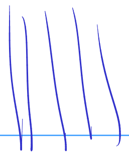
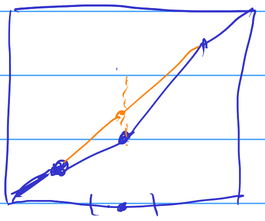
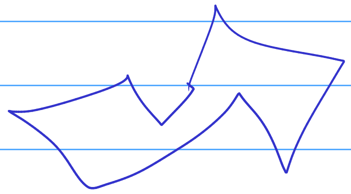
Jordan - Schoenflies theorem

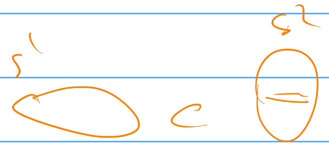
① Ομοιομορφισμοί
② Πολύγωνα





① Για πολύγωνα

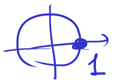


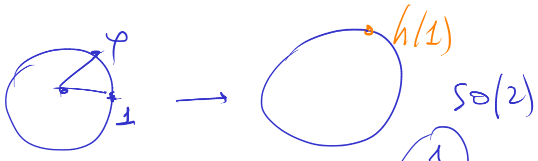


$$\boxed{H_2 S^1} \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_2 S^2}} \to \overset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\overset{\parallel}{H_2(S^2 S^1)}} \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_1(S^1)}} \to \boxed{H_1 S^2}$$

$$\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{\tilde{H}_0(S^2 \setminus S^1)}} = \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{\underbrace{H^{2-0-1}(S^1)}}}$$

$S^1 = \{ |z| = 1 \}$





$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^+(S^1,1) \arrow[r] & \mathcal{H}^+(S^1) \arrow[r, "p"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} h \arrow[r] & h(1) \arrow[l, bend left, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

поворот на φ $\quad \varphi \in S^1$

$\Rightarrow \mathcal{H}^+(S^1) \cong \mathcal{H}^+(S^1,1) \times S^1$

$\mu(g,x) = g\cdot x$

$G \times X \xrightarrow{\mu} X$

ліва дія, якщо:

① $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$

② $g\cdot(h\cdot x) = (gh)\cdot x$

$\mathcal{H}^+(S^1) \times S^1 \to S^1$

$(h, z) \to h(z)$

$(id, z) \to id(z) = z$

$(g,(h,z)) \to (g, h(z)) = gh(z)$

$1 \in S^1 \quad Stab(1) = \{ h \in \mathcal{H}^+(S^1) \mid h(1) = 1 \}$

$\overset{\parallel}{\mathcal{H}^+(S^1,1)}$

$Orb(1) = S^1$ "Транзитивна дія"

$S(x) = \{ g \in G \mid gx = x \}$ підгрупа

$O(x) = \{ gx \mid g \in G \} \subset X$

$g \to gx$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & O(x) \\ G/S(x) \arrow[ru] & \end{tikzcd}$$

