$\mathbb{R}^n$ множина впорядкованих базисів $/\sim$

$e = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$
$f = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ $\Big\}$ $\exists!\ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$L(e_i) = f_i$

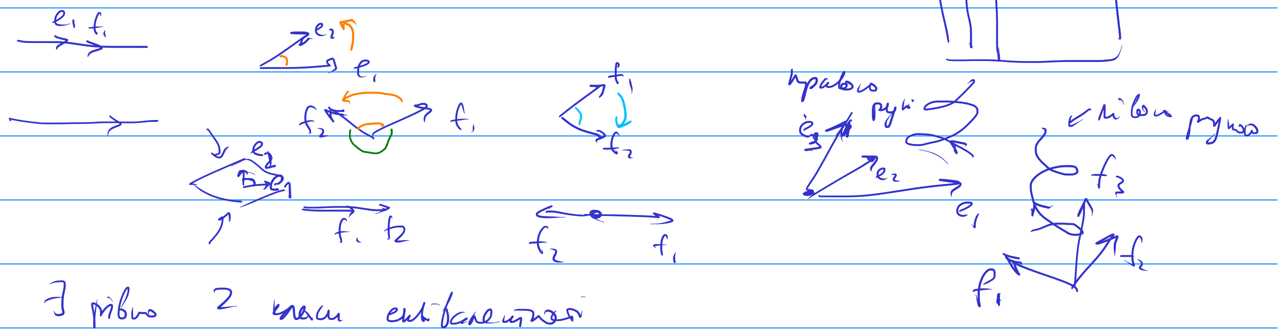
$f \sim e \iff |L| > 0$

"f і e" задають однакову орієнтацію

$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots \end{pmatrix}$

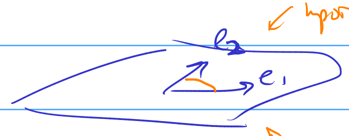
$\langle e_1, e_2 \rangle$

$\langle e_2, e_1 \rangle$



Лема ∃ рівно 2 класи еквівалентності

Вибір орієнтації - це "називання" одного класу додатнім
а іншого від'ємним

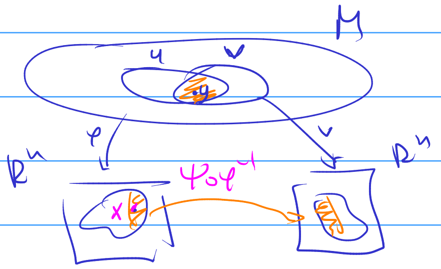


проти год. стрілки якщо дивитись зверху

за год. стрілкою

Нехай M - многовид класу C^k, $k \geq 1$

Атлас α на M назив. орієнтованим, якщо $\forall$ карт (U, φ) $(V, \psi) \in \alpha$ таких що $U \cap V = \emptyset$ $\forall\ x \in \varphi(U)$ відобр. $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ має додатній якобіан в т. x $|J_x(\psi \circ \varphi^{-1})| > 0$



$\varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$

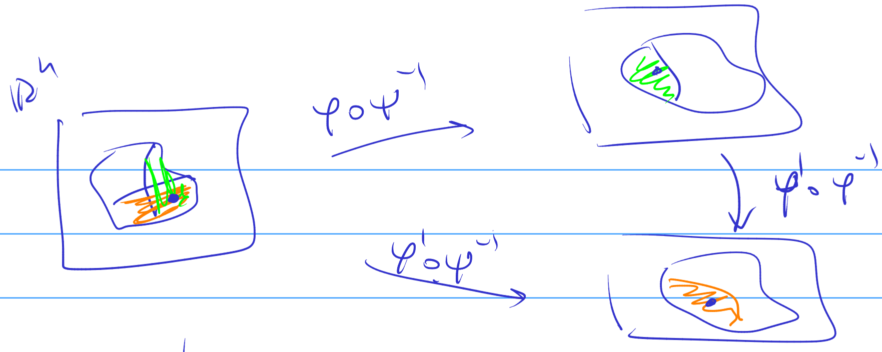
M - орієнтовний, якщо на ньому існує орієнтований атлас

