① $\exists$ C^∞ ф-ї $\delta : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ $\quad$ $\delta > 0$ в точності на $B_\varepsilon(x)$ замкненому шарі, $\delta = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)$

② Нехай K – компакт в $\mathbb{R}^n$ і $U \supset K$ відкритий окіл

Тоді $\exists$ C^∞ ф-я $\delta : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ така, що $\delta > 0$ на K і $\operatorname{supp} \delta \subset U$

③ Нехай M гладкий многовид $\mathcal{U} = \{U_i\}$ відкрите покриття. Тоді $\exists$ C^∞ розбиття одиниці підпорядковане $\mathcal{U}$

① $\mu_1 \ldots \mu_k : M \to [0,1]$ $\quad$ C^∞ ф-ї

$\varnothing \neq \operatorname{supp} \mu_j \subset U_i$ для деяких i

$\sum \mu_j(x) \equiv 1 \quad \forall x \in M$

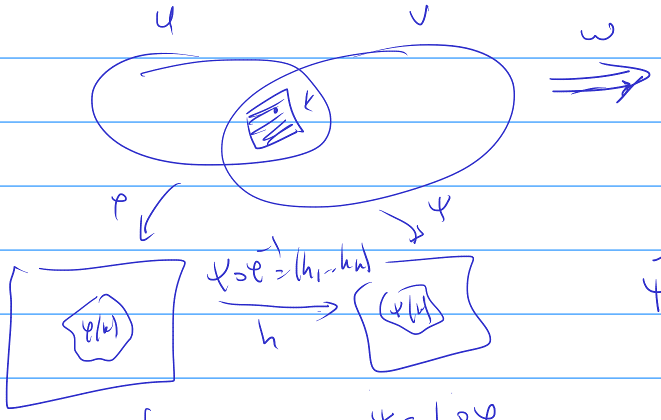
④ Нехай ω – диф. n форма в $\mathbb{R}^n$, і K компактна область $\subset \mathbb{R}^n$

$\omega(x) = \alpha(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

Тоді $\displaystyle\int_K \omega := \int_K \alpha(x)\, dx_1 \ldots dx_n$

⑤ Хай ω – n форма на n-многовиді M і (φ, U) лок карта і $K \subset U$ компакт

То $\displaystyle\int_K \omega := \int_{\varphi(K)} \varphi^{-1*}\omega$



$\varphi^{-1*}\omega = \alpha(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$\psi^{-1*}\omega = \beta(y)\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$

$y = h(x)$

$\displaystyle\int_K \omega := \int_{\varphi(K)}$

$\psi = h \circ \varphi$

$\varphi^{-1*}\omega = (\psi \circ \varphi^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega$

$\varphi^{-1*}\omega = h^*(\psi^{-1})^*\omega = \beta(h(x))\, dh_1 \wedge dh_2 \wedge \ldots \wedge dh_n = \beta \circ h(x)\, J_*(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$\displaystyle\int_{\psi(K)} \psi^{-1*}\omega = \int \beta(y)\, dy_1 \ldots dy_n = \int_{\varphi(K)} \beta(h(x))\, J_*(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\varphi(K)} \alpha(x)\, dx \ldots d =$

$\displaystyle = \int_{\varphi(K)} (\varphi^{-1})^*\omega$

- $\int \omega = \int \Sigma \mu\, \omega$
- Жарані орієнт многовиди

Т. Стокса

н. з межею

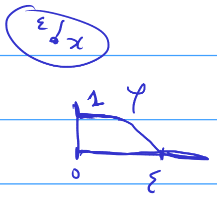
$\boxed{\int_M \omega}$ M^n, $\omega \in \Omega^n(M)$

$\int$ нерчого і зразу розд по мірі від диф. форм

Лема 1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ і $\varepsilon > 0$ $\exists$ C^∞ ф-я $\delta : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ така, що

$\delta > 0$ на відкр. шарі $\mathring{B}_\varepsilon(x)$

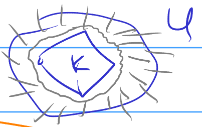
$\delta = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus \mathring{B}_\varepsilon(x)$



