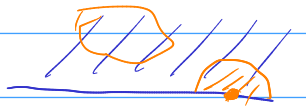
M - комп. многовид $\Leftarrow$ лекция

$\forall x \in M \quad \exists$ отк. U і хомеоморфізм $\varphi: U \to \mathbb{R}^n_+ = \{x_n \geq 0\}$ на відкриту підмножину в $\mathbb{R}^n_+$

∂M - межа - множина всіх межових точок M

$\operatorname{Int} M = M \setminus \partial M$



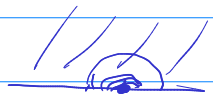
межова точка

U-отк. $\cong D^n$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_n(U, U\setminus x_0) \cong \mathbb{Z} \\ H_n(M^n, M^n \setminus x) = \mathbb{Z} \end{array}\right| \quad M^n \ni x \quad \text{якщо} \quad x \in \operatorname{Int}$$

$\pi_n(U, U\setminus x) \quad H_n(\;) = 0$ якщо $x \in \partial M$





M^n - орієнтовний многовид $\quad \beta = \{(V_\beta, \psi_\beta)\} <$

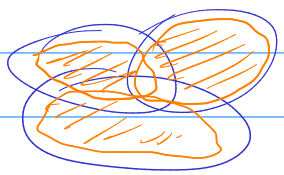
$\alpha = \{(U_i, \varphi_i)\}$ - орієнтований атлас C^k

$\omega \in \Omega^n(M)$

$$\int_M \omega := \sum \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^* (\mu_i \omega)$$

$f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

$\sum \mu_i = 1$

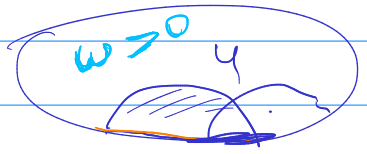


Лема (M, α) - орієнт. многовид

$\Rightarrow (\partial M, \alpha|_{\partial M}) = \{(U_i \cap \partial M, \varphi_i|_{U_i \cap \partial M})\}$



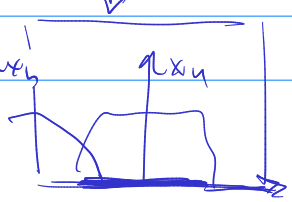
орієнтов. многовид $\quad \phi^*$



φ

$(\varphi^{-1})^* \omega = \gamma(x) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

$\gamma > 0$



На якості атласу на ∂M вибрати такий, щоб

$$\int (-1)^n \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} > 0$$

$\partial M \hookrightarrow M$

$\omega : \int_M \omega > 0$

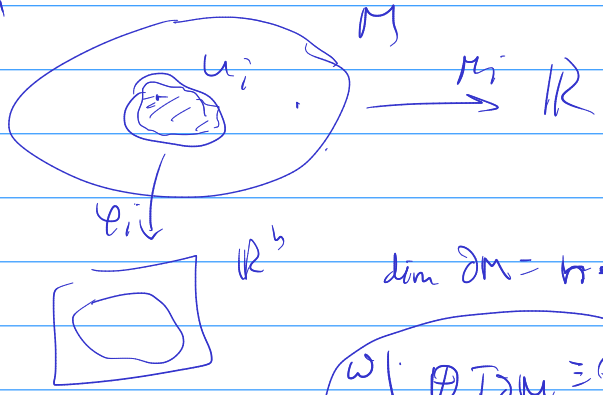
орієнтація на ∂M обирається так, щоб

$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ – орієнт. атлас $\{\mu_i\}$ – розбиття одиниці підпорядковане (U_i, φ_i)

$\sum \mu_i \equiv 1$ $\quad \operatorname{supp} \mu_i \subset U_i$ (компакт) $\quad \bigcup \operatorname{int} \operatorname{supp} \mu_i \supset M$

$\mathbb{R}^n \quad dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \equiv q$ $\quad dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \geq P$ $\quad \mathbb{R}^{n-1} \times 0$

$q \cdot (\mu_i \circ \varphi_i^{-1})$ – n-форма на $\mathbb{R}^n$



$\omega = \sum (\varphi_i)^* \left| q \cdot (\mu_i \circ \varphi_i^{-1}) \right|$

$\dim \partial M = n-1$

$\omega|_{\oplus T\partial M} \equiv 0$

$\xi = \sum (\varphi_i)^* P \cdot (\mu_i \circ \varphi_i^{-1})$ – $(n-1)$ форма на ∂M (обмежує U_i)

