнена ламана. Тоді $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ має хоча б дві компоненти зв'язності



$q \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ L-який невиродж. що виходить з $\Gamma - q$

$L \cap \Gamma =$ вершини γ $\cup$ внутр. точки ребер $\cup$ ребер Γ

$v_1 \dots v_n$ $e_1 \dots e_k$

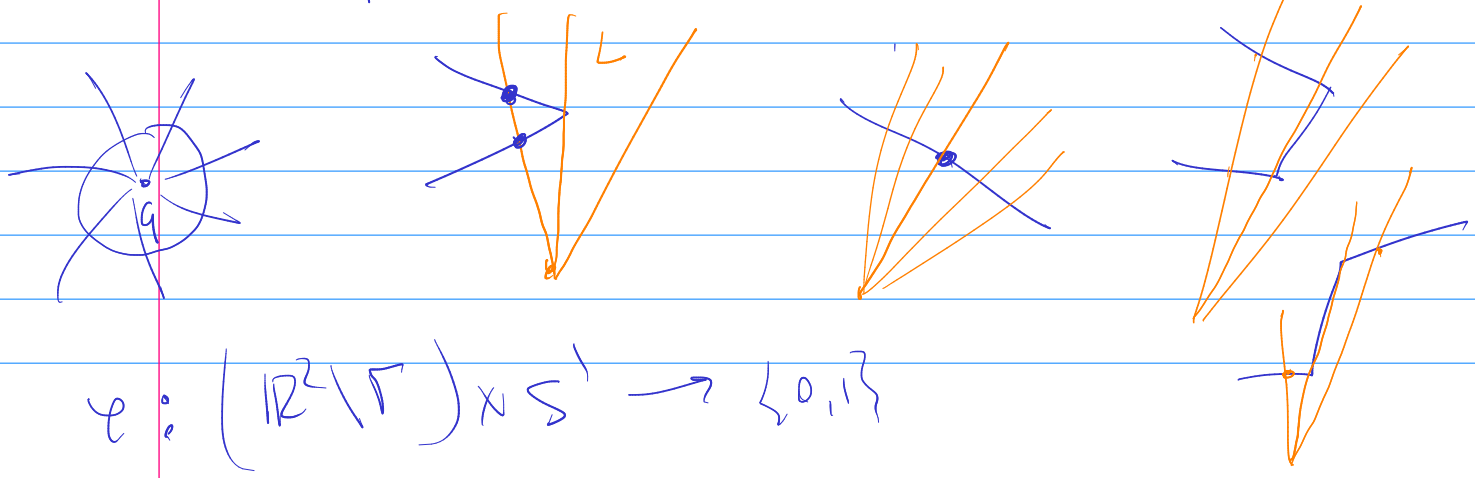


стійких

$q \to \varphi(q) =$ число перетинів $\mod 2$

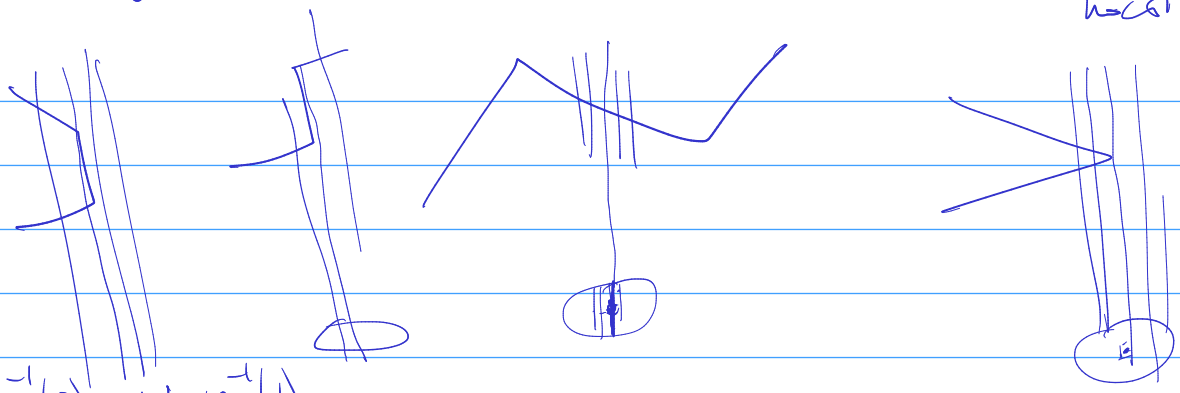
Властивості φ:

