$U \subset \mathbb{R}^n$ - відкрита $\quad \Lambda = C^\infty(U) = \{ C^\infty \text{ фн} \quad f: U \to \mathbb{R} \}$

$\Omega^0(U) = \Lambda$

$\Omega^1(U) = \Lambda[dx_1, dx_2 \dots dx_n] = \{ \sum \alpha_i dx_i \quad \alpha_i \in \Lambda \}$

$\Omega^2(U) = \Lambda [dx_i \wedge dx_j \quad 1 \le i < j \le n]$

$\wedge$

$\Omega^k(U) = \Lambda [dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n]$

$\Omega^{<0}(U) = \Omega^{>n}(U) = 0$

$\wedge \dots dx_i \wedge dx_j \wedge \dots = - \dots dx_j \wedge dx_i \wedge \dots$

$$0 \to \Omega^0(U) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d^1} \dots \Omega^i(U) \xrightarrow{d^i} \Omega^{i+1}(U) \xrightarrow{d} \dots \Omega^n(U) \to 0$$

$$f \to \sum f'_{x_i} dx_i$$

$d^{i+1} \circ d^i \equiv 0$

$$d(\Omega^{i-1}(U)) \subset \ker \left(d^i: \Omega^i(U) \to \Omega^{i+1}(U) \right) \subset \Omega^i(U)$$

$$H^i_{DR}(U) = \frac{\ker d^i}{\operatorname{im} d^{i-1}} \cong H^i(U, \mathbb{R}) \quad \text{Т. де Рама}$$

Кососиметричні форми в $V = \mathbb{R}^n$

① k-форма $\quad \omega: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$ полілінійна функція

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad v_i \dots v_k, w_i \in V$

$$\omega(v_1 \dots \alpha v_i + \beta w_i \dots) = \alpha \omega(v_1 \dots v_i \dots) + \beta \omega(v_1 \dots w_i \dots)$$

1-форми $\quad \omega: V \to \mathbb{R}$ лінійні $\quad [q_1 \dots q_n] \boxed{v}$

2-форми $\quad \omega: V \times V \to \mathbb{R}$ білінійні $\quad [w] \boxed{A} \boxed{v} = \omega(w, v)$

② Кососиметрична k-форма $\quad \omega: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$

$$\omega(v_1 \dots \underbrace{v_i \; v_{i+1}} \dots v_k) = -\omega(v_1 \dots \underbrace{v_{i+1} \; v_i} \dots v_k)$$

Доповнення 1-форми є кососиметричними

$A^k(V)$ = множина всіх кососиметричних k-форм $\quad \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$ $\quad A_{\text{sym}}$

Властивості $\Lambda^k(V)$

① $\Lambda^k(V)$ - векторний простір над $\mathbb{R}$

$\omega, \varphi \in \Lambda^k(V) \qquad a\omega + b\varphi \in \Lambda^k(V)$

② $\Lambda^n(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R} \qquad \omega : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$

$\omega(e_1 \; e_2 \; \dots \; e_n) = 1$

$\omega(v_1 \dots v_n) = a \cdot \det(v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n)$

Лем 7! косимм n-форма в $\mathbb{R}^n$ таке, що $\omega(e_1 \dots e_n) = 1$

($\mathbb{R}^{n^2}$)

$\Downarrow$

$$\omega\Big(\sum a_i e_i \; v_2 \dots v_n\Big) = \sum a_i \, \omega(e_i \; v_2 \dots v_n) = \sum a_i b_j \, \omega(e_i e_j \; v_3 \dots v_n) = \sum e_{ij\dots} \cdot \omega(e_i e_j \dots)$$

$\sum b_j e_j$

$\omega(e_i e_j \dots) = \pm \omega(e_1 \dots e_n)$

$= q \cdot \omega(e_1 \dots e_n)$ $\Uparrow$

$\omega(v_1 \dots v_n) = \det(v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n)$ -

③ Функціональні властивості

$V \xrightarrow{L} W$ - кожен лінійний оператор індукує лінійне відображення косимм. k-форм в протилежному напрямку

$\Lambda^k(V) \xleftarrow{L^*} \Lambda^k(W)$

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \xrightarrow{L \times \dots \times L} \underbrace{W \times \dots \times W}_{k} \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$$

$$L^*(\omega)(v_1 \dots v_k) = \omega(Lv_1 \; Lv_2 \dots Lv_k)$$

$$L^*(\omega)(v_1 + v_1' \; v_2 \dots v_k) = \omega(L(v_1 + v_1') \; Lv_2 \dots) = \omega(Lv_1 \; Lv_2 \dots) + \omega(Lv_1' \; Lv_2 \dots) = L^*(\omega)(v_1 \dots v_2 \dots) + L^*(\omega)(v_1' \; v_2 \dots)$$

