Лекция 3 2024-05-19

$V = \mathbb{R}^n$ $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ – мн-ва всіх кососиметричних полілінійних ф-ій на $\mathbb{R}^n$ від k змінних

k-форма

$\omega: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$

$\omega(\dots v_i v_{i+1} \dots) = -\omega(\dots v_{i+1} v_i \dots)$

$W \xrightarrow{L} V \xrightarrow{M} U$

$\Lambda^k(W) \leftarrow \Lambda^k(V) \leftarrow \Lambda^k(U)$ $W^k \xrightarrow{L^k} V^k \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$, $L^*(\omega)$

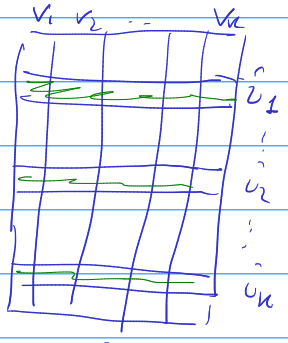
$L^*(\omega): \underbrace{W \times \dots \times W}_{k} \to \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$

$L^*(\omega)(w_1, \dots w_k) = \omega(Lw_1, \dots Lw_k)$

$V = \mathbb{R}^n$ $A = \{i_1 \dots i_k\}$ $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$

$dx_A: V^k \to \mathbb{R}$

$dx_A\left(\begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} v_k \end{bmatrix}\right) =$



Минор

$\mathrm{Fin}_k(n)$ = множина всіх k-елементних підмножин $[n] = \{1, 2, \dots n\}$

$\downarrow$

A – впорядкована за зростанням

Теорема $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ = векторний простір з базисом $\{dx_A \mid A \in \mathrm{Fin}_k(n)\}$

$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$(x+y)^k = \sum C_n^k x^k y^{n-k}$

$\omega: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$ $\omega = \sum a_A dx_A$

$\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n) = 1$ $\omega(v_1, \dots v_n) = a \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix}$ – об'єм паралелепіпеда



$\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ – лінійні ф-ії $= (\mathbb{R}^n)^*$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$dx_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $dx_i\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_i$

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $L^*(\omega) = dx_1$

Теорема Дарбу (лінійна версія)

$\mathcal{A}^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad \omega: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \omega(a,b) = b^T \Omega a$ $\quad \Omega^T = -\Omega$

$$(a\ b)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = (b\ a)\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = -bc + ad = \begin{vmatrix} a & c\\ b & d\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}$$

$A = (i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ $\quad dx_A = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Теорема Дарбу Нехай $\omega \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^n)$. Тоді $\exists\, L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – лін. ізом. такий, що матриця $L^*(\omega)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$ а блоків

$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \dots + dx_{2a-1} \wedge dx_{2a}$

Наслідок Ранк матриці ω-першої $\omega \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 - \sum_{i=\lambda+1}^{q} x_i^2 +$

Приклад Нехай B – косокутна матриця $n \times n$. Якщо n – непарне то B – вироджена

$\Downarrow$

$B^T = -B$ – кососиметр.

$$\det(B) = \det(B^T) = \det(-B) = (-1)^n \det(B)$$

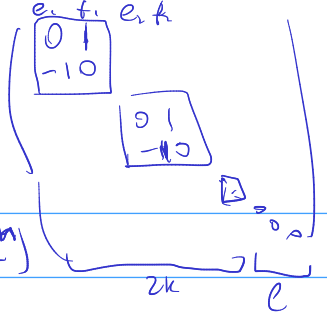
Якщо n – непарне

$$\det(B) = -\det(B) \Rightarrow \det(B) = 0.$$

$$\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix} = abc - abc = 0$$

Доказательство теоремы Дарбу



Базис $\langle e_1, f_1, e_2, f_2, \dots e_k, f_k, g_1, \dots g_\ell \rangle$ $\quad n = 2k+\ell$

называется симплектическим относительно $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$

если $\omega(e_i, f_i) = 1 \quad \omega(e_i, f_j) = 0 \ \ i \neq j$

$\omega(e_i, g_s) = \omega(f_i, g_s) = \omega(g_s, g_p) = 0 \quad \forall\, i, s, p$

$\Downarrow$

Нехай $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. ① Якщо $\omega \equiv 0$ то в якому базисі є симплектичним ($k=0$ $\ell = n$)

