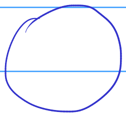
① Інтеграл — $\mathbb{R}^n$
— на орієнт. многов

② многовиди з межею [0,1]... / з кутами

③ ф-ла Стокса

④ Приклади



$d\omega =$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

$\omega = df$ $\qquad f = x\,dx + y\,dy$

$$\int_{\bigcirc} \omega = \int x\,dx + y\,dy = \left|\begin{matrix} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{matrix}\right| = \int \cos\varphi\,(-\sin\varphi)\,d\varphi + \sin\varphi\,(\cos\varphi)\,d\varphi \equiv 0$$

$f = x\,dy - y\,dx$

$$\int_{\bigcirc} (x\,dy - y\,dx) = \int \cos\varphi\cos\varphi\,d\varphi - \sin\varphi\,(-\sin\varphi)\,d\varphi = \int (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi = 2\pi$$

① Принципы

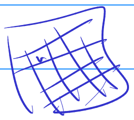
② Теорема Стокса

ω в $\mathbb{R}^n$ $\qquad \omega \in \Omega^n \qquad \omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx_1 \dots dx_n$$

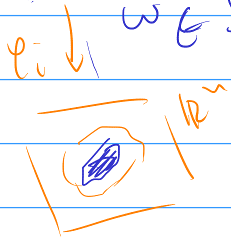
$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \qquad h \in C^1 \qquad h = (h_1 \dots h_n)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} h^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(h(x))\, \underbrace{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_n} = \int_{\mathbb{R}^n} f(h(x))\, |Jh|\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n =$$



$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(h(x))\, |J(h)|\, dx_1 \dots dx_n = \pm \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx_1 \dots dx_n = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

$\omega \in \Omega^n(M)$



M – комп. $\{U_i\}$ – счётное покрытие M

разб. единицы

$\{(U_i, \varphi_i)\}$ подч. $\exists\ \mu_i : M \to [0,1]$ C^∞

$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{supp} \mu_i \subset U_i \qquad \operatorname{supp} \mu_i \text{ – комп.} \\ \bigcup \operatorname{Int} \operatorname{supp} \mu_i = M \\ \sum_i \mu_i(x) \equiv 1 \quad \forall x \in M \end{array}}$

$\operatorname{supp} \mu_i \cap \operatorname{supp} \omega$

$\operatorname{supp}(\mu_i \omega_i) \subset U_i$

$$\int_M \omega := \int_M \overset{=1}{\left(\sum \mu_i\right)} \omega := \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^* (\mu_i \omega_i)$$

$$\operatorname{supp} \omega = \left\{ x \in M \;\middle|\; \omega|_{T_xM} \not\equiv 0,\ \exists\, v_1 \dots v_n \in T_xM \quad \omega(v_1 \dots v_n) \neq 0 \right\}$$

в лок коор. U_i $\qquad (\varphi_i^{-1})^* \omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

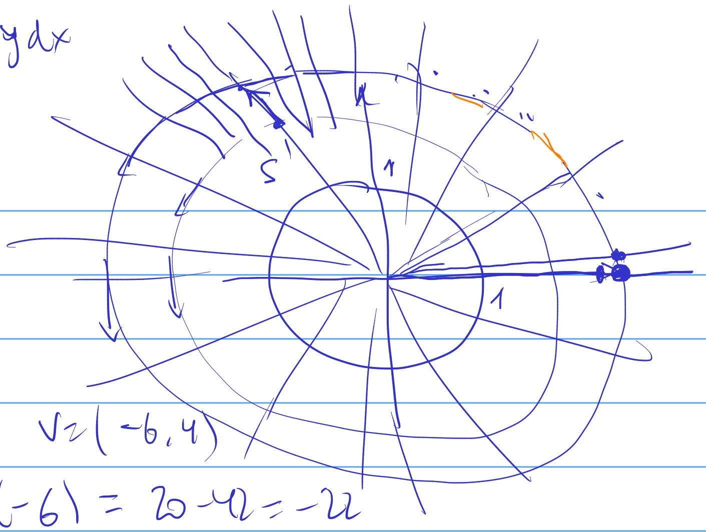
$$\operatorname{supp}\left((\varphi_i^{-1})^* \omega\right) = \operatorname{supp} f$$

$\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ $\quad \omega = x\,dy - y\,dx$

$M = S^1 = \{x^2+y^2=1\}$

$S^1 \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^2$

$i^*\omega \in \Omega^1(S^1) \quad \omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$