орієнтація ∂M $\quad$ знак $\int \xi = (-1)^n$

$\int \omega > 0$ $\quad (-1)^n \xi$ – задає індуковану орієнтацію межі

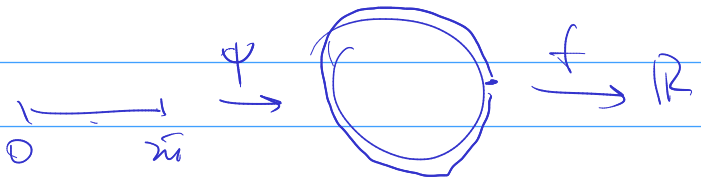
Теорема Стокса Нехай M – орієнтований компактний многовид (з межею). Тоді $\forall (n-1)$ форми $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ має місце рівність

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Наследство Пусть $\partial M = \emptyset$ то $\int_M d\omega = 0 = \int_{\emptyset = \partial M} \omega$

Пример Пусть $f: S^1 \to \mathbb{R}$ — C^∞ ф-е $\equiv$ 0-форме на S^1

$$\int_{S^1} df = 0$$



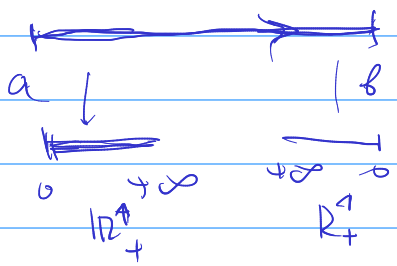
$$\varphi^*(df) = d(f\circ\varphi) = (f\circ\varphi)' dx$$

$$\int_{S^1} df = \int_0^{2\pi} (f\circ\varphi)' dx = f\circ\varphi(2\pi) - f\circ\varphi(0) = 0$$

так как f - ф-е на кой $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$

Пример 2 Пусть $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ C^∞ ф-е тогда 0-форма

$$\int_{[a,b]} df \equiv \int_a^b f'(x)\,dx \equiv \int_{\partial[a,b]} f = f(b) - f(a)$$



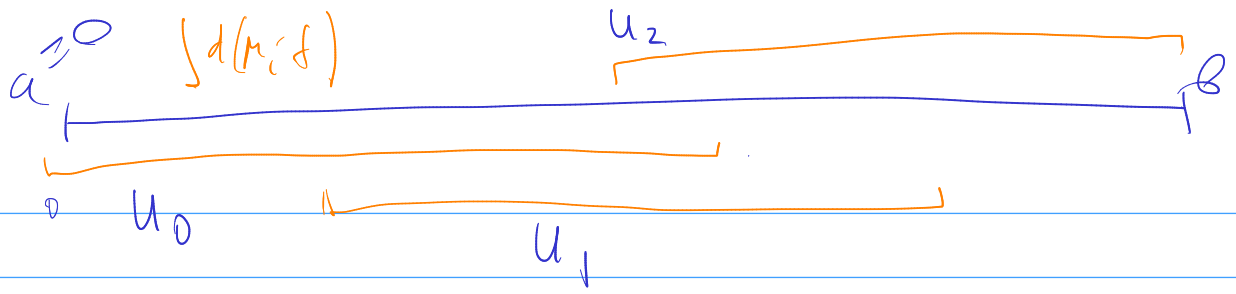
$$\int f = f(x)$$

тогда $\int_x = -f(x)$

$$\Omega^0(\bullet) = \mathbb{R}$$

$$\int_a f = (-1)^1 f(a) \qquad \int_b f = (-1)^0 f(b) = f(b)$$

$$\int_{\partial[a,b]} f = f(b) - f(a)$$



μ_1 μ_2 μ_3 – разб. единица подчинена $\{U_1, U_2, U_3\}$

$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi_3 : U_3 \to \mathbb{R}$, $x \to b - x$

