Лекция 3 2024-05-19

$V = \mathbb{R}^n$ $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ – мн-ва всіх кососиметричних полілінійних ф-ій на $\mathbb{R}^n$ від k змінних

k-форма

$\omega: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$

$\omega(\dots v_i v_{i+1} \dots) = -\omega(\dots v_{i+1} v_i \dots)$

$W \xrightarrow{L} V \xrightarrow{M} U$

$\Lambda^k(W) \leftarrow \Lambda^k(V) \leftarrow \Lambda^k(U)$ $W^k \xrightarrow{L^k} V^k \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$, $L^*(\omega)$

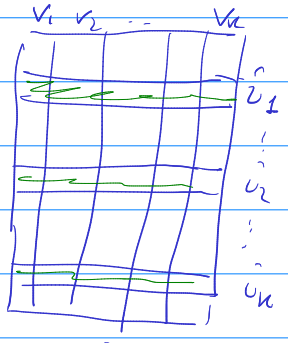
$L^*(\omega): \underbrace{W \times \dots \times W}_{k} \to \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$

$L^*(\omega)(w_1, \dots w_k) = \omega(Lw_1, \dots Lw_k)$

$V = \mathbb{R}^n$ $A = \{i_1 \dots i_k\}$ $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$

$dx_A: V^k \to \mathbb{R}$

$dx_A\left(\begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} v_k \end{bmatrix}\right) =$



Минор

$\mathrm{Fin}_k(n)$ = множина всіх k-елементних підмножин $[n] = \{1, 2, \dots n\}$

$\downarrow$

A – впорядкована за зростанням

Теорема $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ = векторний простір з базисом $\{dx_A \mid A \in \mathrm{Fin}_k(n)\}$

$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$(x+y)^k = \sum C_n^k x^k y^{n-k}$

$\omega: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$ $\omega = \sum a_A dx_A$

$\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n) = 1$ $\omega(v_1, \dots v_n) = a \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix}$ – об'єм паралелепіпеда



$\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ – лінійні ф-ії $= (\mathbb{R}^n)^*$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$dx_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $dx_i\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_i$

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $L^*(\omega) = dx_1$

Теорема Дарбу (лінійна версія)

$\mathcal{A}^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad \omega: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \omega(a,b) = b^T \Omega a$ $\quad \Omega^T = -\Omega$

$$(a\ b)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = (b\ a)\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = -bc + ad = \begin{vmatrix} a & c\\ b & d\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}$$

$A = (i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ $\quad dx_A = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Теорема Дарбу Нехай $\omega \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^n)$. Тоді $\exists\, L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – лін. ізом. такий, що матриця $L^*(\omega)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$ а δ нулів

$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \dots + dx_{2q-1} \wedge dx_{2q}$

Наслідок Rank матриці ω – парне $\quad \omega \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad + \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 - \sum_{i=\lambda+1}^{q} x_i^2 +$

Приклад Нехай B – косокутна матриця $n \times n$. Якщо n – непарне то B – вироджена

$\Downarrow$

$B^T = -B$ – кососиметр.

$$\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix} = 0$$

$\det(B) = \det(B^T) = \det(-B) = (-1)^n \det(B)$

Якщо n – непарне

$\det(B) = -\det(B) \Rightarrow \det(B) = 0$. $\uparrow$

$$\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix} = abc - abc = 0$$

Домашнее теорема Дарбу

$\Lambda^k(V) \wedge \Lambda^\ell(V) \longrightarrow \Lambda^{k+\ell}(V)$ — $\wedge$ - внешнее произведение

$\alpha(v_1 \dots v_k)$ $\beta(w_1 \dots w_\ell)$ $\alpha \wedge \beta (v_1 \dots v_k w_1 \dots w_\ell)$ $\{1 \dots k\}$ $\{1 \dots n\}$

$dx_A \wedge dx_B = \pm dx_{A \cup B}$

$A = \{i_1 \dots i_k\}$ $B = \{j_1 \dots j_\ell\}$

$dx_A \wedge dx_B :=$

$\{i_1 \dots i_k\}$ $\{j_1 \dots j_n\}$

$A : [k] \to [n]$ — возрастающая k элем. $\subset [n]$

$[n] \times \dots \times [n]$ (k)

$\operatorname{sign} : [n]^k \to \{-1, 0, 1\}$

$\operatorname{sign}(\{i_1 \dots i_k\}_A) = \begin{cases} 0 & \text{если } A \text{ числа определ. совпадают} \\ \pm 1 & \text{знак перестановки } i_{a_1} < i_{a_2} < \dots < i_{a_k} \\ & \text{как перест. } A \to \operatorname{ord}(A) \end{cases}$

$n = 4$

$\operatorname{sign}\{1213\} = 0$

$\operatorname{sign}\{1324\} = -1$

$\operatorname{sign}(1\underline{32}4) = -1$

$\operatorname{sign}(1\underline{423}) = 1$

dx_A — обычно неупорядоч.

$\operatorname{ord} : [n]^k \to [n]^k$ — биекция неубывающих наборов

$1213 \to 1123$

$dx_A := \operatorname{sign}(A) \cdot dx_{\operatorname{ord}(A)}$ — инвар.

