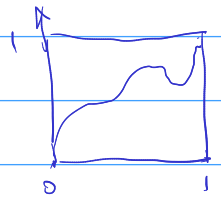
Многовиди розмірності 1.

Теорема X - зв'язний компактний многовид, $\dim X = 1$. Тоді X гомеоморфний або $[0,1]$ або колу $S^1 = \{x^2+y^2=1\}$

Група гомеоморфізмів $[0,1] = I$ $\quad H(I)$

$f: I \to I$ - гомеоморфізм - неперервна бієкція, така, що f^{-1} - неперервна.

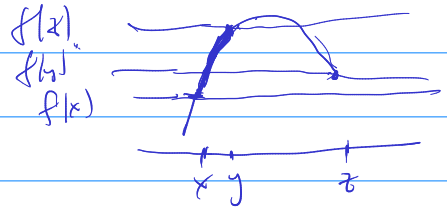


$f: I \to I$

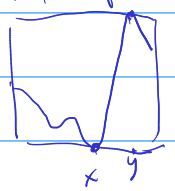
1) Коли $f: I \to I$ неперервне ін'єктивне $\Leftrightarrow$ монотонне $\quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

монот $\to$ ін'єктивна сл

якщо не монот $\quad x < y < z \quad f(x) < f(y) > f(z)$



② Коли $f: I \to I$ - неперер. сюр'єктивне

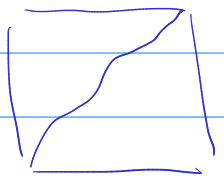


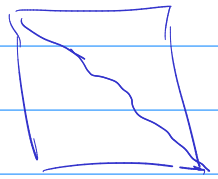
$\exists\, x, y \in I \quad f(x)=0 \quad f(y)=1$

③ Нехай $f: I \to I$ - неперервне відображення. Тоді наст. умови еквів

① f-гомеоморфізм

② f - монотонне, або $f(0)=0$ і $f(1)=1$, або $f(0)=1$ $f(1)=0$

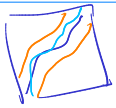




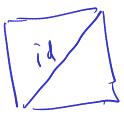
$H(I)$ - група гомеоморфізмів $I \quad < C(I,I)$

рівномірна топологія

$d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x)-g(x)|$



$id_I,\ q : I \to I$ $\quad id_I(x) = x$ $\quad q(x) = 1 - x$





$$q \circ q(x) = q(1-x) = 1 - 1 + x = x$$

$$\langle q \rangle = \{ id_I, q \} = \mathbb{Z}_2 \subset \mathcal{H}(I)$$

Теорема $\langle q \rangle$ є сильним деформаційним ретрактом $\mathcal{H}(I)$

Зокрема, вкладення $\langle q \rangle \subset \mathcal{H}(I)$ є гомотопічною еквівалентністю.

$\mathcal{H}(I)$ має дві компоненти зв'язності $\mathcal{H}^+(I)$, $\mathcal{H}^-(I)$

зростаючі, спадаючі

і ці компоненти зв'язності — стягувані

$$F : \mathcal{H}(I) \times [0,1] \to \mathcal{H}(I) \qquad id(x)$$

$$F(h,t)(x) = \begin{cases} h(x)(1-t) + x \cdot t & h \text{ - зрост.} \in \mathcal{H}^+(I) \\ h(x)(1-t) + (1-x)t & h \text{ - спад} \in \mathcal{H}^-(I) \end{cases}$$