② Припустимо що $\omega \not\equiv 0$

Тобто $\exists\ e_1, f_1 : \omega(e_1, f_1) \neq 0 \Rightarrow f_1$ замінимо на $\dfrac{f_1}{\omega(e_1, f_1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega(e_1, f_1) = 1$

Доповнимо $\langle e_1, f_1 \rangle$ до базису в $\mathbb{R}^n$ $\quad \langle e_1, f_1, p_3, p_4, \dots p_n \rangle$

Підправимо $p_i \to p_i'$ так щоб $\omega(e_1, p_i') = \omega(f_1, p_i') = 0$

$p = p_i$ $\quad p' = p + a e_1 + b f_1$

$0 = \omega(e_1, p') = \omega(e_1, p) + a\,\omega(e_1, e_1) + b\,\omega(e_1, f_1)$

$\omega(e_1, e_1) = 0 \quad \omega(e_1, f_1) = 1$

$b = -\omega(e_1, p)$

$0 = \omega(f_1, p') = \omega(f_1, p) + a\,\omega(f_1, e_1) + b\,\omega(f_1, f_1)$

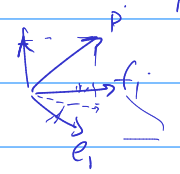
$\omega(f_1, e_1) = -1 \quad \omega(f_1, f_1) = 0$

$a = \omega(f_1, p)$

$p' = p + \omega(f_1, p)\cdot e_1 - \omega(e_1, p)\cdot f_1$

$\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}$

$p \Rightarrow p - \langle p, f_1 \rangle f_1 - \langle p, e_1 \rangle e_1$



$\langle e_1, f_1 \rangle \perp_\omega \langle p_3', \dots p_n' \rangle$

$(\cdot,\cdot): L \times L \to L \quad (a,b) = -(b,a)$

$(a,(b,c)) + (b,(c,a)) + (c,(a,b)) = 0$

$\Lambda^k(V) \wedge \Lambda^\ell(V) \longrightarrow \Lambda^{k+\ell}(V)$ — $\wedge$ - бінійне відображення

$\alpha(v_1 \dots v_k)$ $\beta(w_1 \dots w_\ell)$ $\alpha \wedge \beta (v_1 \dots v_k w_1 \dots w_\ell)$ $\{1 \dots k\}$ $\{1 \dots n\}$

$dx_A \wedge dx_B = \pm dx_{A \cup B}$

$A = \{i_1 \dots i_k\}$ $B = \{j_1 \dots j_\ell\}$

$dx_A \wedge dx_B := \pm dx_{A \cup B}$

$\{i_1 \dots i_k\}$ $\{j_1 \dots j_\ell\}$

$A : [k] \to [n]$ послідовність k елем. з $[n]$

$[n] \times \dots \times [n]$ (k)

$sign : [n]^k \to \{-1, 0, 1\}$

$sign(\{i_1 \dots i_k\}_A) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } A \text{ містить однакові символи} \\ \pm 1 & \text{якщо знак перестановки } i_{a_1} < i_{a_2} < \dots < i_{a_k} \\ & \text{або перестановка } A \to ord(A) \end{cases}$

$n = 4$

$sign(\{1,2,1,3\}) = 0$

$sign\{1324\} = -1$

$sign(1\,\overrightarrow{43}2) = -1$

$sign(1\,43\,2) = 1$

dx_A — однаково впорядковані

$ord : [n]^k \to [n]^k$ — відображ. зростання впорядкування

$1213 \to 1123$

$dx_A := sign(A) \cdot dx_{ord(A)}$ — лінійн.

$\wedge : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k+\ell}(\mathbb{R}^n)$

$\exists$ бінійне

$dx_A \wedge dx_B = dx_{A \cup B}$

$\{i_1 \dots i_k\}$ $\{j_1 \dots j_\ell\}$ $\to$ $\{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_\ell\}$

$\wedge$ узгоджене з поняттям dx_A

$\sigma(A) = A'$ σ — перестановка

$dx_{A'} = sign(\sigma) \cdot dx_A$

$\sigma(A \cup B) = A' \cup B$

$$\left(\sum a_i\, dx_{A_i}\right) \wedge \left(\sum b_j\, dx_{B_j}\right) := \sum a_i b_j\, dx_{A_i} \wedge dx_{B_j}$$