Лема Нехай α - орієнтований атлас на M і (V, ψ) - карта яка узгоджена з α. Тоді $\forall\ y \in V$ і $\forall$ карт $(U, \varphi) \in \alpha$ таких, що $y \in U \cap V$ знак якобіана $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ в т. $\psi(y)$ не залежить від U

$\Downarrow$

$$\begin{tikzcd} & \varphi \\ \psi \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \varphi' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (U, \varphi) \in \alpha \\ (V, \psi) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (U', \varphi') \in \alpha \end{tikzcd}$$



$$\operatorname{sign}\left|J_{\psi(y)}(\varphi\circ\psi^{-1})\right| = \operatorname{sign}\left|J_{\psi(y)}(\varphi'\circ\psi^{-1})\right|$$

$$\varphi\circ\psi^{-1} = \varphi\circ(\varphi')^{-1}\circ(\varphi'\circ\psi^{-1})$$

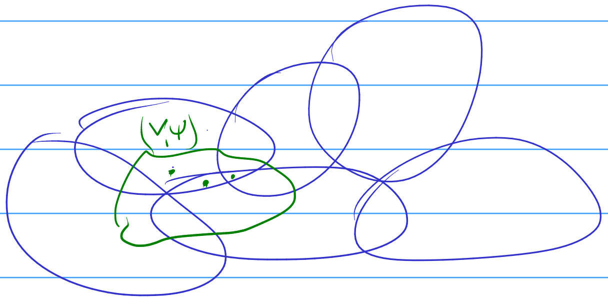
$$J_{\psi(y)}(\varphi\circ\psi^{-1}) = \underset{\varphi'(y)}{J}(\varphi\circ(\varphi')^{-1})\cdot \underset{\psi(y)}{J}(\varphi'\circ\psi^{-1})$$

Оскільки α-орієнт. атлас (U,φ) $(U',\varphi')\in\alpha$ то ≥ 0

Наслідок. Мн-на точок $y\in V$ в яких знак ≥ 0 – відкрита; < 0 теж відкрита) $V = V_+ \sqcup V_-$

тому V_+ і V_- – також замкнені

$V_+ = V \setminus V_-$



$$\xi = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

② Нехай $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \xi(x_1, x_2 \dots x_n) = (-x_1, x_2 \dots x_n)$ $\quad |\xi| = -1$

Лема Нехай α – орієнтований атлас і (V,ψ) – зв'язна карта узг. з α тоді $\forall\, y\in V$ знаки якобіанів переходу з V до $(U,\varphi)\in\alpha$ однакові

① Якщо такі знаки < 0 то $\alpha\cup\{(V, \xi\circ\psi)\}$ – орієнтов. атлас

> 0 то $\alpha\cup\{(V,\psi)\}$ – орієнт. атлас

② Більш загально V – незв'язна $V = V_+ \sqcup V_-$

$\alpha\cup\{(V_+, \psi|_{V_+}), (V_-, \xi\circ\psi|_{V_-})\}$ – орієнтований атлас

$$\alpha = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I} \Rightarrow L = \bigsqcup U_i \times \{\pm 1\} \big/ \sim$$

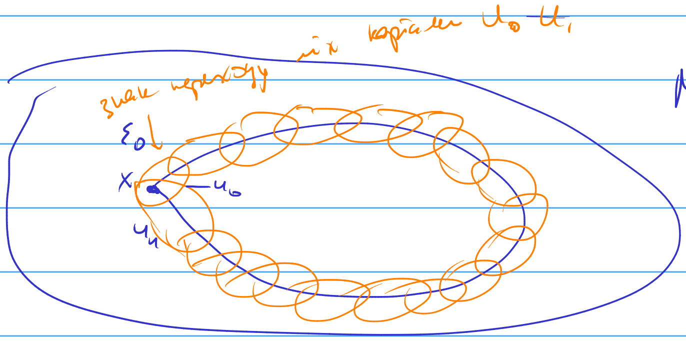
$x \in U_i \cap U_j$

$(x, \varepsilon) \sim (x, A\varepsilon)$

де $A = \operatorname{sign}\left|J_{\varphi_i(x)}(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})\right|$

Теорема Нехай M - зв'язний многовид. Тоді

M - орієнтовний $\Longleftrightarrow$ $L/_{\sim} = M \sqcup M$ $\Longleftrightarrow$ $L/_{\sim}$ незв'язний