$V \xrightarrow{L} W \xrightarrow{\omega} \mathbb{R} \qquad L(\omega)(v) = \omega(Lv)$

$V^* \xleftarrow{L^*} W^*$

$\Lambda^1(V) \qquad \Lambda^1(W)$

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - линейный оператор $e_1 \dots e_n$ $L = \boxed{L}$

$L^*(\omega)(e_1 \dots e_n)$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n(\mathbb{R}^n) & \xleftarrow{L^*} & \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \\ \varphi \downarrow & \text{линейное} & \cong \downarrow \varphi \text{ - линейно} \\ \mathbb{R} & \xleftarrow[\text{биекция}]{} & \mathbb{R} \end{array}$$

$\omega(e_1 \dots e_n) = 1$

$L^*(\omega)(e_1 \dots e_n) =$

$\omega(Le_1, Le_2 \dots Le_n)$

$\varphi(\omega) = \omega(e_1 \dots e_n)$

$\hat{L}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\hat{L}(x) = a \cdot x$ для фиксированного a

$a = \hat{L}(1)$

первый столбец L

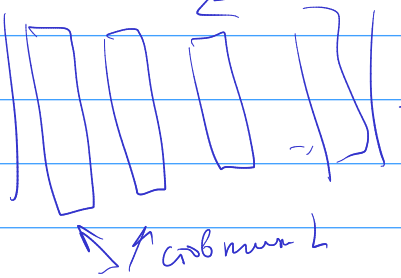
L

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \\ a_{31} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$

Лемма Пусть $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - лин. опер

$L^*: \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$

$L^*(\omega) = |L| \cdot \omega$



Следствие Пусть A, B - матрицы $n \times n$. Тогда $|AB| = |A| \cdot |B|$

$\Downarrow$ Разложение лин. операторы

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A \circ B} \mathbb{R}^n$$

$$\Lambda^n(\mathbb{R}^n) \xleftarrow{B^*} \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \xleftarrow{A^*} \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$$

$$\Lambda^n(\mathbb{R}^n) \xleftarrow{(A \circ B)^*} \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathbb{R} \xleftarrow{\cdot |B|} \mathbb{R} \xleftarrow{\cdot |A|} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \xleftarrow{|A \cdot B|} \mathbb{R}$$

$|AB| = |A| \cdot |B|$

$U \xrightarrow{K} V \xrightarrow{L} W$

$K^*(L^*(\omega))(u_1 \dots u_k) =$

$= L^*(\omega)(Ku_1, Ku_2 \dots Ku_k)$

$= \omega(LKu_1, LKu_2 \dots LKu_k) =$

$= (LK)^*(\omega)(u_1 \dots u_k)$

$K^* L^* = (LK)^*$

④ $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ $\quad v_i = \sum a_{ij} e_j$

$\omega(v_1 \dots v_k) = \omega\left(\sum a_{1j_1} e_{j_1}, \sum a_{2j_2} e_{j_2}, \dots\right) =$ (k линейностью)

$= \sum a_{1j_1} \omega(e_{j_1} \dots e_{j_k})$

a_{1j_1} — число; по всем наборам $j_1 \dots j_k \in \{1 \dots n\}$

(k линейностью)

$= \sum a_{j_1 \dots j_k} \omega(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = \sum a_X \omega(e_{j_1} \dots e_{j_k})$

где $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$ $\quad X = \{e_{j_1} \dots e_{j_k}\}$

$X \subset \{1 \dots n\}$, $|X| = k$

$$\omega\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} v_i & w_i \\ v_j & w_j \end{vmatrix}$$

$1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$

$\forall X \subset \{1 \dots n\}$, $|X| = k$ $\quad X = \{e_{j_1} \dots e_{j_k}\}$

я хочу подсунуть косой форме ω_X на $\mathbb{R}^n$

$$\omega_X : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$$

⊛
$$\begin{cases} \omega_X(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = 1 \\ \omega_X(e_{i_1} \dots e_{i_k}) = 0 \quad \text{если} \quad \{e_{i_1} \dots e_{i_k}\} \neq X \end{cases}$$

Лемма Пусть $X = \{e_{j_1} \dots e_{j_k}\}$, $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$

Тогда $\exists!$ косая k-форма $\omega_X : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$