Лемм. $\wedge$ - ассоциативно

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

Внутреннее умножение $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ $e_{j_1} \dots e_{j_\ell}$

$$(\alpha \wedge \beta)(\underbrace{v_1 \dots v_k}_{v}\ \underbrace{w_1 \dots w_\ell}_{w}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \alpha\left([\sigma(q)]_k\right) \cdot \beta\left([\sigma(q)]_\ell\right)$$

$q := [v, w]$ σ - перестановка координат в q $\sigma(q)$

$p := [\underbrace{q_1 \dots}_{k}\ \underbrace{q_{k+\ell}}_{\ell}]$

$[p]_k$ $[p]_\ell$

$\alpha = dx_A$ $dx_A(e_{i_1} \dots e_{i_k}) = 1$ $dx_A(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = 0$

$i_1 \dots i_k$ $(i_1 \dots i_k) \neq (j_1 \dots j_k)$

dx_B

$dx_{A \cup B}(e_{i_1} \dots e_{i_k} e_{j_1} \dots e_{j_\ell})$

$V \Rightarrow \Lambda^k(V)$ контравар. функтор

$\mathbb{R}^n$

$\wedge : \Lambda^k(V) \times \Lambda^\ell(V) \to \Lambda^{k+\ell}(V)$ — ассоциативно.

$dx_A = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$A = \{i_1 \dots i_k\}$ ↖ 1-форма

$= dx_2 + 5dx_3$

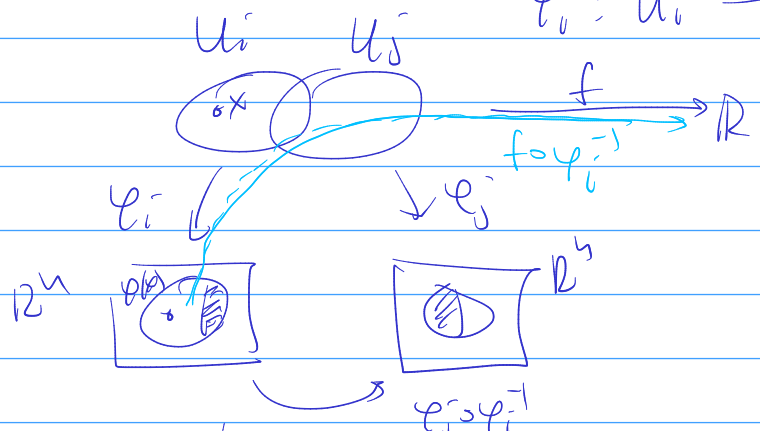
$\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\gamma(x_1 \dots x_n) = x_2 + 5x_3$

$dx_1 \wedge d(x_2 + 5x_3) = dx_1 \wedge \gamma =$ $= dx_2 + 5dx_3$

$dx_1 \wedge dx_2 + 5\, dx_1 \wedge dx_3$

M - гладкий многовид C^∞ $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda}$

$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ - локальні карти



$f \in C^k$ в т. x

$x \in U_i$

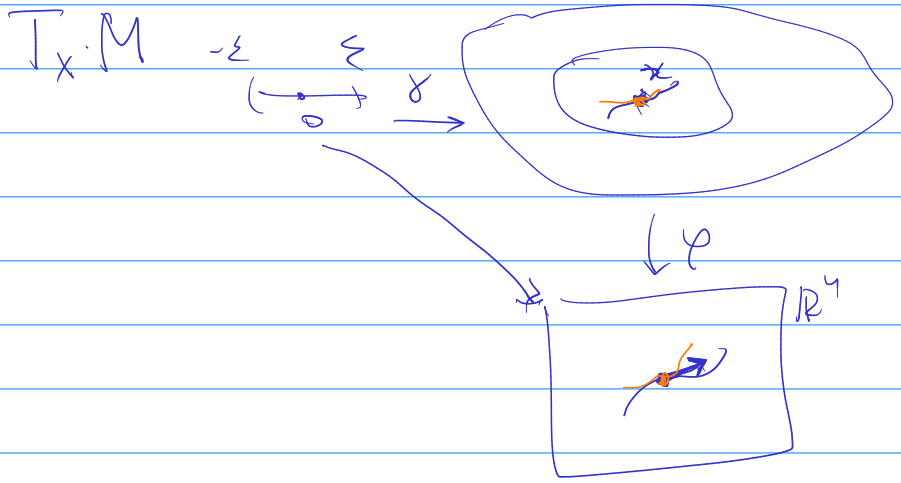
$f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi(U_i) \to \mathbb{R}$