① $\varphi(q)$ не залежить від L



$\varphi : (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma) \times S^1 \to \{0,1\}$

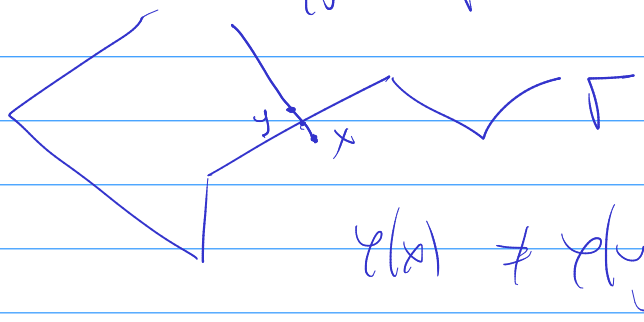
② $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \to \{0,1\}$ – [кількість] = локально постійна



$X = \varphi^{-1}(0) \sqcup \varphi^{-1}(1)$.

Тобто φ постійне на компонентах зв'язності $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$

③ Є точки $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$: $\varphi(x) \neq \varphi(y)$



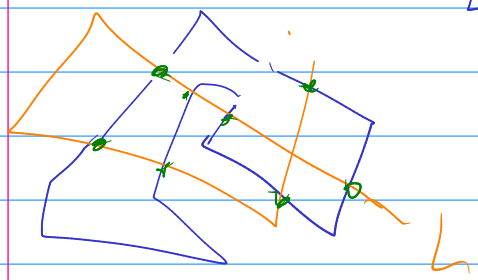
$\varphi(x) \neq \varphi(y)$

Тому φ – сюр'єктивна на біжі $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ має хоча б 2 компоненти зв'язності.

Γ – цикл в $C_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}_2)$

Індекс: $C_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}_2) \times C_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$

Γ L



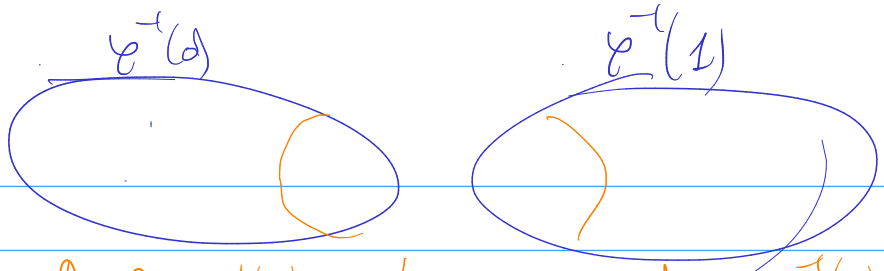
$\mathbb{R}^2$

$\sum \delta_i$

(25)

$\Gamma : C_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$

$\Gamma \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}_2)$



$A_0 = A \cap \varphi^{-1}(0) \neq \emptyset$ $\quad$ $A_1 = A \cap \varphi^{-1}(1) = \emptyset$

$A = A_0 \cup A_1$ і A_0 A_1 – відкрито-замкнені в A

$\Rightarrow$ бо A_0 і $A_1 \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ – незв'язна

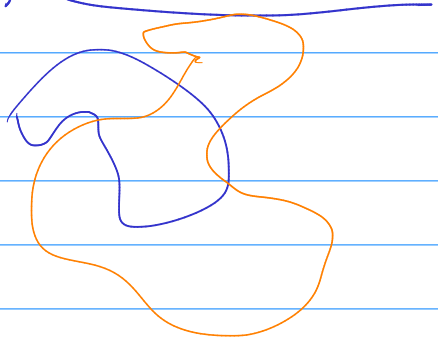
Теорема Жордана – Шенфліса.