$q(x)$

$F_0 = id_{\mathcal{H}(I)}$

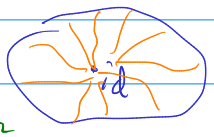
$F_t(id) = id \quad F_t(q) = q$

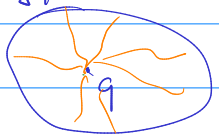
$F_1(\mathcal{H}^+) = id$

$F_1(\mathcal{H}^-) = q$

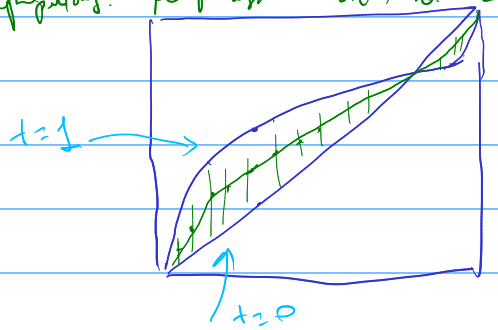
$h \sim id$

$h \sim q$





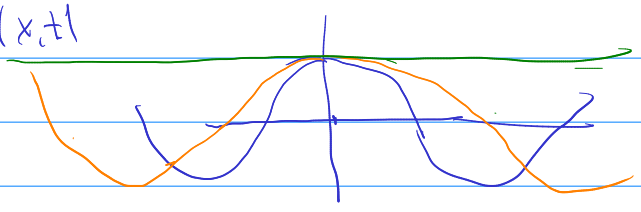
F - сильна деформ. ретракція $\mathcal{H}(I)$ на $\mathbb{Z}_2$



Означення Нехай X, Y топ. прост. Тоді кожне неперервне відображення $F : X \times [0,1] \to Y$ називається гомотопією

$t \in [0,1] : F_t : X \to Y \qquad F_t(x) = F(x,t)$

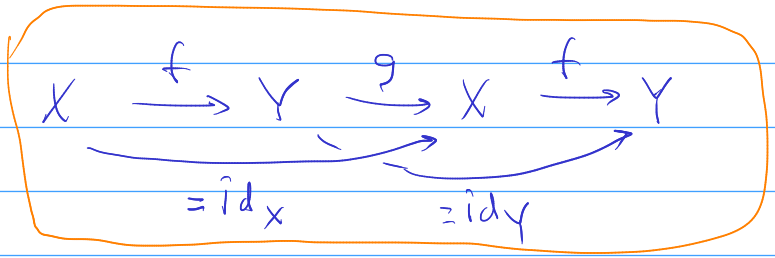
$F(x,t) = \cos(xt)$



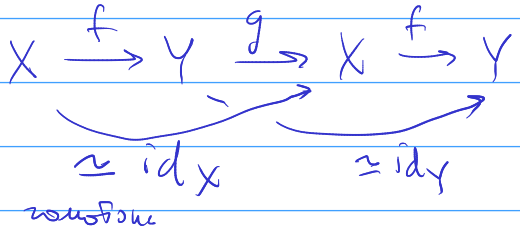
F_0 і F_1 - гомотопні $\qquad F_0 \simeq F_1$

Лема Відношення "бути гомотопними" на $C(X,Y)$ є відношенням еквівалентності

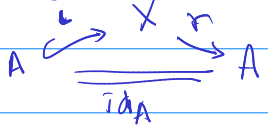
f - бієкція $\Rightarrow$ f Гомеоморфізм (f, g - неперервні)



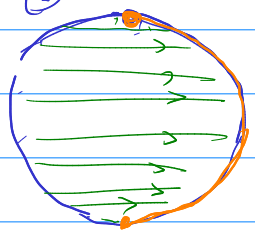
f - Гомотопічна еквівалентність



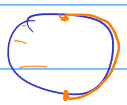
Ретракція Нехай $A \subset X$ - підмножина. Тоді неперер. відобр. $r: X \to A$ називається ретракцією X на A, якщо $r(a) = a$ $\forall a \in A$



$r|_A = id_A$

Приклади ① 

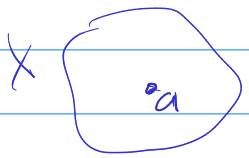
$r: D^2 \to A$ - крайні підходи



$S^1 = \partial D^2 \xrightarrow{r} A$ ретр. яка не є деформаційною

② $id_X: X \to X$ - ретракція X на X

③ $c_a: X \to a \in X$ - ретракція в точку $a \in X$



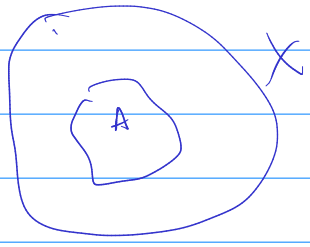
④ $r: I \to \{0,1\}$ побудувати ретракцію I на свою межу. Т. про проміжне значення $\Rightarrow \nexists$ таких ретракцій