M - зв'язний

$\gamma : [0,1] \to M$

$\gamma(0) = \gamma(1)$

$U_0 \quad U_1 \quad \dots \quad U_n$ $\qquad U_i \cap U_{i+1}$ - перетин зв'язний

$x \in U_0 \cap U_n$ $\qquad \gamma([0,1]) \subset \bigcup U_i$ $\qquad \gamma([0,1]) \cap U_i$ - зв'язн

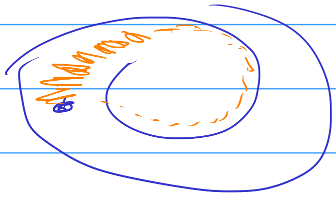
$\gamma([0,1]) \cap (U_i \cap U_{i+1})$ - зв'язний

$U_i \cap U_{i+1} \to$ знак переходу ε_i $\qquad \varepsilon_n$ - перехід від $U_n \to U_0$

$$\varepsilon_\gamma = \prod_{i=0}^{n} \varepsilon_i$$

M орієнтовні $\Longleftrightarrow$ $\forall \gamma$ $\quad \varepsilon_\gamma \equiv 1$

M - неорієнт $\Longleftrightarrow$ $\exists \gamma$ $\quad \varepsilon_\gamma = -1$

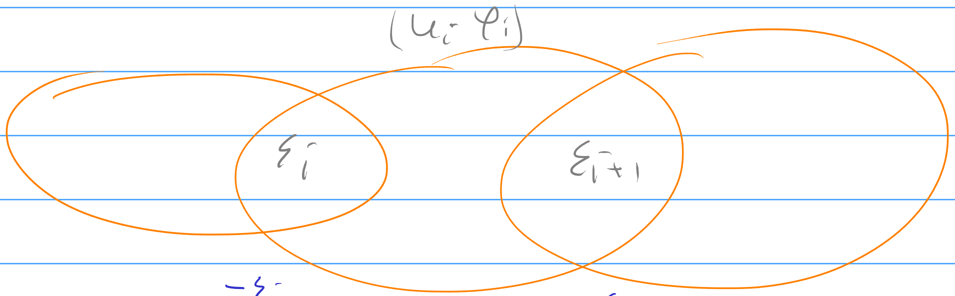


$(U_i \, \varphi_i)$

$\prod \varepsilon_\gamma$

$\|$

$\prod \varepsilon_j$



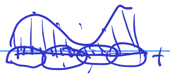
$(U_i, \varepsilon \circ \varphi_i)$

Розбиття одиниці

$\mathbb{R}^n \qquad x = \sum \alpha_i e_i$

$\mathbb{R}^{\text{континуум}}$

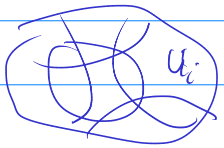
$C^k[0,1]$

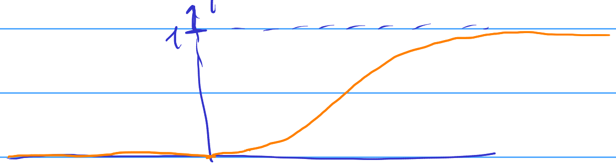


① Функції з компактним носієм

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \alpha(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

f





$f = \sum f_i$

f_i "зконцентрована на засоні U_i"

Лема $\alpha \in C^\infty$

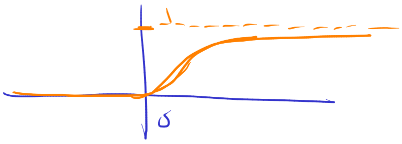
$\alpha' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(- \frac{-2}{x^3} \right) =$ $= -\infty$

$\alpha' \longrightarrow e^{\boxed{-\frac{1}{0}}} \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3 e^\infty} \to 0$

$\alpha^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{p(x)}{x^{n+2}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

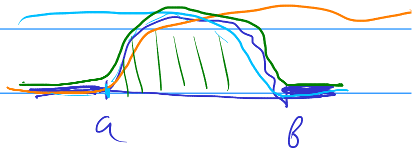
$\operatorname{supp}\alpha=[0;+\infty)$

$\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad \alpha(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$