Нехай $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^2$ два простих замкнених кривих

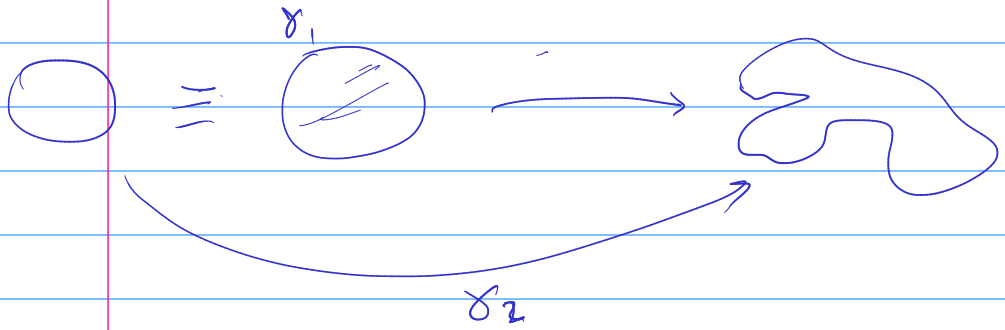
Нехай $h : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ – довільний гомеоморфізм $\quad \Gamma_i = \gamma(S^1)$

Тоді h продовжується до гомеоморфізму

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

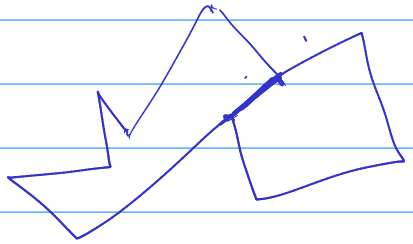


$\gamma_1 : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^2$

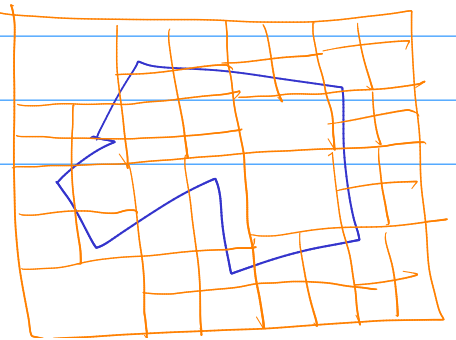


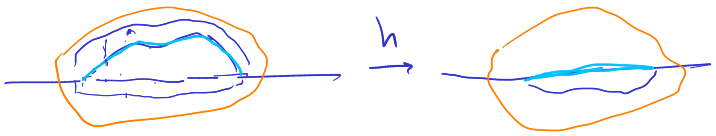
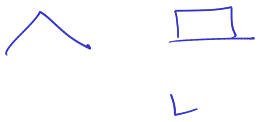
$\Downarrow$ Для ламаних – несладно

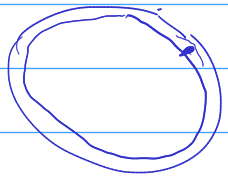
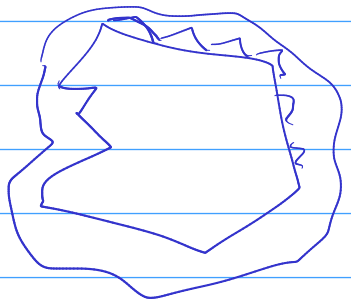
по індукції по числу ланок



Для неперервних кривих



$h(x) = \lim_{i\to\infty} h_i(x)$

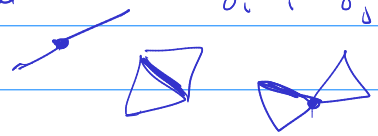
Триангуляція поверхонь.

2-Поліедр в $\mathbb{R}^N$ – це об'єднання (скінченої кількості) 2-симплексів

2 поліедр P – поверхня, якщо він є многовидом

$\forall x \in P$ є окіл гомеом. $\mathbb{R}^2$

$\delta_i \cap \delta_j$ – спільна грань δ_i і δ_j





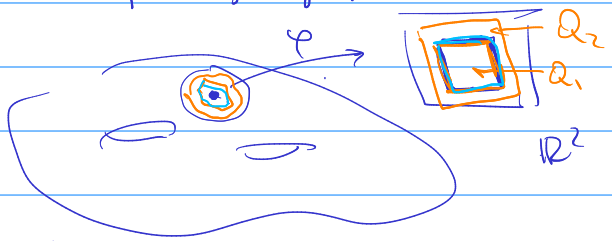


Триангуляція поверхні S – це гомеоморфізм $\varphi: P \to S$, де P – поліедр.

Теорема $\forall$ компактна поверхня S має триангуляцію.

