① Диф. форми в $\mathbb{R}^n$ $\quad \alpha\, dx_A$

② Косими форми в $\mathbb{R}^n$ $\quad \Lambda\ L^*(\omega)\ \ \omega(v_1,\dots,v_k)$

③ $M \quad \ni x \quad T_xM \quad \bigcup_{x\in M} T_xM = TM \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$

$N \xrightarrow{f} M$

$x \quad f(x) \quad T_xN \to T_{f(x)}M$

$\oplus T \xrightarrow{\oplus Tf} \oplus TM \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$

$d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M) \quad d\circ d = 0$

Комбінації операції $\quad d(\alpha\wedge\beta) \quad d\,L^*(\omega) = L^*(d\omega)$

$d\alpha\wedge\beta + (-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge d\beta$

Magic Cartan formula $\quad \mathcal{L}_X\omega = d(i_X\omega) + i_X(d\omega)$

Інтегрування диф. форм

- Лема Пуанкаре = "повільна форма при гомотопії"

$h: M\times[0,1] \to N$

$h^*(\omega)_t \qquad \omega$

Теорема Стокса $\quad \int_A d\omega = \int_{\partial A}\omega$

Послідовність Майєра Вієторіса

- Многовиди з краєм
- Орієнтовані многовиди

① $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – лінійна ф-я $\quad (\alpha\wedge\beta)(u,v) = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u)$

Вуі $\quad \alpha\wedge\alpha = 0$

$(\alpha\wedge\alpha)(u,v) = \alpha(u)\alpha(v) - \alpha(v)\alpha(u) \equiv 0$

② Аналог теореми Веєрштрасса для диф. форм (C^k – Лема Адамара)

(многочлен)

Т. Веєрштрасса $\quad f(x)$ – многочлен, якщо $f(x)=0$ or $f(x) = x\cdot g(x)$ g – многочлен

Λ. Adamar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(0)=0$ $f\in C^k$, $k\geq 1$

Tada $f(x)=x\cdot g(x)$, za $g\in C^{k-1}$ i $g(0)=f'(0)$

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt = \left| \begin{matrix} t=s\cdot x \\ t\in[0,x] \\ s\in[0,1] \end{matrix} \quad dt=x\,ds \right| = \int_0^1 f'(sx)\cdot x\,ds =$$

$$= x\cdot \underbrace{\int_0^1 f'(sx)\,ds}_{g(x)} = x\,g(x)$$

($f'(sx)\in C^{k-1}$)

$$g(0)=\int_0^1 f'(s\cdot 0)\,ds = f'(0)\int_0^1 ds = f'(0)$$

Λ. Adamar (2) Neka $d:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – linijska forma različita od nule

i $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ C^k fja takva da $f=0$ na $d^{-1}(0)$

Tada $f(x)=d(x)\cdot g(x)$ $g\in C^{k-1}$ $d=0$ na hiperravni $d(x)=x_j$

$f(x,y)=0$ kad $x=y$ jer $f(x,y)=(x-y)\cdot g(x,y)$

$f(x,y)=0$ kad $x=0$ Tada $f(x,y)=x\cdot g(x,y)$

$$f(x,y)=f(x,y)-f(0,y)=\int_0^x f'_x(t,y)\,dt = x\int_0^1 f'_x(sx,y)\,ds$$

$\in g(x,y)$

Dal kosoh formi

Neka $\omega:(\mathbb{R}^n)^k\to\mathbb{R}$ – kosoh k-forma; $d:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – linijska (1-forma)

$(d\neq 0)$

Tada $d\wedge\omega=0 \iff \exists\,\gamma$: $(k-1)$-forma $\omega=d\wedge\gamma$

$\Leftarrow$ $\omega=d\wedge\gamma$ pa $d\wedge\omega=\underbrace{d\wedge d}_{=0}\wedge\gamma=0$

$\Rightarrow$ Zamislimo koordinate tako da $d=dx_1$

$x_1,\dots,x_n$

(x_i,dx_i)

$\in\langle x_1,\dots,x_n\rangle$

$$\omega=\sum_{|A|=k} q_A\,dx_A, \qquad dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\dots dx_{i_k}$$