$\varphi_1(x) = x$

Вложим

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^∞ гл. 0-форма

$$\int_{[a,b]} df := \int (\varphi_1^{-1})^* (\mu_1 df)$$

$$df = d\left(\sum \mu_i f\right) = \sum d(\mu_i f) = \sum_i (d\mu_i) \cdot f + \sum \mu_i \, df =$$

$$= \left(\sum d(\mu_i)\right) \cdot f + \sum \mu_i \cdot df$$

$d\left(\sum \mu_i\right) f$

$= 1$

$= 0$

$\varphi_1(x) = x - a$

$\varphi_1^{-1}(y) = y + a$

$\mu_1(x+a) f'(x+a) d(x+a)$

$$(\varphi_1^{-1})^* (\mu_1 df) = \mu_1(x) f'(x) dx =$$

$$= d(\mu_1 f) - f \cdot d\mu_1$$

$$\int_0^{+\infty} \mu_1(x) f'(x) dx = \int_0^{+\infty} d(\mu_1 f) - \int_0 f \, d\mu_1 =$$

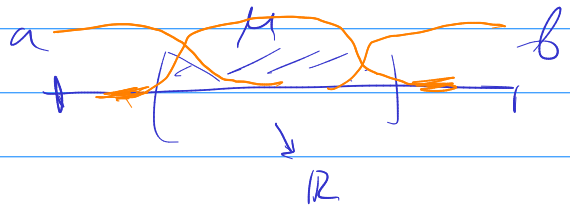
$$= \int_0^{+\infty} (\mu_1 f)' dx - \int_0^{+\infty} f \mu_1' dx =$$

$$= \underbrace{(\mu_1 f)(+\infty)}_{\parallel} - (\mu_1 f)(0) - \int_0^{+\infty} =$$

0

So μ with compact support

$$= -\mu(0) f(0) - \int$$



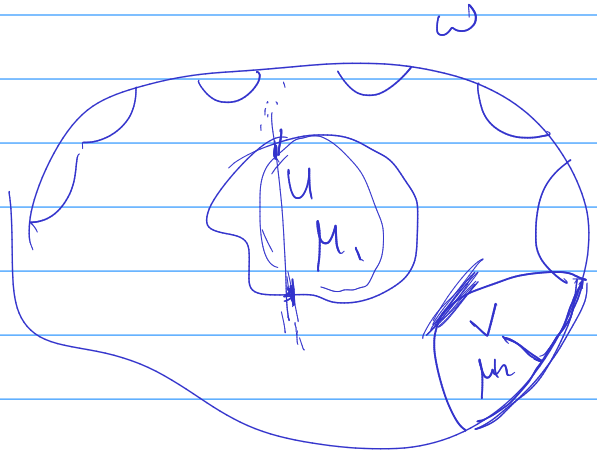
$\operatorname{supp} \mu \subset U_2$

$$\int_0^{+\infty} (\mu_2 f')' dx = \int_{-\infty}^{+} d(\mu_2 f) - \int f \mu_2' dx$$

$$= \mu_2 f(+\infty) - \mu_2 f(-\infty) - \int f \mu_2' dx$$

$\parallel 0$ $\parallel 0$

$\operatorname{supp} \mu_2$ - compact.



$$\int_U d(\mu_1 \omega) = 0$$

Sets dx_i

$\mu \omega = \mu f \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

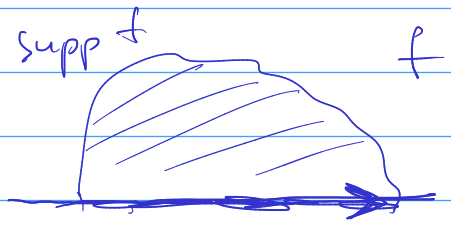
$d(\mu \omega) = (\mu f)'_{x_i} dx_i \wedge dx_2 \dots$

$$\int_{U_i} d(\mu_i \omega_i)$$

Теорема Стокса Загальний випадок

Нехай f - 1-форма на $\mathbb{R}^2_+$ з компактним носієм

$$\int_{\partial \mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}\times 0} f = \int_{\mathbb{R}^2_+} df$$



a, b - гладкі компактного носія

$$f = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$$

$$df = a'_y\, dy\wedge dx + b'_x\, dx\wedge dy = (-a'_y + b'_x)\, dx\wedge dy$$

$$f|_{\mathbb{R}\times 0} = a(x,0)\,dx$$

$$-\int_{\mathbb{R}^2_+} a'_y\, dx\, dy = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} a'_y\, dy\right) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}\big(a(x,\infty) - a(x,0)\big)\,dx$$

$a(x,\infty) = 0$ бо a має компактний носій

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a(x,0)\,dx = \int_{\mathbb{R}\times 0} f$$