$\Downarrow$ $\forall x \in S$ є окіл гомеом. $\mathbb{R}^2$

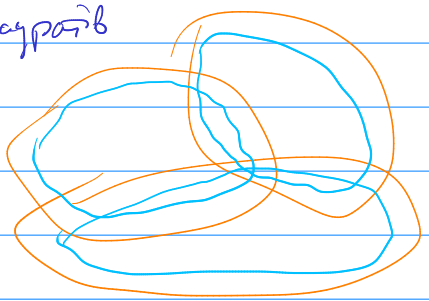
гомеом квадрату



Оскільки S – компактне то є скінчене число

$Q_1^i \subset Q_2^i \xrightarrow{\varphi_i}$  – пари квадратів

$\bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{int} Q_1^i = S$



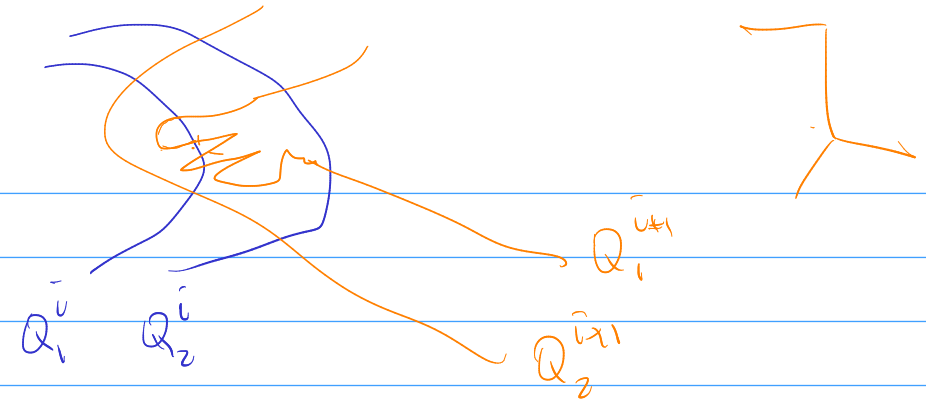
$x \in U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2$