$z = (5, -7) \quad v \in T_z\mathbb{R}^2 \quad v = (-6, 4)$

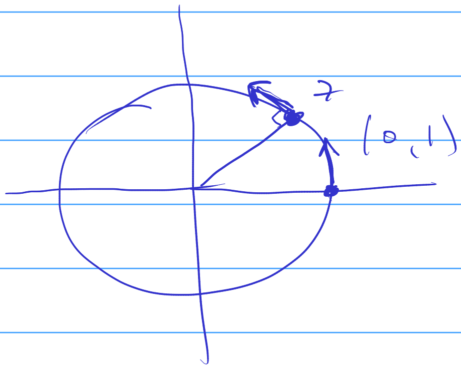
$\omega(z)(v) = 5\cdot 4 - (-7)(-6) = 20 - 42 = -22$

$\omega(z)(v) = 0 \quad v = (a,b) \quad (dy(v), -dx(v)) = (b, -a)$

$\omega(z) = \langle (x,y), (b,-a)\rangle = \quad \omega(z)(v) = 0 \Leftrightarrow v \perp x$

$\omega(\overset{z}{(x,y)})(\overset{v}{(x,y)}) = x\,\underbrace{dy(x,y)}_{y} - y\,\underbrace{dx(x,y)}_{x} = xy - yx = 0$

$\omega(z=(1,0), v=(0,1)) =$
$= x\,dy - y\,dx = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$



$x = \cos\varphi \quad y = \sin\varphi$

$v = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$

$\omega((\cos\varphi, \sin\varphi), (-\sin\varphi, \cos\varphi)) = \cos\varphi\cos\varphi - \sin\varphi(-\sin\varphi) = 1$

$i^*(\omega)$ на S^1 — аналог похідної $f(x) = x$ на $\mathbb{R}$

$\varphi \; \mathbb{R} \xrightarrow{h} S^1 \, (x,y) \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^2$

$$\int_{S^1} i^*(\omega) = \int_{S^1} x\,dy - y\,dx = \left| \begin{matrix} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{matrix} \right|$$

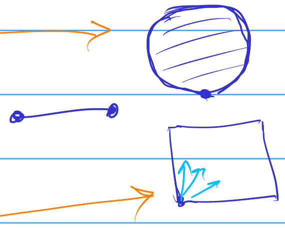
$$= \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d(\sin\varphi) - \sin\varphi\, d(\cos\varphi) = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi\,\overline{\cos\varphi} - \sin\varphi\,\overline{(-\sin\varphi)})\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \boxed{d\varphi} = 2\pi$$

$= i^*\omega$ в полярних коорд

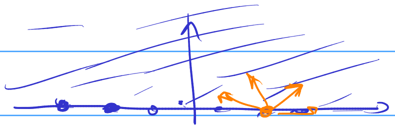
$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{лок. ізоморф}} S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$d\varphi \qquad i^*\omega \qquad \omega = x\,dy - y\,dx$$



Многовиди з межею і кутами

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_n \geq 0\}$$



$$f: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}}$$

$$v = (v_1 \dots v_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial (v+w)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t(v+w)) - f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{f(x+t(v+w)) - f(x+tw)}{t}}_{} + \underbrace{\frac{f(x+tw) - f(x)}{t}}_{}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x+tw) \qquad \frac{\partial f}{\partial w}(x)$$

$$\downarrow t\to 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x)$$

$$\frac{f(x+tw+tv) - f(x+tw)}{t}$$

(Уітні) Seeley

Теорема 1. Нехай $f: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ C^k-ф-я $k \geq 1$

Тоді $\exists$ C^k ф-я $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ така, що $f = g|_{\mathbb{R}^n_+}$

Відповідність $f \to g$ и

$$C^k(\mathbb{R}^n_+) \to C^k(\mathbb{R}^n)$$

можна зробити лінійною

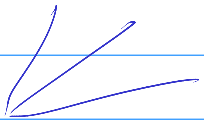
$K \subset \mathbb{R}^n$ замк. підмн.

Чілі зав. Характеризацію $f|_K$ $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$

$\varphi : K \to \mathbb{R}$ $\varphi = f|_K$?

$f \in C^k$

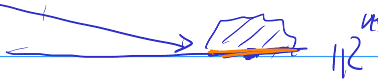
$\mathbb{R}^n$



M – топ. простір. M називається многовидом з межею, якщо у кожної точки $x \in M$ існує окіл U гомеоморф. відкритій підмножині в $\mathbb{R}^n_+$ для деякого n.

