Теорема Стокса M – орієнтований, $\dim M = n$, межа ∂M "узгоджено" орієнтована

$\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ $\quad \int_M d\omega = \int_{\partial} \omega$

Лема Пуанкаре $\omega \in \Omega^i(D^n)$, $i \geq 1$, якщо $d\omega = 0 \Rightarrow \omega = df$, $f \in \Omega^{i-1}(D^n)$

$\omega \in \ker d^i \Rightarrow \omega \in \operatorname{im} d^{i-1}$ $\quad H^i = 0$

$d \circ d = 0 \Leftrightarrow \operatorname{im} d^{i-1} \subset \ker d^i$ $\quad H^i$

$\omega \in \Omega^0(D^n)$ – ф-я, $d\omega = 0$ $\quad \omega = df$, $f \in \Omega^{-1}(D^n) = \{0\}$

$\omega = \text{const}$

$$0 \to \underset{0}{\Omega^{-1}(D^n)} \xrightarrow{d^{-1}} \Omega^0(D^n) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(D^n) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(D^n) \to$$

$\ker d^0 = \{\text{const}\}$

$H^0(D^n) = \dfrac{\ker d^0}{\operatorname{im} d^{-1}}$ $\quad H^1(D^n) = \dfrac{\ker d^1}{\operatorname{im} d^0} = 0$, $\ker d^1 = \operatorname{im} d^0$

Лема Пуанкаре $\quad H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(D^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

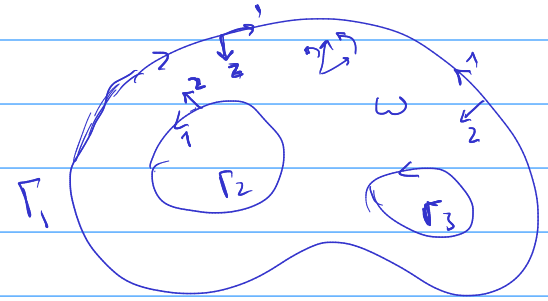
Наслідок Нехай $\omega \in \Omega^{n-1}(M^n)$. Якщо ω – замкнена

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = 0$$

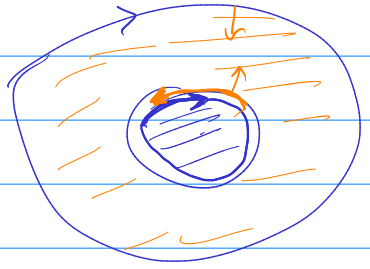
На кільці область D, $\Gamma = \partial D$

$\omega \in \Omega^1(D)$

Якщо $d\omega = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} \omega = 0$ $\quad \int_D d\omega = 0$

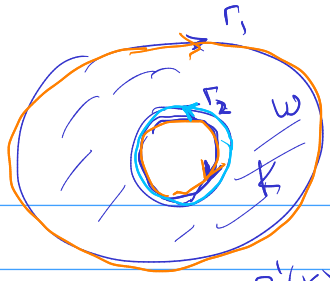


$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = 0$$







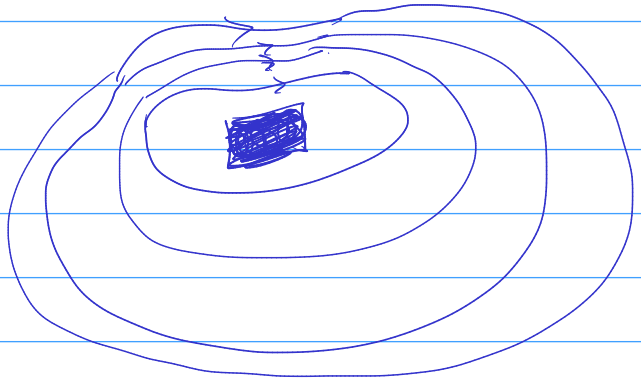


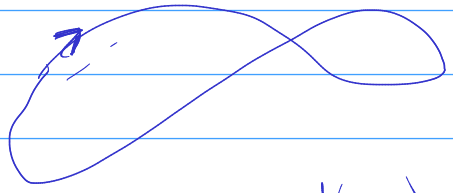
$\omega \in \Omega^1(K)$ $\quad d\omega = 0$