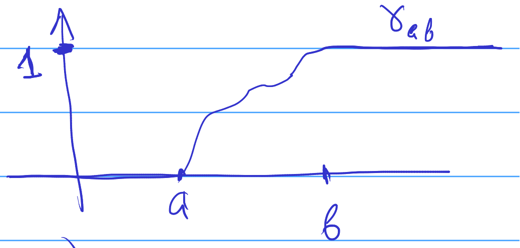
$\operatorname{supp}\beta_{ab}=[a,b]$

$\beta_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad \beta_{ab}(x)=\underline{\alpha(x-a)}\cdot\underline{\alpha(b-x)}.$



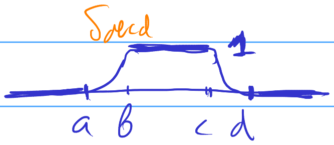
$\gamma_{ab}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad \gamma_{ab}(x)=\int_{-\infty}^{x}\beta_{ab}(s)\,ds\Big/\int_a^b\beta_{ab}(s)\,ds$

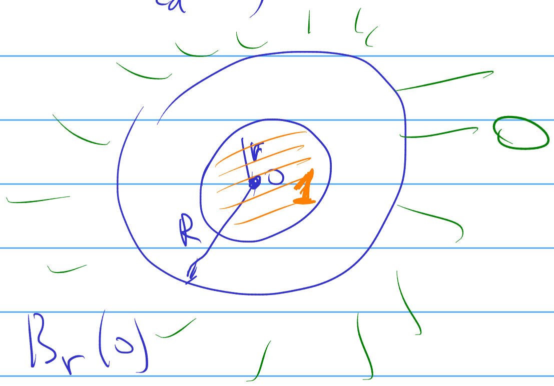
$\operatorname{supp}\gamma_{ab}=[a;+\infty)$



$\operatorname{supp}\delta_{abcd}=[a,d]$

$\delta_{abcd}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad \delta_{abcd}(x)=\gamma_{ab}(x)\cdot(1-\gamma_{cd}(x))$

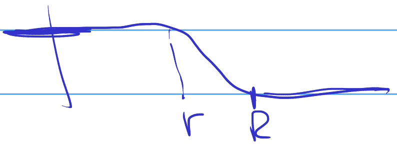


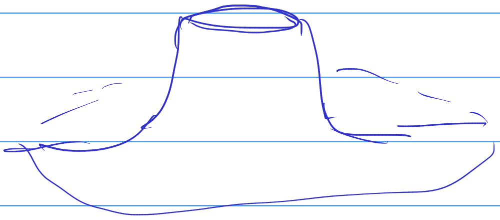


$\delta:\mathbb{R}^n\to[0,1)$ $\qquad \delta=1$ на $B_r(0)$

$\delta=0$ на $B_R(0)$

$\delta(x)=1-\gamma_{r,R}(|x|)$





Нехай $f:X\to\mathbb{R}$ – непер. ф-я. X – топ. пр-р

Носій f, це така мн-на

$\boxed{\text{support}}$ $\qquad \operatorname{supp}(f):=\overline{f^{-1}(\mathbb{R}\setminus 0)}=\overline{\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}}$

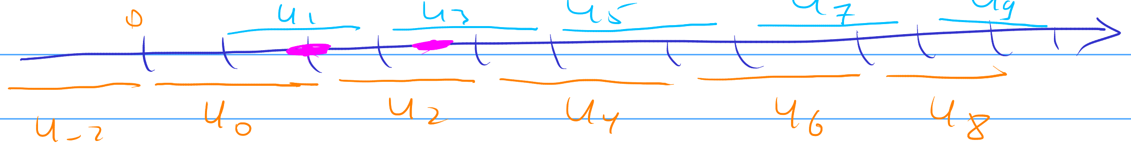
$$\operatorname{supp}(\delta)=\overline{\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n\mid \delta(x)>0\}}_{\mathring{B}_R(0)}}=B_R(0)$$

Нехай X – топ. пр-р і $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ – відкрите покриття X

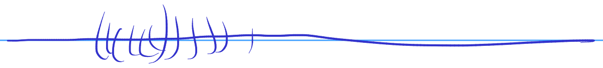
тобто $U_i\subseteq X$ – відкрите і $X=\bigcup\limits_i U_i$

Покриття $\mathcal{U}$ назив локально скінченним якщо $\forall x\in X$ $\exists$ окіл V який перетинає тільки скінченне число елементів з $\mathcal{U}$.