$g \searrow \quad g\cdot S(x)$

Теорема біекція

$hx = x$

$g\,S(x) \Rightarrow g\underbrace{h(x)}_{x} = g(x)$

$$\boxed{S \hookrightarrow G \to G/S}$$

в кожному сум. класі

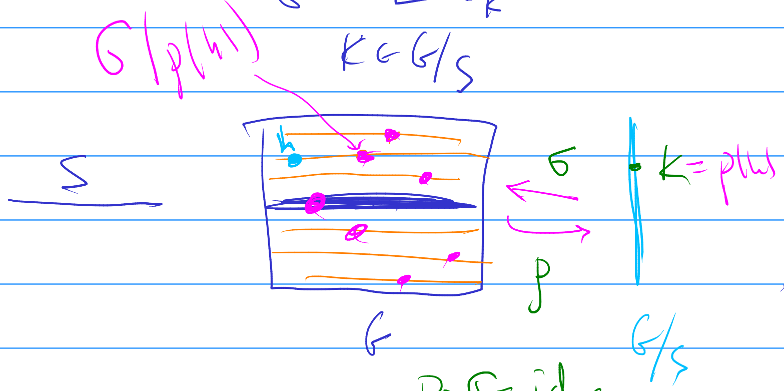
$gS = K$

виберемо один елемент

x_K

$G = \bigsqcup x_K S$

$K \in G/S$



$p \circ \sigma = id_{G/S}$

σ – "переріз" p

section

$G \cong S \times G/S$

$\sigma(K) = x_K$

$S \times G/S \xrightarrow{\zeta} G$

$g \quad K \Longrightarrow \sigma(K)\cdot g$

$\left((\sigma p(h))^{-1} \cdot h \;,\; \underset{\overset{\parallel}{[h]}}{p(h)} \right) \longleftarrow h$

Лема

Припустимо, що $S, G, G/S$ - локал. простори і p. G-непер.

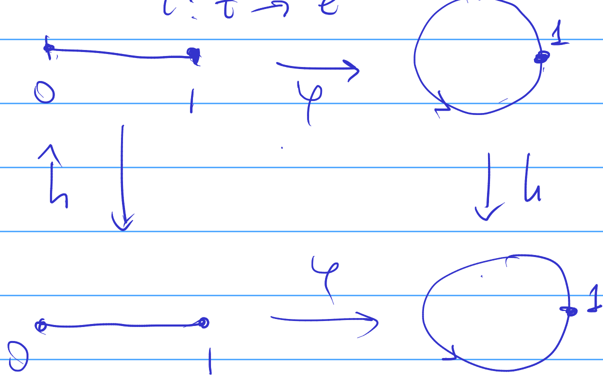
Тоді біекція η і η^{-1} є неперервними

тобто η - гомеоморфізм.

$$\mathcal{H}^+(S^1) = \mathcal{H}^+(S^1, 1) \times S^1 \simeq \overbrace{\mathcal{H}^+(I)}^{\text{стягувана}} \times SO(2) \simeq id_I \times SO(2)$$

сепр

$\varphi : t \to e^{2\pi i t}$



$\varphi : (0;1) \to S^1 \setminus 1$

гомеоморфізм

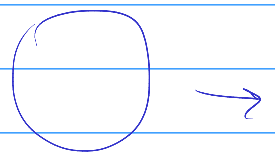
$$\left.\begin{aligned} \hat{h}\big|_{(0,1)} &= \varphi^{-1} h \varphi \\ h &= \varphi \hat{h} \varphi^{-1} \end{aligned}\right\} \text{на } (0;1)$$

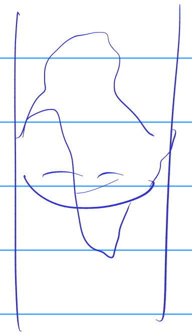
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^+(I) & \xleftrightarrow[\text{груп}]{\text{ізоморфізм}} & \mathcal{H}^+(S^1, 1) \\ \hat{h} & & h \end{array}$$