$d\wedge\omega=0$ znači da $1\in A$ za svaki A: $q_A\neq 0$

pa $dx_A=dx_1\wedge(\dots)$

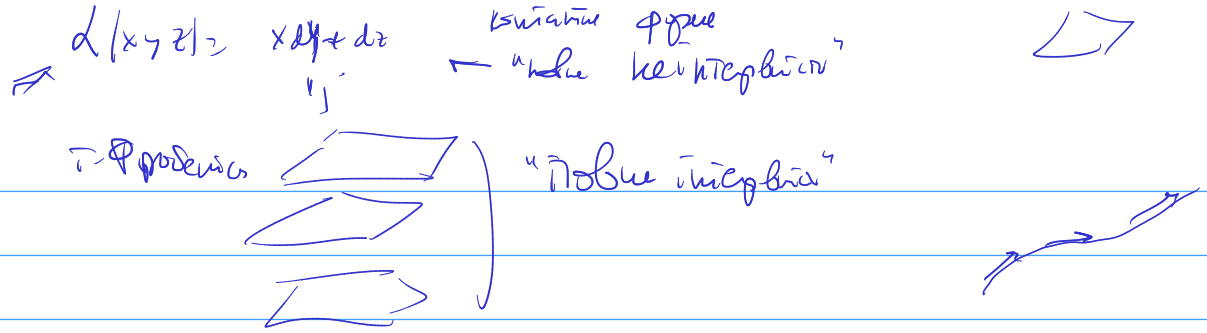
$$\omega=q_1\,dx_{A_1}+q_2\,dx_{A_2}+q_3\,dx_{A_3} \qquad A_1,A_2,A_3\neq 1$$

$$dx_1\wedge\omega=q_1\,dx_{1\cup A_1}+q_2\,dx_{1\cup A_2}+q_3\,dx_{1\cup A_3}\neq 0$$

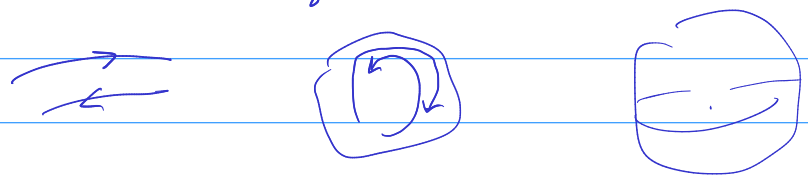
γ – neodređena $\omega=d\wedge\gamma$ $\gamma'=\gamma+s\cdot d$

$$d\wedge\gamma'=d\wedge(\gamma+sd)=\underbrace{d\wedge\gamma}_{=\omega}+s\underbrace{d\wedge d}_{=0}$$

$\omega(x)\wedge d(x)\equiv 0$



(a)
Орієнтовний циліндр



Орієнтація в $\mathbb{R}^n$. Нехай
$E = \langle e_1 \dots e_n \rangle$ $F = \langle f_1 \dots f_n \rangle$ впорядковані бази в $\mathbb{R}^n$

Перехід між ними задає матрицю $L_{E,F}$

Озн E і F визначають однакову орієнтацію якщо $|L_{F,E}| > 0$

протилежну орієнтацію якщо $|L_{E,F}| < 0$

Лема Властивість бути однаково орієнтованими - еквівалентність

⇓ Рефлекс $L_{EE} = id_{\mathbb{R}^n}$ $|id_{\mathbb{R}^n}| = 1 > 0$

Симет $|L_{EF}| = 1/|L_{F,E}|$

Транз $E \xrightarrow{L_{EF}} F \xrightarrow{L_{FG}} G$ $|L_{EG}| = |L_{EF}| \cdot |L_{FG}|$

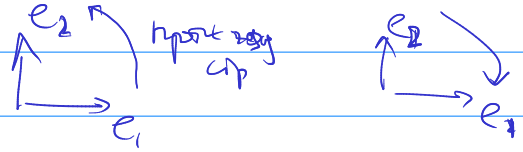
L_{EG}

Наслідок ∃ 2 класи еквівалентності базисів в $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^1$ 

$e_1 \sim f_1$

$e_1 \not\sim g_1$

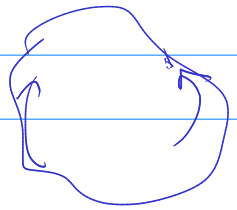
$\mathbb{R}^2$ 

проти год стр

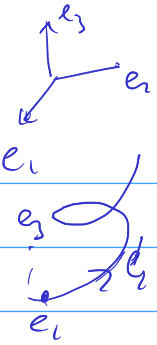
за год стр

$\langle e_1 e_2 \rangle \not\sim \langle e_2 e_1 \rangle$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$



В $\mathbb{R}^3$



$e_1 e_2 e_3$



$e_2 e_1 e_3$

Орієнтація в $\mathbb{R}^n$ це вибір класу еквівалентних базисів

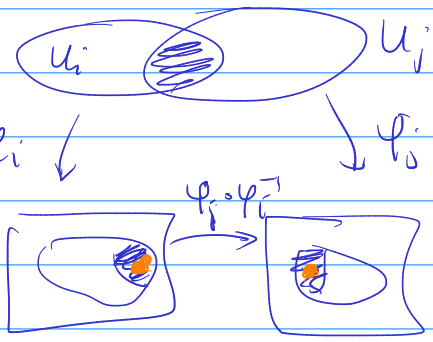
б д

Орієнтовний многовид

M - многовид, $\mathcal{A}$ - атлас C^k, $k \geq 1$, $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$