$\wedge : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k+\ell}(\mathbb{R}^n)$

$\exists$ биекция

$dx_A \wedge dx_B = dx_{A \cup B}$

$\{i_1 \dots i_k\}$ $\{j_1 \dots j_\ell\}$ $\to$ $\{i_1 \dots \cancel{i_k} j_1 \dots j_\ell\}$

$\wedge$ удовлетворяет с полученным dx_A

$\sigma(A) = A'$ σ — перестановка

$dx_{A'} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot dx_A$

$\sigma(A \cup B) = A' \cup B$

$$\left(\sum a_i\, dx_{A_i}\right) \wedge \left(\sum b_j\, dx_{B_j}\right) := \sum a_i b_j\, dx_{A_i} \wedge dx_{B_j}$$

Лемм. $\wedge$ - ассоциативно

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

Внутреннее умножение $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ $e_{j_1} \dots e_{j_\ell}$

$$(\alpha \wedge \beta)(\underbrace{v_1 \dots v_k}_{v}\ \underbrace{w_1 \dots w_\ell}_{w}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \alpha\left([\sigma(q)]_k\right) \cdot \beta\left([\sigma(q)]_\ell\right)$$

$q := [v, w]$ $\quad \sigma$ - перестановка координат в q $\quad \sigma(q)$

$$p = [\underbrace{q_1 \dots}_{k}\ \underbrace{q_{k+\ell}}_{\ell}]$$

$[p]_k$ $\quad [p]_\ell$

$\alpha = dx_A$ $\quad dx_A(e_{i_1} \dots e_{i_k}) = 1$ $\quad dx_A(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = 0$

$i_1 \dots i_k$ $\quad (i_1 \dots i_k) \neq (j_1 \dots j_k)$

dx_B

$dx_{A \cup B}(e_{i_1} \dots e_{i_k} e_{j_1} \dots e_{j_\ell})$

$V \Rightarrow \Lambda^k(V)$ контравар. функтор

$\mathbb{R}^n$

$\wedge : \Lambda^k(V) \times \Lambda^\ell(V) \to \Lambda^{k+\ell}(V)$ — ассоциативно.

$dx_A = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$A = \{i_1 \dots i_k\}$ $\quad$ 1-форма

$dx_1 \wedge d(\underbrace{x_2 + 5x_3}_{= dx_2 + 5dx_3}) = dx_1 \wedge \gamma =$

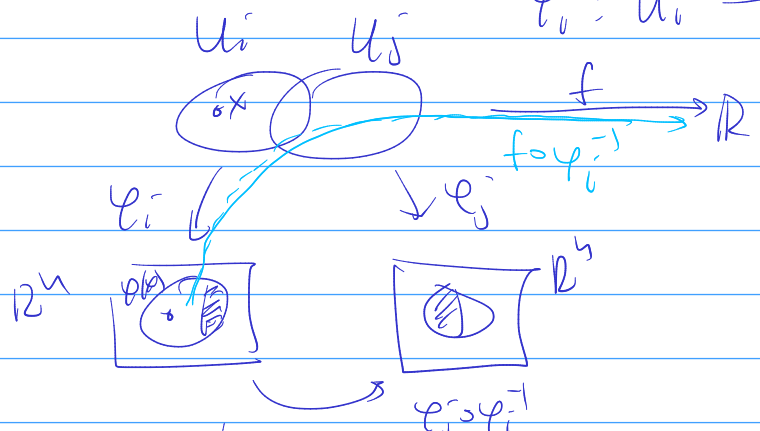
$\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \gamma(x_1 \dots x_n) = x_2 + 5x_3$

$= dx_2 + 5dx_3$

$dx_1 \wedge dx_2 + 5\, dx_1 \wedge dx_3$

M - гладкий многовид C^∞ $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda}$

$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ - локальні карти



$f \in C^k$ в т. x

$x \in U_i$

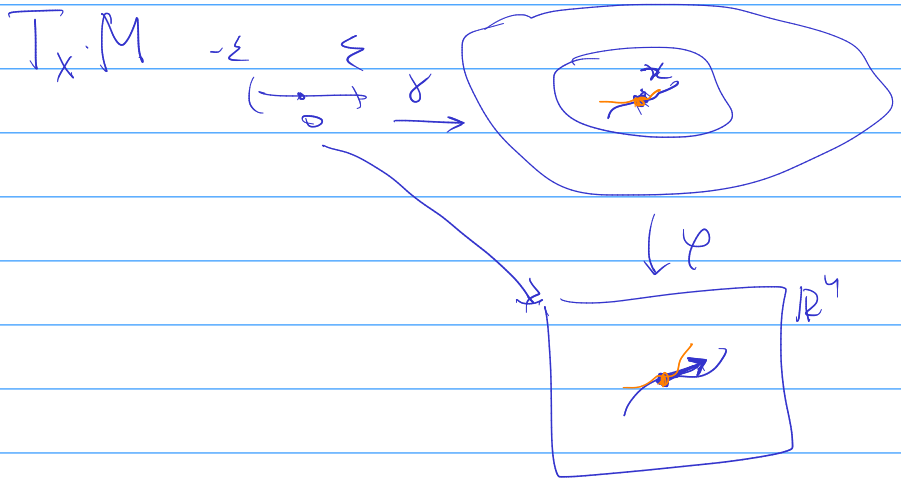
$f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi(U_i) \to \mathbb{R}$