Приклад $X=\mathbb{R}$ $U_i=(i,i+2)$ $i\in\mathbb{Z}$ – локально скінченне



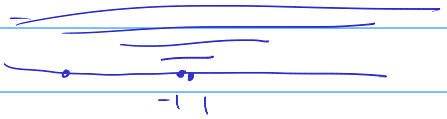
$X=\mathbb{R}$ $\{U_i=(i,i+a)\}$ $i\in\mathbb{R}$
$a>0$



~~to~~

$(i,i+2)\subset(-i+2,i+2)$

$X=\mathbb{R}$ $\{U_i=(-i,i)\}$



не локально скінченне

Озн. Топ пр-р X назив паракомпактним якщо в кожне його відкрите покриття можна вписати локально скінченне покриття

?

$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ $\mathcal{V}=\{V_j\}_{j\in\Omega}$

$\mathcal{U}$ вписане в $\mathcal{V}$ якщо кожен U_i міститься в деякому V_j

позначаємо $\mathcal{U}\prec\mathcal{V}$

Теорема (Стоун) Кожен метричний простір є паракомпактним.

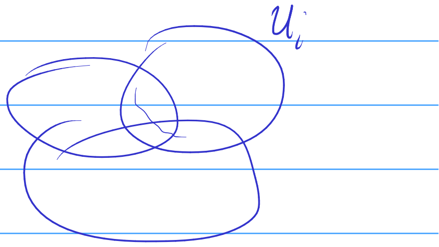
Нехай X – топ. простір і $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ – лок. скінченне відкрите покриття

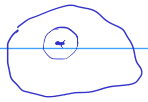
Сім'я неперервних ф-й $\mu_i : X \to [0,1]$ $i\in\Lambda$ називається розбиття одиниці підпорядковане $\mathcal{U}$ якщо

① $\operatorname{supp} \mu_i \subset U_i$

② $\{\operatorname{Int} \operatorname{supp} \mu_i\}$ – є покриттям

③



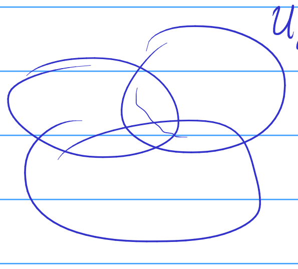


Нехай X – топ. простір

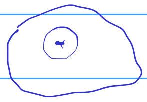
Сім'я неперервних ф-й $\mu_i : X \to [0,1]$ $i\in\Lambda$ називається розбиття одиниці якщо

① $\{\operatorname{Int} \operatorname{supp} \mu_i\}$ – є локально скінченним покриттям

② $\sum\limits_i \mu_i(x) \equiv 1$



$x\in X$ то $\exists$ скін. число ф-й μ_i $\mu_i(x)\neq 0$



Ⓐ Нехай $\mu_i : X \to [0,+\infty)$ задов. ①
$\{\operatorname{Int} \operatorname{supp} \mu_i\}$ – лок. скін. покр.

Тоді

$$\mu(x) = \sum_i \mu_i(x) > 0 \quad \text{неперервна}$$

Визн. $\gamma_i : X \to [0,1]$ $\qquad \gamma_i(x) = \dfrac{\mu_i(x)}{\sum\limits_j \mu_j(x)}$