$\delta(x) = \varphi(\|x\|)$

Лема 2 Нехай K - комп. підмножина в $\mathbb{R}^n$ і U - $\forall$ відкр. окіл K

Тоді $\exists$ C^∞ ф-я $\delta : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ така, що



① $\delta > 0$ на K

② $\operatorname{supp}\delta$ - компактний і міститься в U

$\bigcup \mathring{B}_{\varepsilon}(x_i) \supset K$

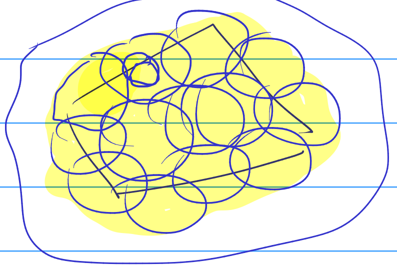
$\Downarrow$ Візьмемо скінченне покриття K шарами $B_i = B_{\varepsilon_i}(x_i)$ $i = 1 \ldots m$

$B_{\varepsilon_i}(x_i) \subset U$

За лемою 1 $\exists$ C^∞ ф-я $\delta_i : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

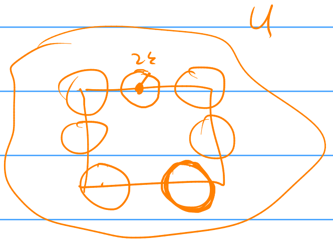
$\delta_i > 0$ на $\mathring{B}_i$ $\delta_i = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus \mathring{B}_i$

Тоді покладемо $\delta = \sum \delta_i$



$\Uparrow$

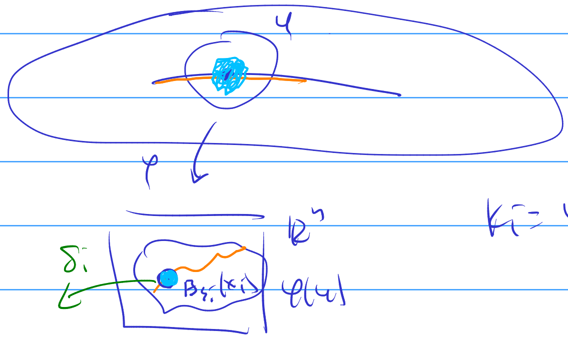
Лема 3 Лема 2 вірна якщо $K \subset$ многовиду M



$\Downarrow$ $\exists$ скінченне число компактів $K_1 \ldots K_a$

таких, що ① K_i міститься в деякій карті (U_i, φ_i)

② $K \subset \bigcup_{i=1}^{a} K_i$



$\exists$ C^∞ ф-я $\delta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\delta_i > 0$ на $\mathring{B}_{\varepsilon_i}(x_i)$

$\delta_i = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_i}(x_i)$

$K_i = \varphi^{-1}(B_{\varepsilon_i}(x_i))$

гладкість δ_i означає, що

$\delta_i \circ \varphi_i \in C^\infty$ на M

$\delta = \sum_{i=1}^{a} \delta_i \circ \varphi_i$ - шукана ф-я.

$\Uparrow$

Лема 4 Нехай M - комп. многовид і $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{s}$ - скінченне відкрите покриття M

Тоді $\exists$ скінченне число C^∞ ф-й $\mu_j : M \to [0, 1]$ $j = 1 \ldots a$ такі, що розбиття одиниці

① supp μ_j міститься в деякому U_i

② $\forall x \in M \ \exists \mu_j : \mu_j(x) > 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} \bigcup \operatorname{Int} \operatorname{supp} \mu_j = M$

③ $\sum \mu_j(x) \equiv 1 \quad \forall x \in M$

$\mu_i(x) > 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Int} \operatorname{supp}$

$\operatorname{supp} \mu = \overline{\mu^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)}$