по теореме

$$0 = \int_{\partial K} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega - \int_{\Gamma_2} \omega$$

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega$$





$d(xy)$

$d\varphi = x\,dy + y\,dx = \alpha$

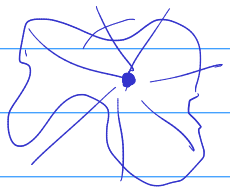
$\mathbb{R}^2 \setminus 0$

$d\alpha = 0$

на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ $\quad \alpha = d\varphi$ — не в точке

на $\mathbb{R}^2$ точно

не гладкая часть



x

$$d(\underbrace{x\,dy + y\,dx}_{\alpha}) = dx \wedge dy + dy \wedge dx = 0$$

$\mathbb{R} \times (0, +\infty) \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$

$(\varphi, r) \to (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$

$\alpha = x\,dy + y\,dx$

$\alpha = x\,dy - y\,dx$

$d\alpha = dx \wedge dy - dy \wedge dx$

$= 2\,dx \wedge dy$

$h^* \alpha = d\varphi$

$$h^*(\alpha) = r\cos\varphi\ d(r\sin\varphi) + r\sin\varphi\ d(r\cos\varphi) = r\cos\varphi(\sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi) +$$
$$+ r\sin\varphi(\cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi)$$

Нехай $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ $\quad u, v \in C^k(\mathbb{R}^2)$

$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$

① Умови Коші - Рімана $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (u, v)$

означають, що

$$Jf = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

$$Jf = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

конформна

"збереження кутів"

пропорційне ортогональній

$$q \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad f = u + iv \quad z = x + iy \quad dz = dx + i\,dy$

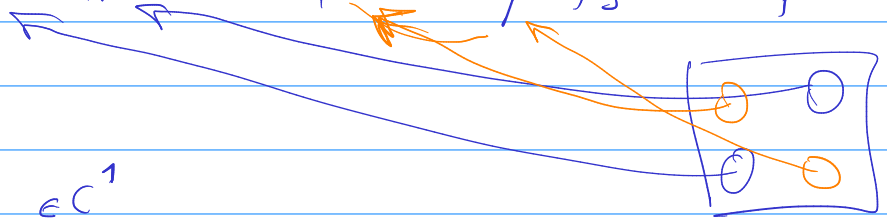
$$f\,dz = (u+iv)(dx+i\,dy) = \underbrace{(u\,dx - v\,dy)}_{\alpha} + i\underbrace{(v\,dx + u\,dy)}_{\beta}$$

$$f\,dz = \alpha + i\beta = \begin{pmatrix} u & -v \\ iv & iu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$d(f\,dz) = d\alpha + i\,d\beta = (u'_y\,dy \wedge dx - v'_x\,dx \wedge dy) + i(v_y\,dy \wedge dx + u_x\,dx \wedge dy)$$

$$= \{-(u'_y + v'_x) + i(u'_x - v'_y)\}\,dx \wedge dy$$

$\in C^1$



Лема. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Тоді наст. умови еквів

① f - голоморфна

② $f\,dz$ - замкнена форма $\quad (d(f\,dz) = 0)$

"$\alpha + \beta i$", то α і β - замкнені 1-форми

Лема Нехай f - голоморфна де в області D обмежений замкненим кривим $\Gamma = \partial D$

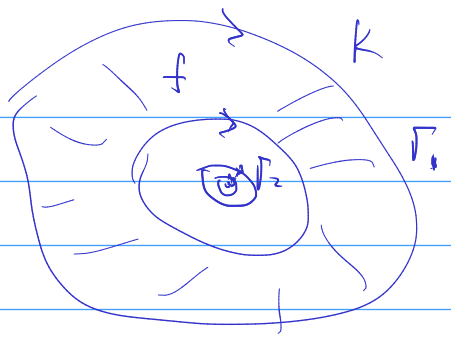
Тоді $\quad \int_\Gamma f\,dz = 0$

$$\int_{\Gamma=\partial D} f\,dz := \int_\Gamma \alpha + i\int_\Gamma \beta \overset{\text{Т. Стокса}}{=\!=} \int_D d\alpha + i\int_D d\beta = 0$$