$\in C^k$ в т. $\varphi_i(x)$

$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ - біоморфізм переходу між картами

$\mathcal{A}$ належить C^k якщо $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in C^k \ \forall i,j \ U_i \cap U_j \neq \emptyset$

карти C^k узгоджені



$\gamma(0) = x$

$\gamma \in C^k$ якщо $\varphi \circ \gamma \in C^k$

$(\varphi \circ \gamma)'(0)$ - зоб. вектор $\partial_{\varphi \circ \gamma}$ в т. $\varphi(x)$

$\gamma, \delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ - еквів якщо $\gamma(0) = \delta(0)$

$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \delta)'(0)$

Класи еквівал. в т. x - називаємо дотичний вектор в т. x

$T_x M$ - множ. всіх зоб. векторів в т. x

$\hat{\varphi}$

$T_x M \to \mathbb{R}^n$

$[\gamma] \to [(\varphi \circ \gamma)'(0)]$

індукує структуру $\mathbb{R}^n$

dim n

$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$

$M - C^k$ гладке мн-ду dim n $TM - C^{k-1}$

Диф. формы на многообразиях

$\dim M = n$ $\quad 0 \dots n$

$\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Lambda$

линии всех C^∞ фй на M

$\to$ 0-формы на M

1-формы $\quad \Omega^1(M) \subseteq C^\infty(TM, \mathbb{R})$

$\leftarrow$ фй $\alpha : TM \to \mathbb{R}$ такие, что

$\alpha|_{T_xM} : T_xM \to \mathbb{R}$ линейны $\forall x \in M$.

$\Omega^2(M)$ $\quad \alpha : \bigcup_x (T_xM \times T_xM) \supset \oplus TM \to \mathbb{R} \in C^\infty$

$\to$ суть углы

$\alpha|_{\oplus} : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$

косые 2-формы

$J^1((R,0), M)$ $\quad ?\ C^\infty$

$\Omega^k(M)$ $\quad \alpha : \bigsqcup_{x \in M} (T_xM)^k \to \mathbb{R} \in C^\infty$

$\alpha|_{(T_xM)^k} : \underbrace{T_xM \times \dots \times T_xM}_{k} \to \mathbb{R}$

косые k-формы

1-формы на $\mathbb{R}^n$

$\Omega^1(\mathbb{R}^n) = \{ \sum a_i(x)\,dx_i \mid a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \}$

$M \in C^\infty$

$TM \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$ линейная на слоях

$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n \quad \{(\mathbb{R}^n, id)\}$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^k$ в своей карте

$f \circ id^{-1} \in C^k$

$\Updownarrow$

C^k в своей карте

$f \in C^k$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle id}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle f \circ id^{-1} \in C^k} & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

$[\gamma]_{x \in \mathbb{R}^n} \longrightarrow (x, \gamma'(0))$ биекция



$\alpha: T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad C^\infty$

линейна на слоях $\quad x \times \mathbb{R}^n = T_x \mathbb{R}^n$

$$\alpha(\underbrace{x_1 \dots x_n}_{x}\ \underbrace{v_1 \dots v_n}_{v}) = a_1(x)v_1 + a_2(x)v_2 + \dots + a_n(x)v_n$$

$a_i \in C^\infty$

$a_i(x) = \alpha(x, (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0))$

$dx_i(v_1, \dots, v_n) = v_i$

$\alpha(x, v) = a_1(x)\,dx_1(v) + a_2(x)\,dx_2(v) + \dots + a_n(x)\,dx_n(v)$

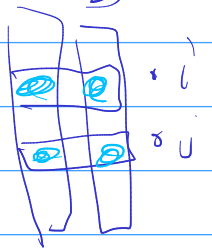
$= \sum a_i\,dx_i$

Опр. 2 форма на $\mathbb{R}^n$

$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

2 форма $\alpha : \mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{x \quad T_x\mathbb{R}^n \quad T_x\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R} \in C^\infty$ $\Leftrightarrow$ $a_{ij} \in C^\infty$

$$\alpha(x, v, w) = \sum_{i<j} a_{ij}(x)(dx_i \wedge dx_j)(v, w)$$



$\alpha \in C^\infty$

$a_{ij}(x) = \alpha(x, e_i, e_j)$ $\quad = C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Все 2-формы на $\mathbb{R}^n$ $\quad \Omega^2(\mathbb{R}^n) = \Lambda\{dx_i \wedge dx_j\}$

Опр. k-форма на $\mathbb{R}^n$ $\quad \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

$\alpha : \mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$

$$\alpha(x, v_1, \dots v_k) = \sum_{A \in Fin_k(n)} a_A(x)\, dx_A(v_1, \dots v_k) \qquad a_A \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$A = \{i_1 < \dots < i_k\}$