⇓ Покриваємо M скінченним числом компактів K_j $j = 1 \dots q$

$\forall j \ \exists i(j) \ K_j \subset U_{i(j)}$ для деяких $i(j)$

будуємо ф-ю $\delta_j : M \to [0, +\infty)$

$\delta_j > 0$ на K_j

$\operatorname{supp} \delta_j \subset U_{i(j)}$

Покладемо: $\mu_j = \dfrac{\delta_j}{\sum_{l=1}^{q} \delta_l}$ ⇑

④ можна вважати, що ф-й μ стільки ж скільки U_i тобто $q = s$

Всі компакти K_i впорядкуємо так, щоб виконувались включення

$K_1 \dots K_{t_1} \subset U_1$

$K_{t_1+1} \dots K_{t_2} \subset U_2$

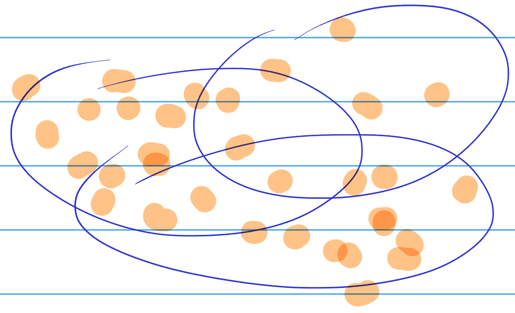
…

$K_{t_{s-1}} \dots K_{t_s} \subset U_s$

$\mu'_1 = \mu_1 + \dots + \mu_{t_1}$

$\mu'_2 = \mu_{t_1+1} + \dots + \mu_{t_2}$

…



$\boxed{\mu_1, \mu_2 \geq 0}$

$\operatorname{supp}(\mu_1 + \mu_2) = \operatorname{supp} \mu_1 \cup \operatorname{supp} \mu_2$

Лема 5 Нехай M – зв'язний комп. C^∞ многовид, $\dim M = m$. Наст. умови еквівалентні

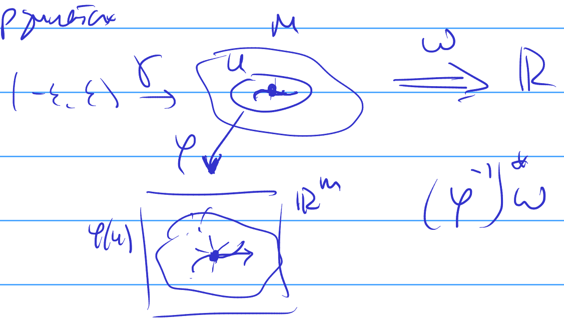
① M – орієнтовний

② $\exists$ диф. m-форма $\omega : \underset{m}{\oplus} TM \to \mathbb{R}$ "скрізь відмінна від нуля"

C^∞ xTM

$\forall x \in M \ \omega|_{\oplus T_x M} : \oplus T_x M \to \mathbb{R}$ – ненульова n-форма

"В локальних координатах"



$(\varphi^{-1})^* \omega$ – m-форма на $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^m$

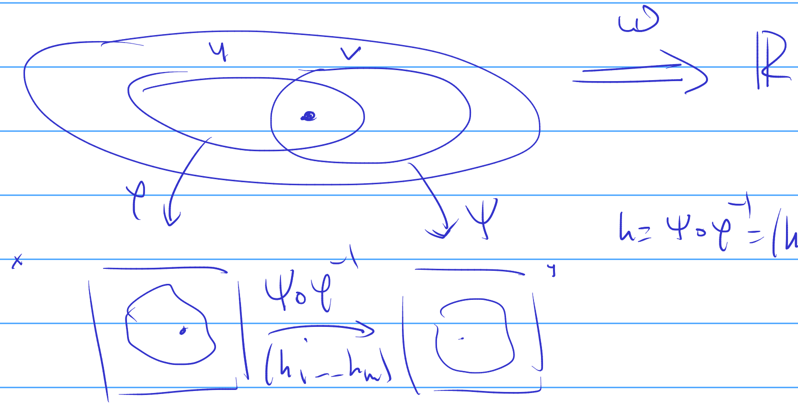
$\underset{m}{\oplus} T\mathbb{R}^m$

$(\varphi^{-1})^* \omega(x) = \alpha(x) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ де $\alpha \in C^\infty(\varphi(U))$

$$(\varphi^{-1})^*\omega : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{m}}_{\bigoplus_m T\mathbb{R}^m} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, v_1, \dots, v_m) = \alpha(x) \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix}$$