C^k M назвемо орієнтовним якщо існує C^k-атлас $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ такий, що для всіх відобр переходу $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ і $\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$

$TS^2 \oplus TS^2 \to \mathbb{R}$



$|J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})| > 0$

у всіх точках

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in C^k$, $k \geq 1$ і $|J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})|$ - невир де то

Якщо $V \subset \varphi_i(U_i \cap U_j)$ - (відкрита) зв'язна підмножина то

знак $|J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})|$ один і той самий на всій V

Зокрема знак $|J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})|$ - постійний на компонентах зв'язності $\varphi_i(U_i \cap U_j)$

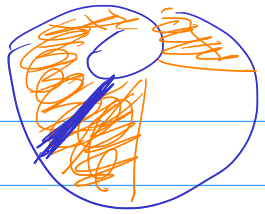
$(U_\alpha) \to (U_\beta)$ $id: \varphi(U) \to \varphi(U)$ $|J(id)| = 1 > 0$

Приклади ① Нехай $V \subset \mathbb{R}^n$ відкрита підмножина

Тоді $V\{id_V\}$ - орієнтовний многовид бо тільки одна карта

② Стрічка Мебіуса

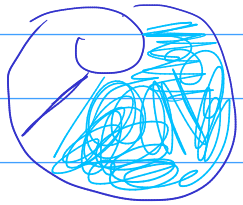




$TS^2 \oplus TS^2$ ↑ S^2

$v_1, v_2 \in TS^2_x$ — v_1 і v_2 — лін. незал.

x — неможливо



Атлас ⇒ "Орієнтовне двошарове накриття" M

інший символ $\hat{M}$

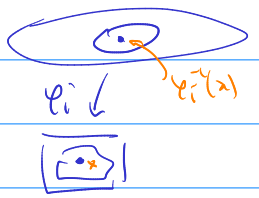
$\hat{M} \to M$, $\mathbb{Z}_2$

Теорема Якщо M — зв'язний, то M — орієнтовний $\Leftrightarrow \hat{M} = M \sqcup M$

M — неорієнтовний $\Leftrightarrow \hat{M}$ — зв'язний

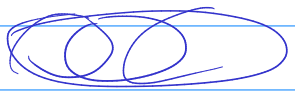
M $\alpha = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ $U = \coprod \varphi_i(U_i) \to M$

$x \in \varphi_i(U_i) \to \varphi_i^{-1}(x)$ (більше одного)



$U/\sim$ $x \in \varphi_i(U_i)$ $y \in \varphi_j(U_j)$

$x \sim y \Leftrightarrow \varphi_i^{-1}(x) = \varphi_j^{-1}(y)$



$U = \coprod U_i \to M$

$x \in U_i$, $y \in U_j$ $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ в M

$L = \coprod \varphi_i(U_i) \times \{\pm 1\}$

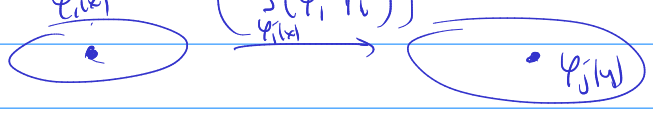
$\varphi_i(U_i) \times \{\pm 1\} \ni (x, \varepsilon)$ $(y, \delta) \in \varphi_j(U_j) \times \{\pm 1\}$

$(x, \varepsilon) \sim (y, \delta)$ якщо ① $\varphi_i^{-1}(x) = \varphi_j^{-1}(y)$

② $\varepsilon = \operatorname{sign} \left| J(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)_{\varphi_i(x)} \right| \cdot \delta$