$f : S^1 \to \mathbb{R}$

$\Gamma_f = \{ (z, f(z)) \mid z \in S^1 \} \subset S^1 \times \mathbb{R}$

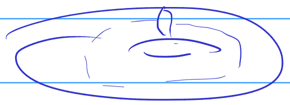
$\boxed{TS^1} =$





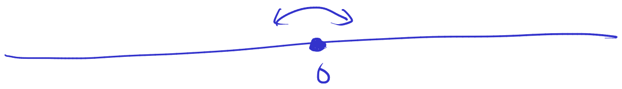
$f : S^1 \to S^1$

$\Gamma_f \subset S^1 \times S^1$



$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\{\pm 1\}$



id -id

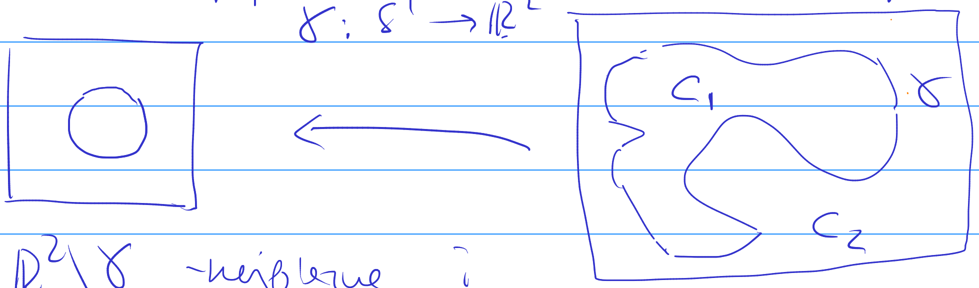
$(\varepsilon, t) = \varepsilon \cdot t$

$\mathrm{orb}(0) = \{0\}$ $\mathrm{orb}(2) = \{\pm 2\}$

① Теорема Жордана про криву Jordan

② Теорема Жордана-Шонфліса Shoenflies

Нехай $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ - проста замкнена крива (тобто образ неперервного ін'єктивного відображення $\gamma: S^1 \to \mathbb{R}^2$



Т. Жордана Тоді ① $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ - незв'язне і має рівно 2 компоненти зв'язності C_1 і C_2

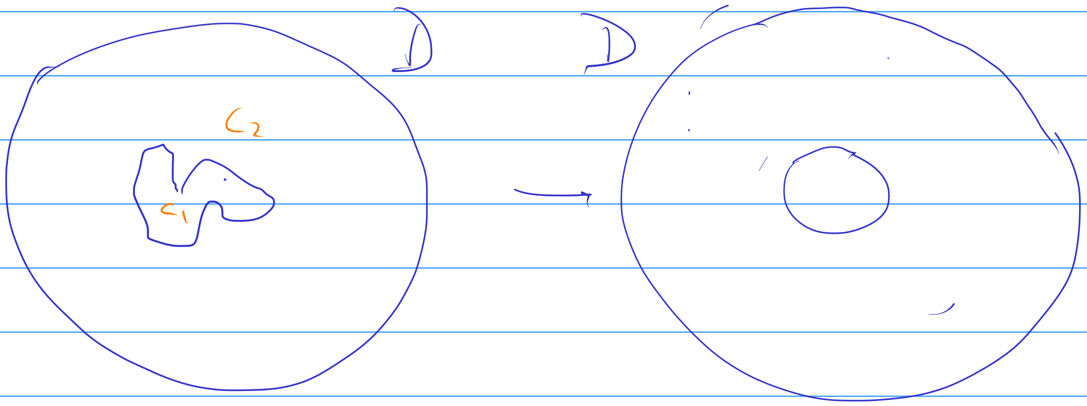
← обмежена

Т. Шонфліса ② $\exists$ гомеоморфізм $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що

* $h(\gamma) = S^1$ одиничне коло

(**) якщо $D \subset \mathbb{R}^2$ круг такий, що $D \supset S^1 \cup C_1$

то можна вважати, що h нерухоме на $\mathbb{R}^2 \setminus D$

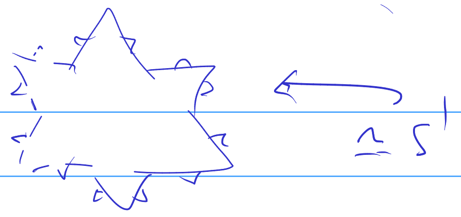


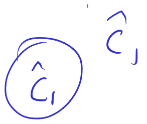
$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ гомеом.

$h(\gamma) = S^1$

$h(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma) = \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ - гомеоморф

комп. зв → комп. зв.