Умова ② $\omega \neq 0$ скрізь означає, що $\alpha \neq 0$

$\Downarrow$



$h = \psi \circ \varphi^{-1} = (h_1 \dots h_m)$

$(\varphi^{-1})^*\omega = \alpha(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \qquad (\psi^{-1})^*\omega = \beta(y)\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$

$$(\varphi^{-1})^*\omega = (\underset{h}{\psi \circ \varphi^{-1}})^* \left((\psi^{-1})^*\omega \right) = (\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})^*\omega$$

$$h^*(\psi^{-1})^*\omega = \beta(h(x))\, dh_1 \wedge \dots \wedge dh_m = \underbrace{\beta(h(x))\, J_x(h)}_{\alpha(x)} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

Лема 5. Доведення.

Дост. Припустимо, що $\exists\, \omega \in \Omega^m(M)$ $\omega \neq 0$ скрізь на M

Покажемо, що $\exists$ орієнтований атлас на M $\{U_i\, \varphi_i\}$

тобто $\forall\, i, j$

якщо $U_i \cap V_j \neq 0$, то $\forall\, x \in \varphi_i(x)$ має місце $|J_x(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})| > 0$

$\omega \neq 0 \Rightarrow$ Нехай $(U_i\, \varphi_i)$ - атлас на M такий, що всі U_i - зв'язні

$(\varphi_i^{-1})\omega = \alpha(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \qquad \alpha \neq 0$

а тому $\alpha > 0$ на $\varphi_i(U_i)$ або $\alpha < 0$ на $\varphi_i(U_i)$

$U = \overset{A}{\bigcirc} \; \overset{B}{\bigcirc}$

$\downarrow$

$(U\varphi) \Rightarrow^{\varphi} (A, \varphi(A)), (B, \varphi(B))$

Якщо $\alpha < 0$ то нехай $\varepsilon : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$\varepsilon(x_1 \dots x_m) = (-x_1, x_2 \dots x_m)$

$\varphi_i \to \varepsilon \circ \varphi_i \qquad (\varepsilon \circ \varphi_i)^*\omega = \underbrace{-\alpha(x)}_{\vee 0}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$

$U_+ \sqcup U_-$

Тоді атлас $\{(U_i\, \varphi_i)\}$ орієнтований. Дійсно

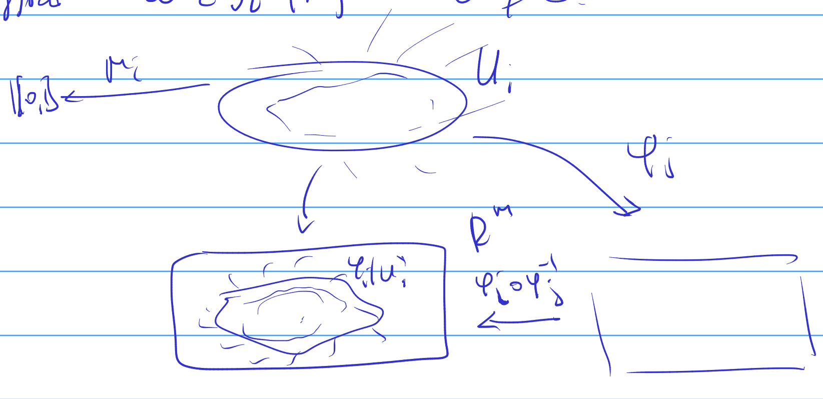
$q \in U_i \cap U_j$ $(\varphi_i^{-1})^* \omega = \alpha(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ $\alpha > 0$

$(\varphi_j^{-1})^* \omega = \beta(y)\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$ $\beta > 0$

$$\underset{\underset{0}{\vee}}{\alpha(x)} = \underset{\underset{0}{\vee}}{\beta}\left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x)\right) J \times \underbrace{\left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\right)}_{\underset{0}{\vee}} \qquad \boxed{x = \varphi_i(q)}$$

Навпаки Нехай M має орієнтовний атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Потрібно побудувати $\omega \in \Omega^m(M)$ $\omega \neq 0$.