Точки у яких окіл виду — називають межовими

∂M – межа M



$\varphi(U) \cap \mathbb{R}^{n-1}$

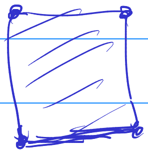
$[0, \varepsilon)$ відкр в $\mathbb{R}^1_+ = [0; +\infty)$

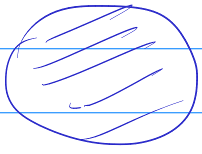
Теорема (Брауер, "про інваріантність області")

Нехай $f : M \to N$ гомеоморфізм між многовидами з межею то $f(\partial M) = \partial N$

Лема Кожен многовид M^n без межі є многовидом з межею і його $\partial M = \varnothing$

Лем. Межа M^n є многовидом, $\dim \partial M = n-1$





– многовиди з межею

Гомеоморфні

Нехай M – многовид з межею

Аналогічно визначаються ① (U, φ) – локальні карти

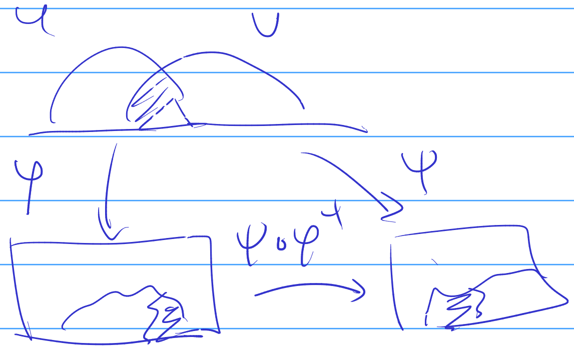
$U \subset M$ – відкрита

$\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ – відкрите вкладення, тобто гомеоморфізм U на відкриту підмн. в $\mathbb{R}^n$

② $\{(U_i, \varphi_i)\}$ – сім'я лок. карт називається атлас

якщо $\bigcup U_i = M$

③ (U, φ) (V, ψ)



відобр. переходу

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

(U, φ) (V, ψ) – C^k узг. якщо $\psi \circ \varphi^{-1}$ – C^k-дифер.

C^k атлас – атлас, який склад. з C^k узгоджених карт

(M, α) α – C^k-атлас, M – многовид з межею

↖ C^k-структура на M

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

орієнт. – M

Орієнтовані многовиди з межею

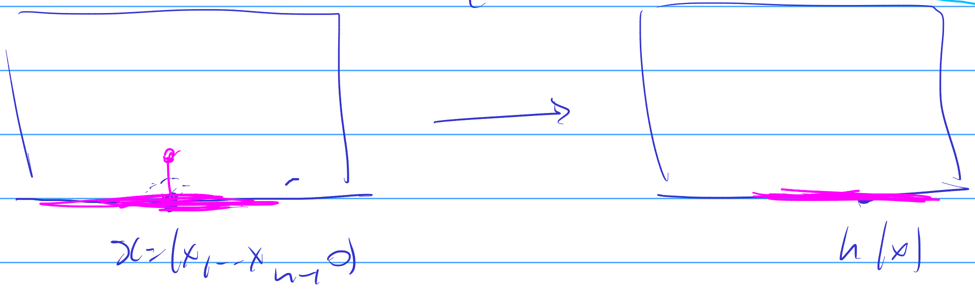
тобто $\exists$ атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$ відображення переходу мають додатній якобіан в кожній точці

Лема Нехай M — орієнтовний многовид з межею. Тоді ∂M є орієнтовним многовидом.

$\Downarrow$ $h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ — C^1 дифеоморф

$h = (h_1 \ldots h_n)$ $\quad \boxed{h_n(x) \geq 0}$

$h_n(x_1 \ldots x_{n-1}, 0) = 0$



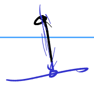
$$Jh = \begin{pmatrix} h'_{1x_1} & \ldots & h'_{1x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h'_{n-1\,x_1} & \ldots & h'_{n-1\,x_n} \\ 0 & 0\ \ 0 & \boxed{h'_{n\,x_n}(x_1 \ldots x_{n-1}, 0)} \end{pmatrix}$$

> 0

при $x_n = 0$ це матриця якобі $h|_{\mathbb{R}^{n-1}}$

$$\frac{\partial h_n}{\partial x_i}(x_1 \ldots x_{n-1}, 0) = 0$$

$1 \leq i \leq n-1$



$h_n(x_1 \ldots x_{n-1}, 0) = 0$

$$0 < h_n(x_1 \ldots x_{n-1}, x_n) = \int_0^{x_n} h'_{n\,x_n}(\ldots, s)\, ds = \left| \begin{array}{l} s = x_n t \\ ds = x_n\, dt \end{array} \right.$$

$$= \Big(\underbrace{\int_0^1 h'_{n\,x_n}(\ldots, x_n t)\, dt}_{\neq 0} \Big) \underset{\vee\, 0}{x_n}$$

$\Rightarrow$ додатне

Оскільки $\frac{\partial h_n}{\partial x_n}(\underbrace{x_1 \dots x_{n-1}, 0}_{q}) > 0$