Означення Деформаційною ретракцією X в підпростір A це гомотопія $F: X \times [0,1] \to X$, яка має такі властивості

① $F_0 = id_X$

② $F_t(A) \subset A$

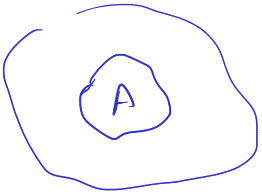
③ $F_1(X) \subset A$



Означення Деформаційна ретракція X на підпростір A це гомотопія $F: X \times [0,1] \to X$ така, що

① $F_0 = id_X$

② $F_1(X) = A$ і $F_1 : X \to A$ – ретракція



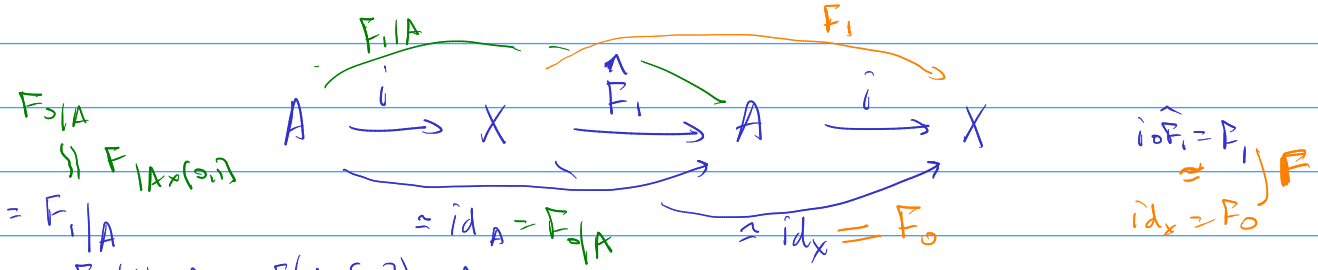
Деф. ретракція X на A назив. СИЛЬНОЮ, якщо

③ $F_t|_A = id_A$, тобто F_t – тотожне на A

Лема $F : X \times [0,1] \to X$ – деформація на підпростір A

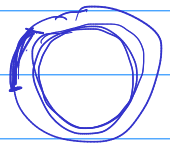
Тоді відображення вкладення $i : A \subset X$ є тотожньо еквівалентне

$\Downarrow$

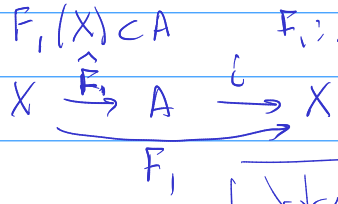


очевидно $F_t(A) \subset A$ $F(A \times [0,1]) \subset A$

$F|_{A\times[0,1]} : A \times [0,1] \to A$

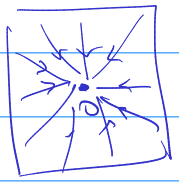


$F_1(X) \subset A$ $F_1 : X \to X$



Приклад $F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ $F(x,t) = (1-t)\cdot x$

F – деформація $\mathbb{R}^n$ в точку $\{0\}$



- $F_0(x) = (1-0)\cdot x = x$ $\quad F_0 = id_{\mathbb{R}^n}$
- $F_t(0) = (1-t)\cdot 0 = 0$ $\quad F_t(A) \subset A$
- $F_1(\mathbb{R}^n) = (1-1)\cdot \mathbb{R}^n = 0$ $\quad F_1(\mathbb{R}^n) \subset A$

$F_1 : \mathbb{R}^n \to 0$ ретракція

F – деформаційна ретракція

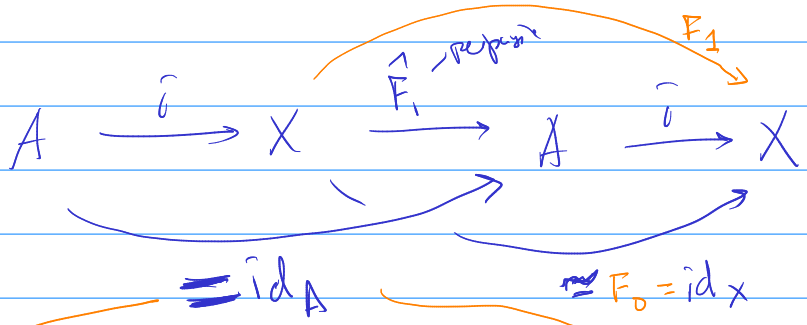
$F_t(0) = 0$, F – сильна деформаційна ретракція

$\mathbb{R}^n$ – стягуваний простір

Лема Нехай $F : X \times [0,1] \to X$ – деформаційна ретракція X на A.