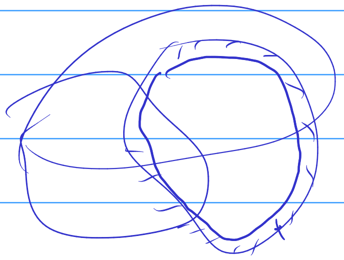
M - комп. і $\{(U_i, \varphi_i)\}$ - скінчений



$\omega_i = (\mu_i \circ \varphi_i)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$

Нехай $\mu_i : M \to [0,1]$ - розб. одиниці підпорядковане покриттю $\{U_i\}$

$\mu_i \in C^\infty$ $\operatorname{supp} \mu_i \subset U_i$ компакт $\bigcup \operatorname{int} \operatorname{supp} \mu_i = M$



$\mu_i \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \to [0,1]$

$$\boxed{\omega_i = \overbrace{\mu_i \circ \varphi_i^{-1}}^{\geq 0} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m}$$

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \omega_i = \mu_i \circ \varphi_j^{-1}(\cdot)\, \underset{\underset{0}{\vee}}{J}\left(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m = \overset{\geq 0}{\lambda_{ij}}\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$$

бо атлас орієнтований

ω_i - визн. на $\varphi_i(U_i)$ і має комп. носій

$\varphi_i^*(\omega_i)$ - коректно визн. форма на M

Тоді $\omega = \sum_i \varphi_i^*(\omega_i)$ має дод. коеф. у всіх картах

$\omega \neq 0$ скрізь ⇑

$$\dots \to \Omega^{m-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \xrightarrow{d} 0$$

$\omega \neq 0$ $\quad\omega$ – замкнена $\in H^m_{dR}(M)$

M – орієнт.

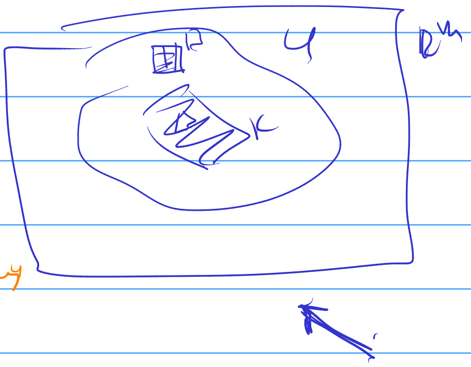
M – орієнт. зв'язний компакт $\quad H^m_{dR}(M) \simeq \mathbb{R}$

Інтеграли від диф. форм

M – m-многовид $\quad \omega \in \Omega^m(M) \quad \int_M \omega$

① Нехай $U \subset \mathbb{R}^m$, $K \subset U$ – компакт і ω – m-форма на U

$\omega = \alpha(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$

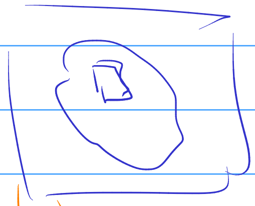


K – область з комп. замиканням

$$\int_K \omega := \int_K \alpha(x)\, \underbrace{dx_1 \dots dx_m}_{\text{елемент об'єму}}$$

$h_1 \dots h_m$

$h : V \to U$ – дифеоморфізм



$$\int_{h^{-1}(K)} h^*\omega = \int_{h^{-1}(K)} \alpha(h(y)) \cdot J_y(h)\, dy_1 \dots dy_m$$