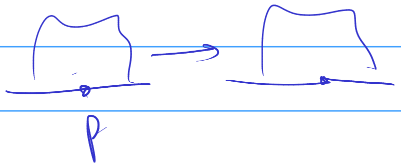
$$\boxed{\text{то знак } |J_q h| = \text{знак } |J_q h|_{\mathbb{R}^{n-1}}|}$$

Доведення леми. Нехай $\alpha = \{(U_i, \varphi_i)\}$ - орієнтований атлас на M. $\hat{\beta} = \{(U_j, \varphi_j) \mid U_j \cap \partial M = \emptyset\}$

тоді $\beta = \{(U_j \cap \partial M, \varphi_j|_{U_j \cap \partial M})\}$ - атлас для ∂M

α - орієнт. то $\varphi_i \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_k \cap U_i) \to \varphi_i(U_k \cap U_i)$ мають додатні якобіани у всіх точках $\varphi_k(p)$

Тому якщо $p \in \partial M$, то з твердження



якобіани обмежень $(\varphi_i \circ \varphi_k^{-1})|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ також додатні

але ці відобр. є відобр. переходу в атласі β.

тобто β - орієнтований атлас на ∂M.

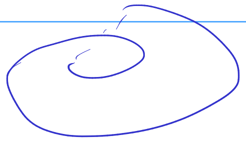
Варіанти ор, не ор

M	∂M

M - ор → ∂M ор.

M не ор

M неор ← ∂M - неор



M^n - орієнт

$\Updownarrow$

$\exists\, \omega \in \Omega^n(M)$

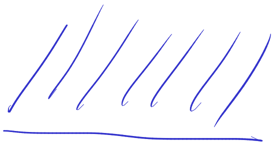
$\omega \neq 0$ скрізь

$\mathbb{R}^n_+$

$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$f > 0$



$\mathbb{R}^{n-1}$

твірна $\Omega^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$

$(-1)^n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$

Теорема Стокса

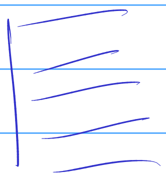
Нехай M^n - компактний орієнтований многовид; ∂M орієнтоване (як вище)

$\omega \in \Omega^{n-1}$

Тоді

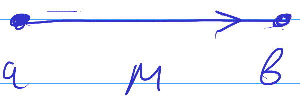
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

$$\int_M d\omega := \sum \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^* (\mu_i\, d\omega)$$



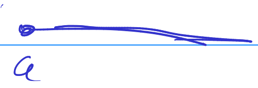
$$\int_{\partial M} \omega := \sum \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\varphi_i^{-1}\big|_{\partial M \cap U_i}\right)^* (\mu_i\, \omega)$$

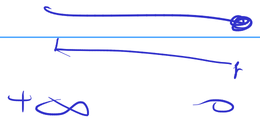
Ф-ла Ньютона - Лейбніца



$\partial M = \{a, b\}$

$f \in \Omega^0(M) = C^\infty([a,b])$



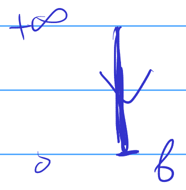


$df = f'dx$

$$\int_{[a,b]} df = \int_a^b f'\,dx \overset{\text{т. Стокса}}{=\!=} \int_{\partial M} f = \int_b f + \int_a f = f(b) - f(a)$$

dx

$\int_a$



$-(-1)^1$

$+1$

твірна Ω^0 ([illegible])

$(-1)^1 \underbrace{1} = -1$

M – ~~[illegible]~~ многов. орієнт. $\longrightarrow \{(V_j, \varphi_j)\}$

$\{(U_i, \varphi_i)\}$ – орієнт. атлас

$\{(U_i \cap \partial M, \varphi_i|_{U_i \cap \partial M})\}$ – один такий атлас

← другий такий

$(V_j \cap \partial M, \varphi$

M – орієнт. $\exists$ 2 орієнт. атл. $\alpha = \{(U_i, \varphi_i)\}$, $\beta\, \{(V_j, \varphi_j)\}$ $\updownarrow$ еквівал. відмінні

$\left.\begin{array}{l} \alpha|_{\partial M}\, \{(U_i \cap \partial M, \varphi_i|_{U_i \cap \partial M})\} \\ \beta|_{\partial M}\, \{(V_j \cap \partial M, \psi_j|_{V_j \cap \partial M})\} \end{array}\right\}$ орієнтовані атласи на ∂M

(M, α) якщо n – парне то $(\partial M, \alpha|_{\partial M})$

n – непарне то $(\partial M, \beta|_{\partial M})$