$\in C^k$ в т. $\varphi_i(x)$

$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ - біоморфізм переходу між картами

$\mathcal{A}$ належить C^k якщо $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in C^k \ \forall i,j \ U_i \cap U_j \neq \emptyset$

карти C^k узгоджені



$\gamma(0) = x$

$\gamma \in C^k$ якщо $\varphi \circ \gamma \in C^k$

$(\varphi \circ \gamma)'(0)$ - зоб. вектор $\partial_{\varphi \circ \gamma}$ в т. $\varphi(x)$

$\gamma, \delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ - еквів якщо $\gamma(0) = \delta(0)$

$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \delta)'(0)$

Класи еквівал. в т. x - називаємо дотичний вектор в т. x

$T_x M$ - множ. всіх зоб. векторів в т. x

$\hat{\varphi}$

$T_x M \to \mathbb{R}^n$

$[\gamma] \to [(\varphi \circ \gamma)'(0)]$

індукує структуру $\mathbb{R}^n$

dim n

$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$

$M - C^k$ гладке мн-ду dim n $TM - C^{k-1}$

Диф. формы на многообразиях

$\dim M = n$ $\quad 0 \dots n$

$\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Lambda$

линии всех C^∞ фй на M

$\to$ 0-формы на M

1-формы $\quad \Omega^1(M) \subseteq C^\infty(TM, \mathbb{R})$

$\leftarrow$ фй $\alpha : TM \to \mathbb{R}$ такие, что

$\alpha|_{T_xM} : T_xM \to \mathbb{R}$ линейны $\forall x \in M$.

$\Omega^2(M)$ $\quad \alpha : \bigcup_x (T_xM \times T_xM) \supset \oplus TM \to \mathbb{R} \in C^\infty$

$\to$ суть углы

$\alpha|_{\oplus} : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$

косые 2-формы

$J^1((R,0), M)$ $\quad ?\ C^\infty$

$\Omega^k(M)$ $\quad \alpha : \bigsqcup_{x \in M} (T_xM)^k \to \mathbb{R} \in C^\infty$

$\alpha|_{(T_xM)^k} : \underbrace{T_xM \times \dots \times T_xM}_{k} \to \mathbb{R}$

косые k-формы

1-формы на $\mathbb{R}^n$

$\Omega^1(\mathbb{R}^n) = \{ \sum a_i(x)\,dx_i \mid a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \}$

$M \in C^\infty$

$TM \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$ линейная на слоях

$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n \quad \{(\mathbb{R}^n, id)\}$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^k$ в своей карте

$f \circ id^{-1} \in C^k$

$\Updownarrow$

C^k в своей карте

$f \in C^k$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle id}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle f \circ id^{-1} \in C^k} & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

$[\gamma]_{x \in \mathbb{R}^n} \longrightarrow (x, \gamma'(0))$ биекция



$\alpha: T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad C^\infty$

линейна на слоях $\quad x \times \mathbb{R}^n = T_x \mathbb{R}^n$

$$\alpha(\underbrace{x_1 \dots x_n}_{x}\ \underbrace{v_1 \dots v_n}_{v}) = a_1(x)v_1 + a_2(x)v_2 + \dots + a_n(x)v_n$$

$a_i \in C^\infty$

$a_i(x) = \alpha(x, (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0))$

$dx_i(v_1, \dots, v_n) = v_i$

$\alpha(x, v) = a_1(x)\,dx_1(v) + a_2(x)\,dx_2(v) + \dots + a_n(x)\,dx_n(v)$

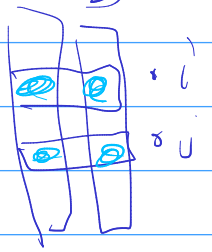
$= \sum a_i\,dx_i$

Опр. 2 форма на $\mathbb{R}^n$

$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

2 форма $\alpha : \mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{x \quad T_x\mathbb{R}^n \quad T_x\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R} \in C^\infty$ $\Leftrightarrow$ $a_{ij} \in C^\infty$

$$\alpha(x, v, w) = \sum_{i<j} a_{ij}(x)(dx_i \wedge dx_j)(v, w)$$



$\alpha \in C^\infty$

$a_{ij}(x) = \alpha(x, e_i, e_j)$ $\quad = C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Все 2-формы на $\mathbb{R}^n$ $\quad \Omega^2(\mathbb{R}^n) = \Lambda\{dx_i \wedge dx_j\}$