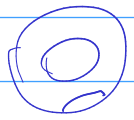
$d\alpha = 0$, $d\beta = 0$ за голоморфністю f

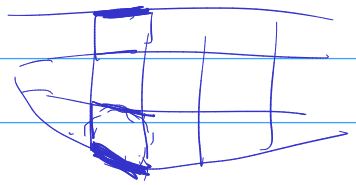
функція

$f: K \to \mathbb{C}$ — голоморфна



$$\int_{\Gamma_1} f dz = \int_{\Gamma_2} f dz$$

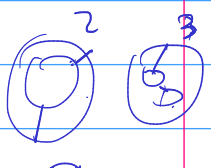




первісна

$$f dx = dg$$

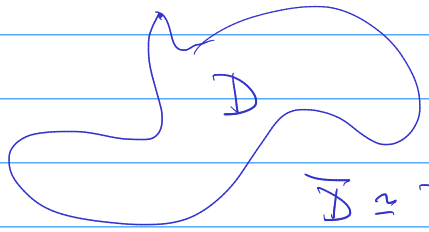
$$f = (g + C)'$$



$\pi_1 D = 0$ в $\mathbb{C}$

Лем. 2 Нехай D - однозв'язна область (область замкнена крива) і $f: D \to \mathbb{C}$ - голоморфна ф-я.

Тоді $\exists$ і єдина голоморфна ф-я $g: D \to \mathbb{C}$ така, що $f dz = dg$



Причому g визначена з точністю до константного доданку $g + C$, $C \in \mathbb{C}$

$f dz = \alpha + i\beta$ α, β - замкнені 1-форми

Тоді $g = p + iq$ така, що $\alpha = dp$ $\beta = dq$

$$f dz = dp + i dq$$

$$\int_{\partial\Gamma} f dz = \int_{\partial\Gamma} dg = \oint_{\partial\Gamma} g = 0$$

$\partial\Gamma = \varnothing$

$\Downarrow$ $f dz = \alpha + i\beta$ де $d\alpha = d\beta = 0$

За лемою Пуанкаре $\exists\ p, q: D \to \mathbb{R}$, що

$\alpha = dp$ і $\beta = dq$

$f dz = dp + i dq$

- $p, q \in C^\infty$ $\Rightarrow$ $f \in C^\infty$ f - аналитична з "кохігуса" p, q

- $\alpha = dp$ $\alpha = dp'$

$d(p - p') = 0$

$\in \ker \left(d^0 : \Omega^0(D^2) \to \Omega^1(D) \right)$

тоб. $p - p'$ - константа $p - p' = C_1$

аналогічно $\beta = dq = dq'$ $\Rightarrow$ $q - q' = C_2$

$g = p + iq$ $g' = p' + iq'$

$g = g' + (C_1 + iC_2)$

- $g = p + iq$ $p'_x = q'_y = u$

$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{pmatrix}$ $p_y = -q_x = -v$

$\oint f dz = \underbrace{(u dx - v dy)}_{\alpha} + i \underbrace{(v dx + u dy)}_{\beta}$

$d(p + iq) = (p_x dx + p_y dy) + i (q_x dx + q_y dy)$

Тобто g - голоморфна.