Тоді $\{\gamma_i\}$ – розб. одиниці на X
тобто задов ① і ②

$\operatorname{supp} \gamma_i = \operatorname{supp} \mu_i$

Теорема Нехай X — топ. пр і $\mathcal{U} = \{U_i\}$ — відкрите покриття X

Якщо X — паракомпактний + нормальний

то $\exists$ розбиття одиниці

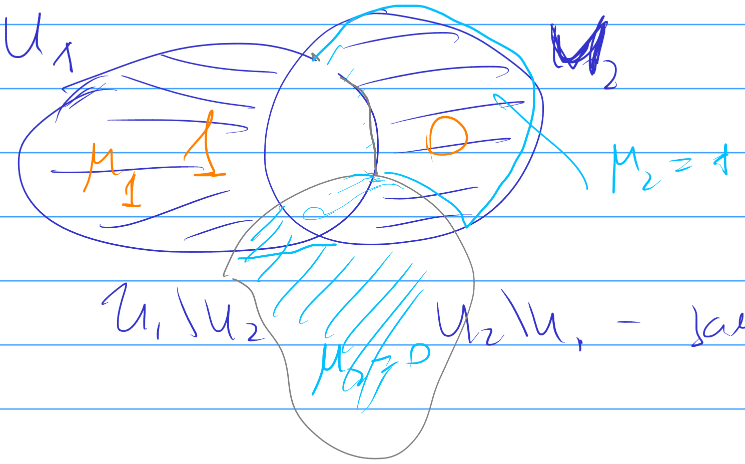
$\bar{A}$ $\bar{B}$ $\exists$ непер ф-я
$\gamma : X \to [0,1)$
$\gamma(A) = 0$
$\gamma(B) = 1$

$$\mu = \{\mu_j : X \to [0,1]\}_{j \in \Omega}$$

Такі, що $\{\text{int supp } \mu_j\} \angle \mathcal{U}$

тобт $\forall j \in \Omega \; \exists i_j \in \Lambda : \; \text{supp } \mu_j \subset U_{i_j}$

[Довести теорему якщо X має зліченну базу.



$U_1 \setminus U_2$ $U_2 \setminus U_1$ — замкн множини які не перет

Наслідок Нехай M — C^k многовид і $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ — атлас

тоді $\exists$ розб. одини $\mu_j : M \to [0,1]$

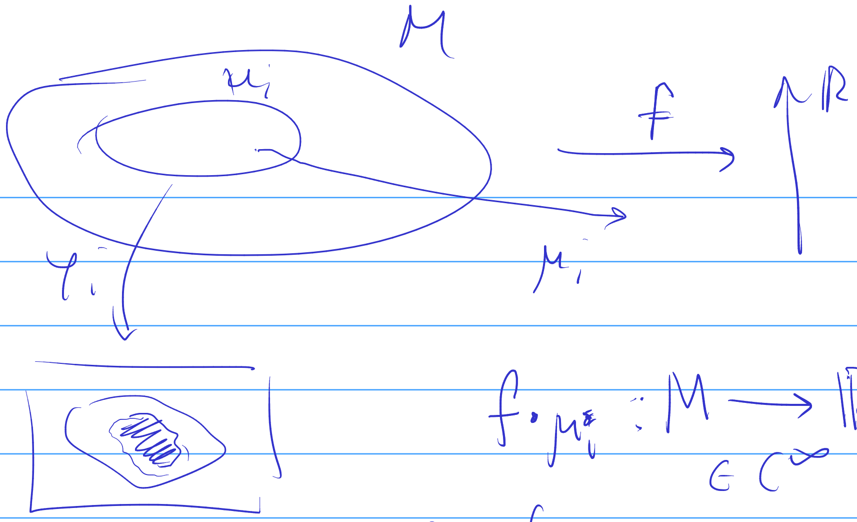
① $\text{supp } \mu_j \subset U_{i_j}$

② $\text{supp } \mu_j$ — лок скінч покриття

③ $\mu_j \in C^\infty$

$f : M \to \mathbb{R}$ — C^∞ ф-я $\quad (\{U_i, \varphi_i\})$ — атлас C^∞

$\{\mu_j : M \to [0,1]\}$ — розб. одиниці підпор U_i



$f \cdot \mu_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$
$\in C^\infty$

$\mathrm{supp}\, f\mu_i \subset U_i$

$$\boxed{f = \sum_i f\mu_i} = f \cdot 1 = f \cdot \sum \mu_i = \sum f\mu_i$$

$$\int f = \sum \int \left(f \circ \varphi_i^{-1} \cdot \mu_j \circ \varphi_j^{-1} \right)$$

Krasu Whitneyove třídy $H^1(M, \mathbb{Z}_2) \ni \omega_1$

M-orient. $\Longleftrightarrow \omega_1 = 0$

$\pi_0\, GL(\mathbb{R}, n)$ >0 <0 M

$\pi_1\, GL(\mathbb{R}, n)$ $Q \subset \bigoplus_n TM = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n} = \mathrm{mat}(n \times n) \cup GL = \mathbb{R}^{n^2} \setminus X$ $\det = 0$

$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}_2$ ... M