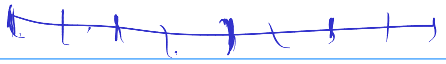




$-2 \; -1 \; 1 \; 2$

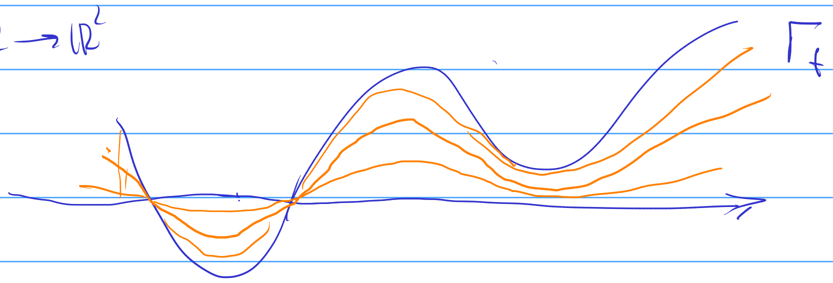
Сніжинка Коха

$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ $\quad \Gamma = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow [0 \;\; 1]$



① Нехай $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна $\quad \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

$\Gamma_f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



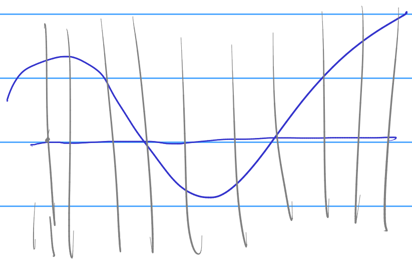
Задача 1 Побудувати гомеоморфізм $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$ такий, що $h(\Gamma_f) = OX$.

$\Gamma_f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \sim \Gamma_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$H: \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad H(x,t) = (x, (1-t)f(x))$

$H: \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad H(x,y,t) = (x, (1-t)f(x) + y)$

$$\boxed{h(x,y) = (x, y + f(x))}$$

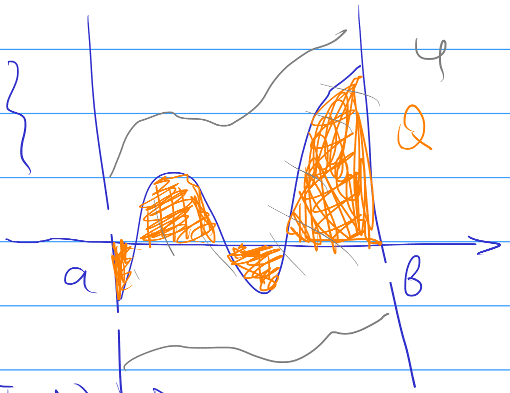


Задача 2

Нехай $f: [a b] \to \mathbb{R}$

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a b]\} \subset [a b] \times \mathbb{R}$

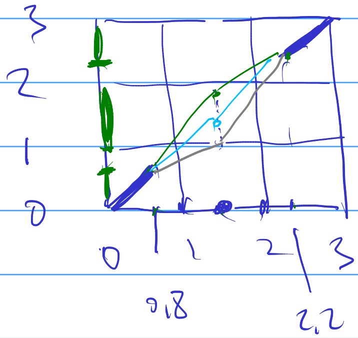
$$Q = \begin{cases} x \times [0; f(x)] & f(x) > 0 \\ x \times [f(x), 0] & f(x) \leq 0 \end{cases}$$



Нехай U - окіл Q в $[a b] \times \mathbb{R}$

Побудувати $h: [a b] \times \mathbb{R} \to [a b] \times \mathbb{R}$

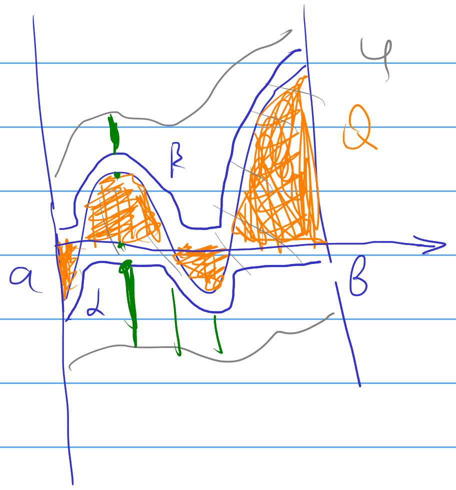
- $h(\Gamma_f) = [a b] \times 0 = \Gamma_0$
- h нерухомий на $[a b] \times \mathbb{R} \setminus U$