Опр. k-форма на $\mathbb{R}^n$ $\quad \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

$\alpha : \mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$

$$\alpha(x, v_1, \dots v_k) = \sum_{A \in Fin_k(n)} a_A(x)\, dx_A(v_1, \dots v_k) \qquad a_A \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$A = \{i_1 < \dots < i_k\}$

$\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$$
$$\Lambda^k(\mathbb{R}^m) \xleftarrow{L^*} \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

$$L^*(\omega)(v_1 \dots v_k) = \omega(Lv_1\ Lv_2 \dots Lv_k)$$

$$\wedge : \Lambda^k(V) \times \Lambda^\ell(V) \to \Lambda^{k+\ell}(V)$$

$$\alpha \qquad \beta \qquad \alpha \wedge \beta = \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma\ \alpha(v'_1 \dots v'_k)\,\beta(w'_1 \dots w'_\ell)$$

$$\sigma(v_1 \dots v_{k+\ell}) = v'_1 \dots v'_k\ w'_1 \dots w'_\ell$$

$\alpha, \beta \in \Lambda^2(V)$

$\Lambda^4(V) \ni \alpha \wedge \beta(v_1 v_2 v_3 v_4) =$

$$\frac{1}{2!2!}\big(\alpha(v_1v_2)\beta(v_3v_4) - \alpha(v_1v_3)\beta(v_4v_3) + \alpha(v_1v_4)\beta(v_2v_3) - \alpha(v_2v_1)\beta(v_3v_4) + \alpha(v_2v_3)\beta(v_4v_3) - \alpha(v_2v_4)\beta(v_3v_1) + \alpha(v_3v_1)\beta(v_4v_2) - \alpha(v_3v_4)\beta(v_1v_2) + \alpha(v_4v_1)\beta(v_3v_2) - \alpha(v_4v_2)\beta(v_1v_3) + \alpha(v_4v_3)\beta(v_1v_2)\big) = \frac{2!2!}{2!2!} 4\,\alpha(v_1v_2)\beta(v_3v_4)$$

$$= \alpha(v_1v_2)\beta(v_3v_4) - \alpha(v_1v_3)\beta(v_2v_4) + \alpha(v_1v_4)\beta(v_2v_3) + \alpha(v_2v_3)\beta(v_1v_4) - \alpha(v_2v_4)\beta(v_1v_3) + \alpha(v_3v_4)\beta(v_1v_2)$$

$$+ \{12\}\{34\} \quad - \{12\}\{43\} \quad - \{21\}\{34\} \quad + \{21\}\{43\}$$

$$12\ 34 \quad 13\ 24 \quad 14\ 23 \quad 23\ 14 \quad 24\ 13 \quad 34\ 12$$

$$\sum \pm \alpha \otimes \beta \qquad k+\ell$$

$$\frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} = C^k_{k+\ell}$$

F $\quad \underbrace{1+1+\dots+1}_{p} = 0$

$\mathbb{R}$ $\quad \operatorname{char}\mathbb{R} = 0$

$\otimes$ над 1

$\omega(a,b) = -\omega(b,a)$

$x \in F$, $\operatorname{char} F = 2$

$x + x = 0$

$L : W \to V$

$\alpha \in \Lambda^k(V) \quad \beta \in \Lambda^l(V)$

Lemma $\quad L^*(\alpha \wedge \beta) = L^*(\alpha) \wedge L^*(\beta)$

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1 v_2 v_3 v_4) = \alpha(v_1 v_2)\beta(v_3 v_4) - \alpha(v_1 v_3)\beta(v_2 v_4) + \alpha(v_1 v_4)\beta(v_2 v_3) + \alpha(v_2 v_3)\beta(v_1 v_4) - \alpha(v_2 v_4)\beta(v_1 v_3) + \alpha(v_3 v_4)\beta(v_1 v_2)$$