$\hat{M} = L/\sim$

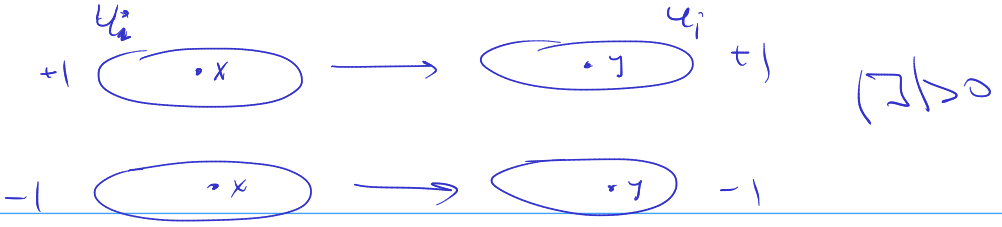
орієнтовне двошарове накриття M

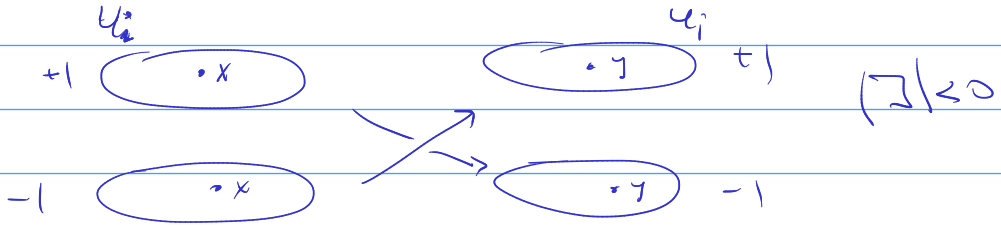


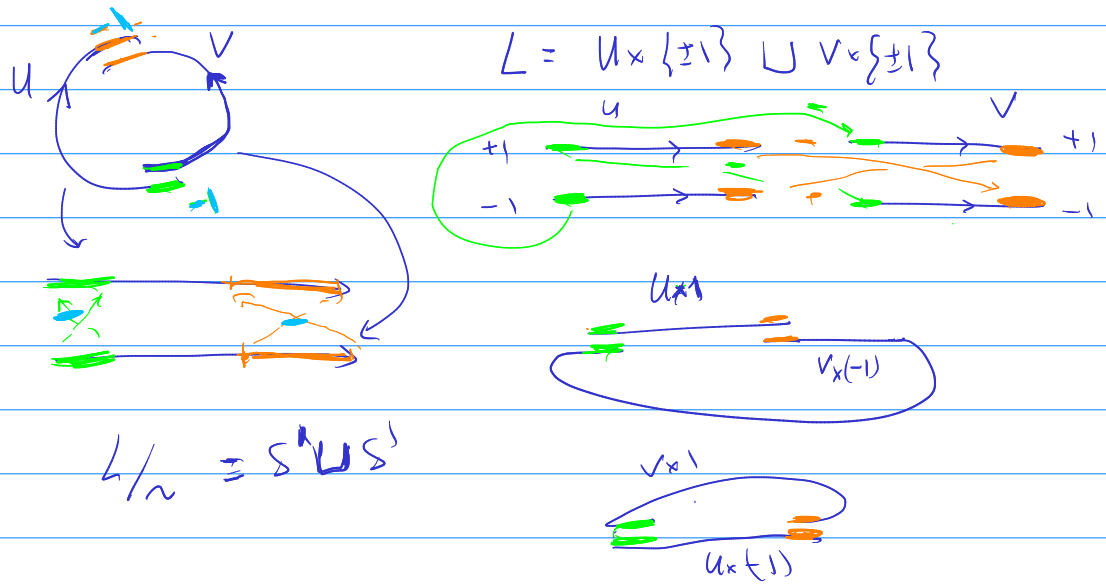
$|J| > 0$ $(x, 1) \sim (y, 1)$ $(x, -1) \sim (y, -1)$

якщо $J < 0$ $(x, 1) \sim (y, -1)$ $(x, -1) \sim (y, +1)$









Д/З Побудувати L для атласу на сфері Мебіуса

Лема $L = \bigsqcup_i \varphi_i(U_i) \times \{\pm 1\} / \sim \xrightarrow{p} M$

$(x, \varepsilon) \longrightarrow \varphi_i^{-1}(x)$

$x \in \varphi_i(U_i)$

$\leftarrow$ локальний гомеоморфізм

Існує дія групи $\mathbb{Z}_2$ на L при якій орбіти мають вигляд $x \times \{\pm 1\}$

$(x, \varepsilon) \longrightarrow (x, -\varepsilon)$

$p^{-1}(\varphi_i^{-1}(x))$

$p : L \to L/\mathbb{Z}_2 \cong M$

Лема G - група, N - підгрупа індекса 2, то N - нормальна

M - нормальний $\Rightarrow$ L - зв'язний $\quad p: L \to M$ накриття двошарове

Сюр кількість шарів в $\pi_1 M$ індекс 2

$p: L \to M$ - нар $\quad \pi_1 L \to \pi_1 M$ - ін'єкт.

$\pi_1 L$ - норм в $\pi_1 M$ тобто p - "регулярне нар"

p - регул $\exists$ гр. $\quad \pi_1 M / \pi_1 L \simeq \mathbb{Z}_2$

на L : $L / \mathbb{Z}_2 \simeq M$