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} b'_x\, dx\, dy = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} b'_x\, dx\right) dy = \int_0^{+\infty}\big(b(+\infty,y) - b(-\infty,y)\big)$$

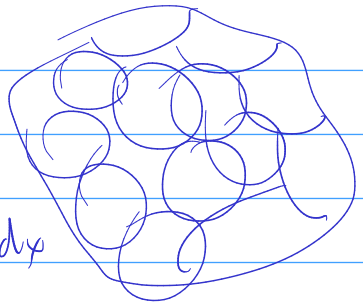
$b(+\infty,y) = 0$, $b(-\infty,y) = 0$

бо b має компактний носій

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} df = \int_{\mathbb{R}^2_+} (-a'_y + b'_x)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x,0)\,dx = \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} f$$

(3) Нехай f = 2 форми в $\mathbb{R}^3$ з компактними носіями

Тоді $\int\limits_{\mathbb{R}^3} df = 0$



$f = a(xyz) \cdot dx \wedge dy + b\, dy \wedge dz + c\, dz \wedge dx$

$df = a'_z\, dz dx dy + b'_x\, dx dy dz + c'_y\, dy dz dx =$

$(a'_z + b'_x + c'_y)\, dx dy dz$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} a'_z\, dx dy dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a'_z\, dz \right) dx \right) dy =$$

$$= \underbrace{a(xy+\infty)}_{0} - \underbrace{a(xy-\infty)}_{0}$$

Бо a має компактний носій

Д/З. Закінчити доведення т. Сойєса

(1) 2 форми в $\mathbb{R}^3$

▽ rot div

Комплекс де Рам на $\mathbb{R}^3$

$\Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3) = \Lambda \quad \Omega^1 = \Lambda[dx, dy, dz]$

$\Omega^2 = \Lambda[dx\wedge dy, dy\wedge dz, dz\wedge dx]$

$\Omega^3 = \Lambda(dx\wedge dy\wedge dz)$

$d: \Omega^0 \to \Omega^1 \qquad df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$

$d: \Omega^1 \to \Omega^2 \qquad f = a\,dx + b\,dy + c\,dz$

$df = a'_y dy\wedge dx + a'_z dz\wedge dx + b'_x dx\wedge dy + b'_z dz\wedge dy + c'_x dx\wedge dz + c'_y dy\wedge dz =$

$= (b'_x - a'_y)\, dx\wedge dy + (c'_y - b'_z)\, dy\wedge dz + (a'_z - c'_x)\, dz\wedge dx$

$rot(a,b,c) = (c'_y - b'_z,\ a'_z - c'_x,\ b'_x - a'_y)$

$d: \Omega^2 \to \Omega^3 \qquad f = R\,dx\wedge dy + P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx$

$df = R'_z dz\wedge dx\wedge dy + P'_x dx\wedge dy\wedge dz + Q'_y dy\wedge dz\wedge dx =$

$(R'_z + P'_x + Q'_y)\, dx\wedge dy\wedge dz$

$div(P,Q,R)$

$rot(\nabla) = 0 \qquad div(rot) = 0$

$d\cdot d = 0 \qquad d\cdot d = 0$

* зірочка Ходжа

ізоморфізм $TR^3 \cong T^*R^3$

Стандартна евклідова метрика на $\mathbb{R}^3$ (скалярний добуток)

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

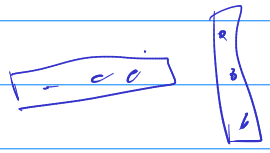
$\langle a \quad b \rangle \longrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

ідентифікація

$a \mapsto$ фун. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}^3 \cong (\mathbb{R}^3)^*$

$b \to \langle a, b \rangle$

$\langle a, b \rangle$



$T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^* = T^*\mathbb{R}^3$

M рімнова метр $\qquad TM \cong T^*M$

в. поле $\qquad$ ω $\qquad$ диф 1 форм

M

$(a, b, c) \longleftarrow f = a\,dx + b\,dy + c\,dz$

$* : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$

$dx_A = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \xrightarrow{*} (\pm)\, dx_{\{1,\dots,n\} \setminus A}$

$(\pm)$

$A = \{i_1, \dots, i_k\} \cup B = \{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$

Вопрос (V)

V - вект. с ТМ $\longrightarrow$ 1-форм T^*M

$\downarrow d$

2 форм

$\downarrow *$

$\Omega^{n-1}(M)$ $\longleftarrow$ 1 форм