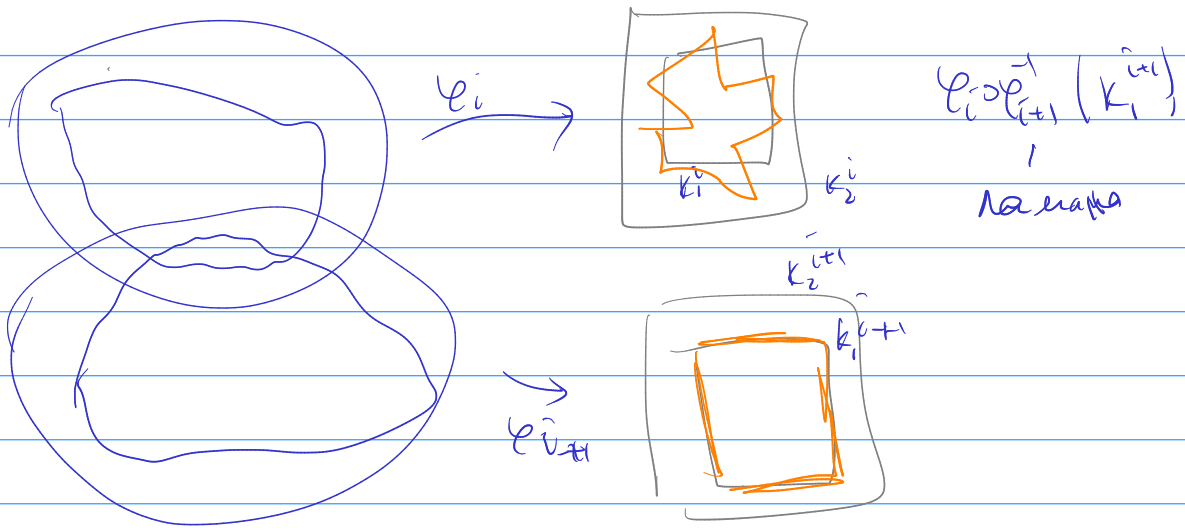
$\varphi(x) = 0$



$Q_1 = \varphi^{-1}(K_1)$

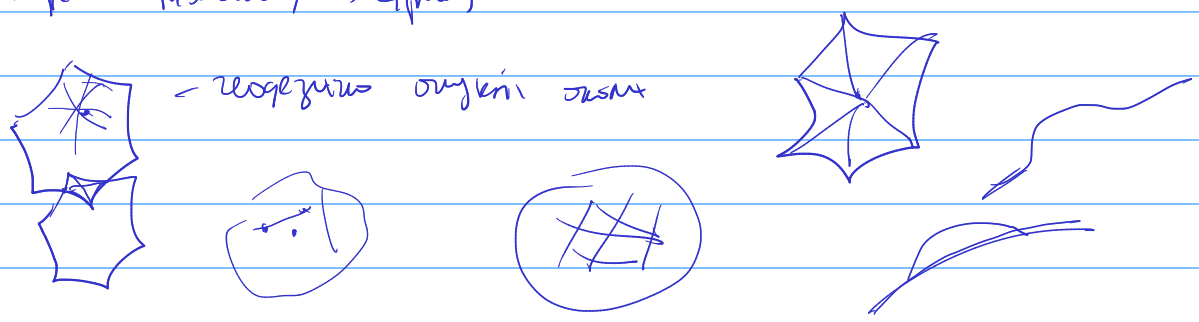
$Q_2 = \varphi^{-1}(K_2)$





Якщо ш S має гладку структуру
Фіксуємо гладкову метрику на S

- теорема опуклої оболонки

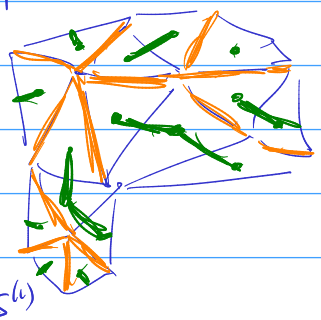


Класифікація поверхонь.

Нехай S_1 S_2 – компактні поверхні

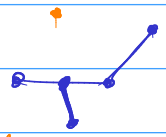
із теореми про триангуляцію $\Rightarrow$ S – склеєне з трикутників

S – v – вершин, e – ребер f – граней



$S^{(1)}$ – 1-скелет S – об'єднання всіх ребер – граф

[Нехай T – максимальне піддерево в $S^{(1)}$
v – вер. і e_0 – ребер



$v - e_0 = 1$

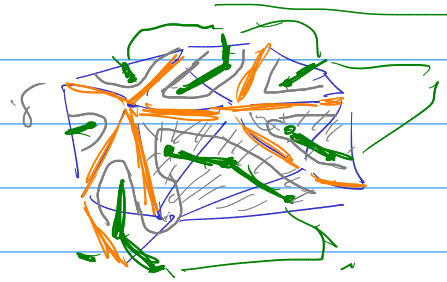
← ейлерова характеристика

Нехай Γ – двоїстий граф до T

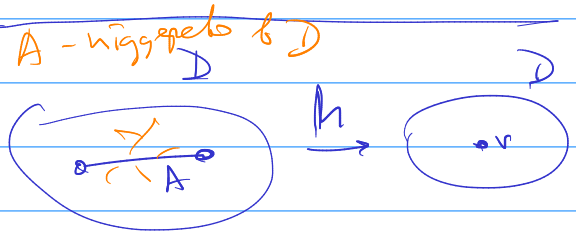
Γ має f вершин $e - e_0$ ребер

① Γ – зв'язний, навіть більше Γ є деф. ретракт $S \setminus T$

$S \setminus T$ гомеом. $S \setminus$ точка



A – піддерево в D



$h(A) = v$

$h|_{D \setminus A} : D \setminus A \to D \setminus v$

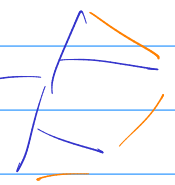
гомеоморфізм

Γ – зв'язний

вер. – ребра ≤ 1

Γ – зв. граф $f - (e - e_0) \leq 1$ | +

T – дерево $v - e_0 \geq 1$

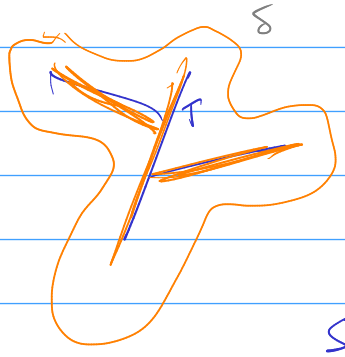


$v - e + f \leq 2$

ейлерова характеристика S

① При чём Γ - дерево $f - (e - e_0) = 1$

$\chi(S) = 2$



Пусть δ - кривая = лента "регулярно около T"
U

U - 2-диск

$S \setminus U$ — тоже Γ-дерево по $S \setminus U$-диск
V

$S = U \cup V$ — два диска із сильного места

$S \simeq S^2$ - 2 сферы.