Побудувати сім'ю гомеоморф

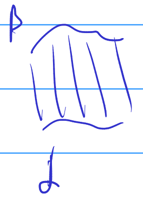
$F: [0,3] \times [1,2] \to [0,3]$

- $F_t: [0 3] \to [0,3]$ - гомеоморф
- $F_t(1.5) = t$
- F_t нерух на $[0, 0{,}8] \cup [2{,}2 \; 3]$



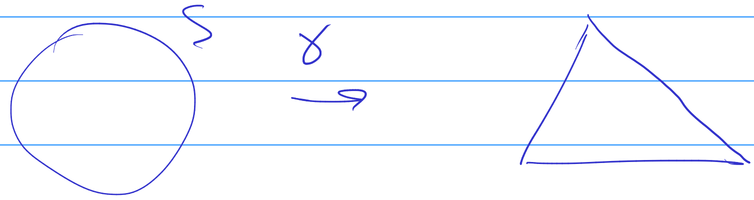
$\alpha = \min\{0, f\} + \varepsilon$

$\beta = \max\{0, f\} + \varepsilon$

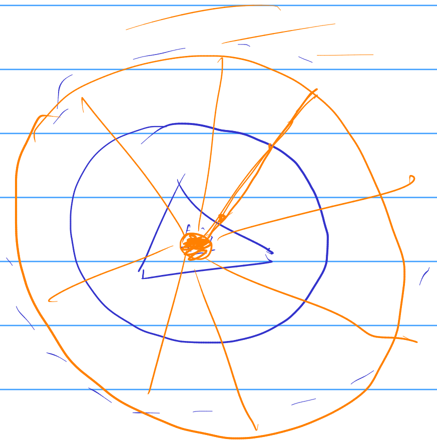
ε маленьке що  $\subset U$

Теорема Жордана-Шонфліса для ламаних

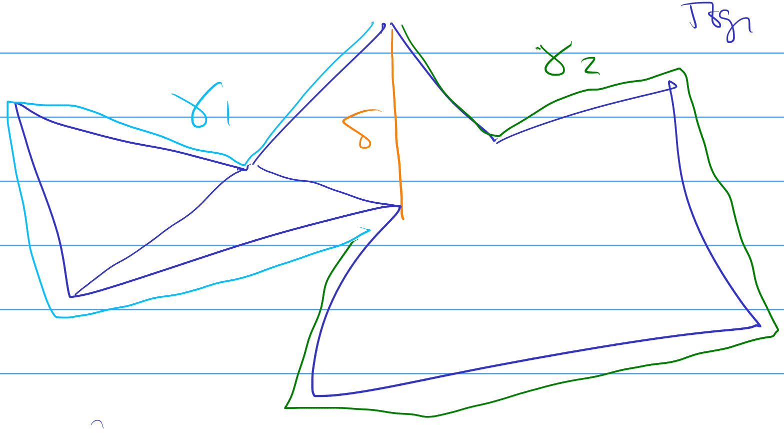
① Нехай $\gamma: S^1 \to \mathbb{R}^2$ — трикутник



Тоді теорема "нескладна"



② Нехай $\gamma: S^1 \to \mathbb{R}^2$ — ламана з n ланками



Тоді γ можна розбити відрізком δ на 2 частини γ_1 і γ_2

Такі, що ламані $\delta \cup \gamma_1$ і $\delta \cup \gamma_2$ мають менше ніж n ланок