$L^*(\alpha)(w_1, w_2) = \alpha(Lw_1, Lw_2)$

$$L^*(\alpha \wedge \beta)(w_1 w_2 w_3 w_4) = \sum \pm \alpha(Lw_{i_1}, Lw_{i_2})\beta(Lw_{i_3}, Lw_{i_4}) = (L^*(\alpha) \wedge L^*(\beta))(w_1 w_2 w_3 w_4)$$ ⇑

$$W^k \to V^k \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$$
$$(w_1, \dots, w_k) \to (Lw_1, \dots, Lw_k) \to \alpha(\quad)$$

$\alpha, \beta \in \Lambda^1(\mathbb{R}) \qquad \alpha, \beta : V \to \mathbb{R}$

$L : W \xrightarrow{L} V \xrightarrow{\alpha, \beta} \mathbb{R}$

$L^*(\alpha) = \alpha \circ L \qquad L^*(\beta) = \beta \circ L$

$$(\alpha \wedge \beta)(w_1, w_2) = \alpha(w_1)\beta(w_2) - \alpha(w_2)\beta(w_1)$$

$L^*(\alpha \wedge \beta) = L^*(\alpha) \wedge L^*(\beta)$

$$(L^*(\alpha) \wedge L^*(\beta))(w_1, w_2) = L^*(\alpha)(w_1) \cdot L^*(\beta)(w_2) - L^*(\alpha)(w_2) L^*(\beta)(w_1)$$
$$= \alpha(Lw_1) \cdot \beta(Lw_2) - \alpha(Lw_2)\beta(Lw_1) = L^*(\alpha \wedge \beta)(w_1, w_2)$$

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$x_1 x_2 x_3 \quad y_1 y_2$

5	7	-3
-1	0	4

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 \\ -x_1 + \quad + 4x_3 \end{pmatrix}$

$\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2) \qquad \omega = dy_1 \wedge dy_2$

$y_1 = 5x_1 + 7x_2 - 3x_3$

$y_2 = -x_1 + 4x_3$

$\omega\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$

$L^*(\omega) = \sum_{i<j} a_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$

$dy_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (u_1, u_2) \to u_1$

$dy_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (u_1, u_2) \to u_2$

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{L} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{dy_1} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{dy_2} \mathbb{R}$

$dy_1 \circ L(x_1 x_2 x_3) =$

$L^*(\omega) = L^*(dy_1 \wedge dy_2) = L^*(dy_1) \wedge L^*(dy_2) =$

$=$

L

5	7	-3
-1	0	4

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 \\ -x_1 + \quad + 4x_3 \end{pmatrix}$

$L^*(y_1)$: $dy_1 \circ L(x_1 x_2 x_3) = 5x_1 + 7x_2 - 3x_3$

$L^*(y_2)$: $dy_2 \circ L(x_1 x_2 x_3) = -x_1 + 4x_3$

$L^*(dy_1 \wedge dy_2) = d(5x_1 + 7x_2 - 3x_3) \wedge d(-x_1 + 4x_3)$ $\left(\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}\right)$

$= -5\, dx_1 \wedge dx_1 + 5 \cdot 4\, dx_1 \wedge dx_3 - 7\, dx_2 \wedge dx_1 + 28\, dx_2 \wedge dx_3 -$

$- 3\, dx_3 \wedge dx_1 - 12\, dx_3 \wedge dx_3 =$

$= 23\, dx_1 \wedge dx_3 + 7\, dx_1 \wedge dx_2 + 28\, dx_2 \wedge dx_3$

$\mathbb{R}^n$ $\quad \omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

M $\quad$ C^k-атлас $\quad$ $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_xM$ $\quad$ C^{k-1}

гладкий многообр. C^{k-1}

$\bigsqcup_{x \in M} T_xM \times \dots \times T_xM \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$ $\quad$ (k)

$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ (U, φ) $\quad$ $\bigsqcup_{x \in U} T_xM \cong U \times \mathbb{R}^n$

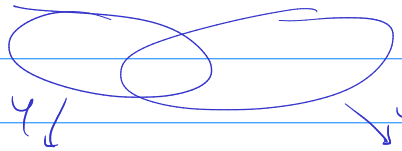
$n \quad 2n \quad 2nk$

C^{k-1} многообр.