$g'_z = p_x - i p_y = u + iv = f$

$f = u + iv$

Голоморфна

$f'_z = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$

$f = u'_x + i v'_y$

$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$

$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$x'_z = \frac{1}{2} \qquad x'_{\bar{z}} = \frac{1}{2}$

$y'_z = \frac{1}{2i} \qquad y'_{\bar{z}} = -\frac{1}{2i}$

$f'_z = f'_x \cdot x'_z + f'_y \cdot y'_z =$

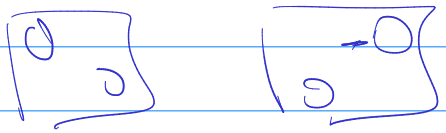
$(u_x + iv_x)\frac{1}{2} + (u_y + iv_y)\cdot\frac{1}{2i} = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y) = u_x - iu_y$

$\frac{1}{i} = -i$

$f'_{\bar{z}} = f'_x \cdot x_{\bar{z}} + f_y\, y_{\bar{z}} =$

$(u_x + iv_x)\frac{1}{2} + (u_y + iv_y)\left(-\frac{1}{2i}\right) =$

$= \frac{1}{2}(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)$



Л. Нехай $f: D \to \mathbb{C}$ C^1 – відобр. D – область в $\mathbb{C}$ (підмножина $\dim D = 2$)

Тоді наст. умови еквів

① f – голоморфна

② $f\,dz$ – замкнена 1 форма

③ $f'_{\bar{z}} = 0$

Наск Нехай D – однозв область $f: D \to \mathbb{C}$ голоморфна

$f\,dz = dg \qquad g: D \to \mathbb{C}$ – голоморфна

Тоді $\boxed{f = g'_z}$ тобто якщо $g = p + iq$

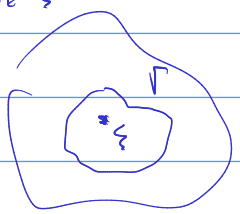
то $f = p'_x + i p'_y$

Наслідок Якщо D – однозв область, $f: D \to \mathbb{C}$ – голоморфна

функція рівняння $g'_z = f$ має розв'язок і

чи розв'язки відрізняються на комплексний сталий.

Нехай $f: D \to \mathbb{C}$ – голоморфна ф-я в Γ. $\xi \in D$ і Γ – довільний контур, яких охоплює ξ



Тоді $$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz$$

⇓ Для простоти вважатимемо, що $\xi = 0$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z}\, dz$$

Голоморфність $\Leftrightarrow$ f розкладається в ряд Тейлора який збігається до f в околі 0

$$f(z) = f(0) + z a_1 + z^2 a_2 + \dots = f(0) + z\, h(z)$$

$$f(z) - f(0) = z\, h(z)$$

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z}\, dz = \int_\Gamma \left(\frac{f(0)}{z} + \frac{z h(z)}{z} \right) dz = \int_\Gamma \frac{f(0)}{z}\, dz + \int_{\partial D = \Gamma} h(z)\, dz$$

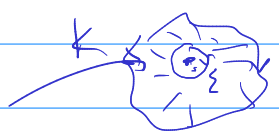
$=$

– залишок h – голоморфна

(II) $$\int_{\Gamma = \partial D} h(z)\, dz = \int_D d(h(z)\, dz) = 0$$

$\Gamma = \partial$ диска $\cdot$ і h – голоморфна в D

(I) $$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{dz}{z}$$ (Формула Коші)



$\frac{dz}{z}$ – замкнена в кільці

$$\int_{\partial K} \frac{dz}{z} = \int_K d\left(\frac{dz}{z}\right) = \int_\Gamma - \int_{\partial D_\varepsilon} = 0$$

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{dx + i\,dy}{x + iy} = \int \frac{(x - iy)(dx + i\,dy)}{(x+iy)(x-iy)} =$$

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{x\,dx + y\,dy + i\,(-y\,dx + x\,dy)}{x^2+y^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \varepsilon\cos\varphi \\ y = \varepsilon\sin\varphi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon\cos\varphi\,(-\varepsilon\sin\varphi)\,d\varphi + \varepsilon\sin\varphi\,(\varepsilon\cos\varphi)\,d\varphi}{\varepsilon^2} +$$

$$+ i \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon\sin\varphi\,(-\varepsilon\sin\varphi)\,d\varphi + \varepsilon\cos\varphi\,\varepsilon\cos\varphi\,d\varphi}{\varepsilon^2} = i \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\,d\varphi$$

$$= 2\pi i$$

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z}\,dz = f(0) \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot f(0)$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z}\,dz$$