Тоді вкладення $i : A \hookrightarrow X$ є тотожньо еквівалентністю

$\Downarrow$



деформація, і зокрема, тотожне

$\Uparrow$

Означення Топ. пр-р X - назв. стягуваним, якщо виконано одна з еквів. умов

- X тон. еквів. $\bullet$
- $\exists$ деформаційна ретракція X в якусь свою точку

$F: X \times [0,1] \to X$

$F_0 = id_X$ $\quad F_1(X) =$ точка

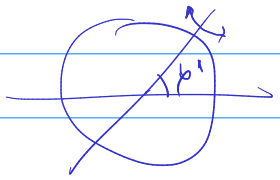
Група $H(S^1)$ гомеоморфізмів кола $S^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

$SO(2)$

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \right.$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$

повороти на φ



Д/З $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ це диференціальна симетрія відносно прямої ℓ. Що це за пряма?

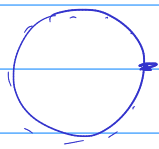
$$1 \to SO(2) \to O(2) \xrightarrow{\det} \{\pm 1\} \to 1$$

$\ker(\det)$

Теорема $O(2)$ є сильною деформаційною ретракцією $H(S^1)$

⇓

Нехай $1 = (1,0) \in S^1$ Тоді визначене відображення "обмеження" "обчислення" "δ-функція"



$$p: H(S^1) \to S^1, \quad p(h) = h(1)$$

$$p(g \circ h) = g \circ h(1)$$

$$p(g) \cdot p(h) = g(1) \cdot h(1)$$

$p^{-1}(1) = \{ h \in H(S^1) \mid h(1) = 1 \} =: H(S^1, 1)$ — підгрупа в $H(S^1)$

але вона не є нормальною

$h(1) = 1, \quad g(1) = 1$

$h \circ g(1) = h(1) = 1$

$h \in \mathcal{H}(S^1)$ $\quad h(1) = w \quad$ $g \in \mathcal{H}(S^1, 1)$

$$h\,\mathcal{H}(S^1,1)\,h^{-1} = \mathcal{H}(S^1, h(1))$$

$$h\,g\,h^{-1}(h(1)) = h\,g(1) = h(1)$$

1 $\qquad$ 1

$\{\mathcal{H}(S^1, w) \mid w \in S^1\}$ — сприєкий підрозм

$\mathcal{H}(S^1) \xrightarrow{p} S^1 \qquad h \to h(1)$

$\|$ дієкція

$h \in \mathcal{H}(S^1)$ і $h(1) = w$

$h \cdot \mathcal{H}(S^1, 1)$ — лівий суміж. клас h

$\mathcal{H}(S^1)$ $\quad \mathcal{H}(S^1, 1)$

суміжні класи

$$\boxed{h \cdot \mathcal{H}(S^1, 1) = p^{-1}(w)}$$

$h(1) = w$

$g \circ h(1) = g(w)$

$h \cdot g(1) = h(1) = w$

1



Якщо $h(1) = w$, то нехай r_w - повороти на w

$r_w^{-1} \circ h(1) = r_w^{-1}(w) = 1$

$\mathcal{H}(S^1)$ діє зв'язно на S^1 транзитивно $\Rightarrow$ S^1 - одна орбіта

$\mathcal{H}(S^1, 1)$ - стабілізатор $1 \in S^1$

Зад-теорем $\quad$ З дієкції $\quad \dfrac{\mathcal{H}(S^1)}{\mathcal{H}(S^1, 1)} = S^1$ - орбіта