$\parallel$ якщо $J_y(h) > 0$

$$= \int_K \alpha(x)\, dx_1 \dots dx_m = \int_K \omega.$$

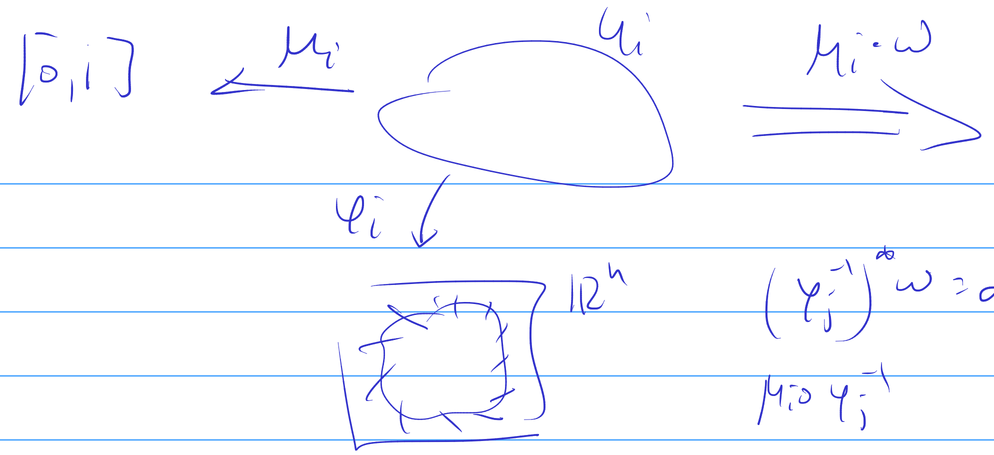
орієнтований атлас

Нехай $\{U_i\}$ – скін. покриття M лок. картами $\quad \omega$ – m-форма

Нехай $\mu_i : M \to [0,1]$ – розб. одиниці підпорядк. $\{U_i\}$

$\sum \mu_i \equiv 1 \quad \operatorname{supp} \mu_i \subset U_i \quad \bigcup \operatorname{Int} \operatorname{supp} \mu_i = M$

$\mu_i \in C^\infty(M) = \Omega^0(M) \quad \mu_i \cdot \omega = \mu_i \wedge \omega$ – форма з носієм в U_i



$(\varphi_i^{-1})^*\omega = \alpha(x)\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$

$\mu_i\circ\varphi_i^{-1}$

$$(\varphi_i^{-1})^*(\mu_i \overset{}{\underset{\wedge}{}}\omega) = (\varphi_i^{-1})^*\mu_i \wedge (\varphi_i^{-1})^*\omega = (\mu_i\circ\varphi_i^{-1})\cdot(\varphi_i^{-1})^*\omega$$

$$= (\mu_i\circ\varphi_i^{-1})(x)\cdot\alpha(x)\cdot dx_1\wedge\dots\wedge dx_m$$

Треба фіксувати атлас

$$\int_M\omega := \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\mu_i\circ\varphi_i^{-1})(x)\,\alpha(x)\,dx_1\dots dx_n = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^*(\mu_i\omega)$$

Покажемо, що $\int_M\omega$ не залежить від ~~покриття~~ узгодж. орієнтов. атласу $\{(U_i,\varphi_i)\}$ і розб. одиниці μ_i.

Нехай (V_j,ψ_j) – інше сім. покриття картами, і $\vartheta_j : M\to[0,1]$ – розб. одиниці підпорядков. $\{V_j\}$

$$\underline{\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^*(\mu_i\omega)} = \underline{\sum_j \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_j^{-1})^*(\vartheta_j\omega)}$$

$\operatorname{supp}(\mu_i\cdot\vartheta_j) \subset U_i\cap V_j$

$\sum\mu_i \equiv \sum\vartheta_j \equiv 1$

$\sum_i\sum_j \mu_i\vartheta_j \equiv 1$

$$\underline{\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^*\Big(\mu_i\Big(\sum\vartheta_j\Big)\cdot\omega\Big)} = \sum_{i,j} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}(\varphi_i^{-1})^*\mu_i\vartheta_j\omega}$$

узг. орієнт. атласів

$$= \sum_{i,j}\overbrace{\int_{\mathbb{R}^n}(\psi_j^{-1})^*\mu_i\vartheta_j\omega}$$

$$= \sum_j\int_{\mathbb{R}^n}(\psi_j^{-1})^*\Big(\sum_i\mu_i\Big)\cdot\vartheta_j\omega = \underline{\sum_j(\psi_j^{-1})^*(\vartheta_j\omega)} = \overset{\text{від } (V_j,\psi_j)}{\int_M\omega}$$