$\underbrace{TM \times \dots \times TM}_{k} \supset \bigoplus_k TM$ $\quad$ сумма Уитни $\quad$ $\dim \bigoplus_k TM = n + n \cdot k = n(k+1)$

$v \in T_xM \quad w \in T_yM$

$\bigsqcup_{x \in U} T_xM \times \dots \times T_xM = U \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k}$



$U \cap V \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$

$(q \quad v_1 \dots v_k) \longrightarrow (\psi \circ \varphi^{-1}(q), \quad J_q(\psi \circ \varphi^{-1}) \cdot v_1 \quad J_q(\psi \circ \varphi^{-1}) v_2 \quad \dots)$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad$ $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad \Rightarrow \quad df$ — дифференциальная 1-форма

$df : T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ $df|_{T_x\mathbb{R}^2} : T_x\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — линейное ф-е

$(\mathbb{R}^2, id_{\mathbb{R}^2})$ $\quad$ $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{df} \mathbb{R}$

$(x,y) \quad (u,v)$

$df(x,y,u,v) = f'_x(x,y) \cdot u + f'_y(x,y) \cdot v$

$f \in \Omega^0(\mathbb{R}^2) = C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ $\quad$ $df = f'_x\, dx + f'_y\, dy$

$dx : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \to u$ $\quad$ $dy : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \to v$

$df(x,y,u,v) = f'_x(x,y)\, dx(u,v) + f'_y(x,y)\, dy(u,v)$

$\Omega^k(M) = \left\{ \alpha : \bigoplus_k TM \to \mathbb{R} \;\middle|\; \alpha|_{\bigoplus_k T_xM} \text{ — косая } k\text{-форма} \quad \forall x \in M, \; \alpha \text{ — } C^\infty \right\}$

① $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \longrightarrow \Omega^{k+\ell}(M)$

$\alpha : \bigoplus_k TM \to \mathbb{R}$ $\quad \beta : \bigoplus_\ell TM \to \mathbb{R}$ $\quad \Rightarrow \quad \alpha\wedge\beta : \bigoplus_{k+\ell} TM \to \mathbb{R}$

$\forall x \quad (\alpha\wedge\beta)|_{\bigoplus_{k+\ell} T_xM} = \alpha|_{\bigoplus_k T_xM} \wedge \beta|_{\bigoplus_\ell T_xM}$

② $\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Th} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$ $\qquad \begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{T_xh} & T_{h(x)}N \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & h(x) \end{array}$ — линейно !!!

$(T_xM)^k \xrightarrow{L^k} (T_{h(x)}N)^k \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$

$\bigoplus_k TM \xrightarrow{\oplus Th} \bigoplus_k TN \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$

$(v_1,\dots,v_k) \in T_xM \longrightarrow (T_xh(v_1), T_xh(v_2), \dots, T_xh(v_k)) \in T_{h(x)}N$

$\Omega^k(M) \longleftarrow \Omega^k(N)$

$h^*(\alpha) := \alpha \circ \oplus Th \longleftarrow \alpha$

Лемма $\forall$ C^∞ гладко $h : M \to N$ индуцира гладко $\Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$

$k=0$ $\quad \Omega^0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$ $\quad h^* : \Omega^0(N) \to \Omega^0(M)$

$\alpha : N \to \mathbb{R} \Rightarrow M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$, $h^*\alpha = \alpha\circ h$

$M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$df : TM \to \mathbb{R}$ $\quad df|_{T_xM} : T_xM \to \mathbb{R}$ - линейно

$df = f^*(\omega)$, $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$

$\begin{array}{ccccc} TM & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{R} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & & \end{array}$ $\qquad (x \;\; v) \;\; v$

$\boxed{df := f^*(\omega)}$

Лемма $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{Tf} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$ $\qquad x \;\; v$

$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^1 \end{array}$

$Tf(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{x}, v_1,\dots,v_n) = \left(f(x), \sum f'_{x_i}(x)\cdot v_i\right)$

$df := \omega \circ Tf : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad df(x_1,\dots,x_n, v_1,\dots,v_n) = \sum f'_{x_i}(x)\, v_i$

$\alpha \wedge \beta$ $\quad d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

$h^*(\alpha \wedge \beta)$