не зависящая

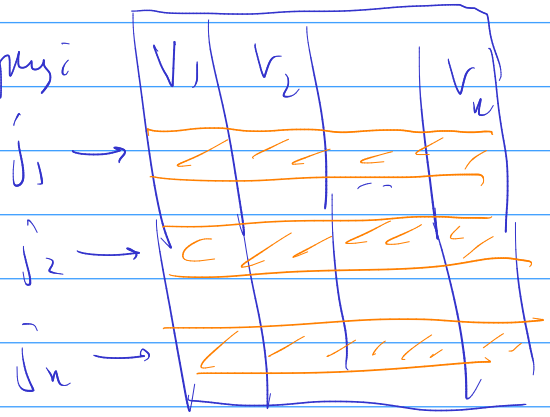
$\Downarrow$ Нехай $\omega, \omega' \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ і задовольняють (*)

$$\omega(v_1 \dots v_k) = \sum_{\substack{v_j = \{e_{i_1} \dots e_{i_k}\} \\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n}} a_\gamma \omega(e_{i_1} \dots e_{i_k}) \overset{*}{=} a_X |v_1 \dots v_k| \cdot 1$$

$$\omega'(v_1 \dots v_k) = \sum a_\gamma \omega'(e_{i_1} \dots e_{i_k}) \overset{(*)}{=} a_X |v_1 \dots v_k| \cdot 1$$

$$\omega(v_1 \dots v_k) = \omega'(v_1 \dots v_k) \Rightarrow \omega \equiv \omega'$$

Наслідок $\omega_X(v_1 \dots v_k)$ = мінор матриці



$\Downarrow$

$$\omega(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\omega(e_{i_1} \dots) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad i_1 \notin X$$

Наслідок $\langle \omega_X, X \subset \{1 \dots n\} \ |X| = k \rangle$ - базис $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

$\Downarrow$

① $\langle \omega_X \rangle$ - породжують $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

② Покажемо, що вони ЛНЗ

Припустимо, що $\exists a_X : \gamma = \sum_X a_\gamma \omega_X \equiv 0$

нехай $a_X \neq 0$

$X = \{e_{i_1} \dots e_{i_n}\}$

$\gamma(e_{i_1} \dots e_{i_n}) = a_X \equiv 0$ - суперечність (*)

Лекция

$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число k-элем. подмножеств в $\{1 \dots n\}$

Структура $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$ – линейн ф-и

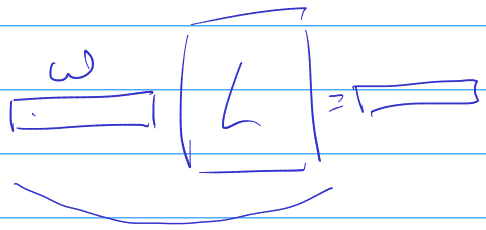
"Каноническая" форма лин. ф-и

$\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad L^*(\omega)$

то есть наименьшего вида можно здесь ω за домножение линейных операторов

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$

$L^*(\omega)$



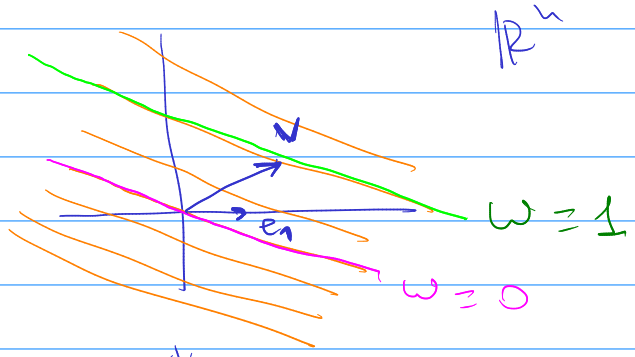
$\omega = 0$ $\quad$ 0000

$\omega \neq 0$ $\quad$ 1000

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ лин. опер

что $L(e_1) = v$

$L(\{e_2 \dots e_n\}) = \ker \omega = \omega^{-1}(0)$

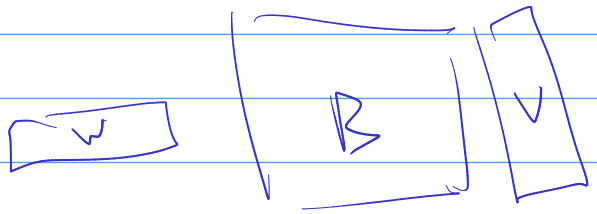


$L^*(\omega)|e_1\rangle = \omega|Le_1\rangle = \omega(v) = 1$ $\quad$ 1000

$L^*(\omega)|e_i\rangle = \omega|Le_i\rangle = 0$

$i \geq 2$ $\quad$ $\ker \omega$

$B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — <u>линейн.</u> билин. форма



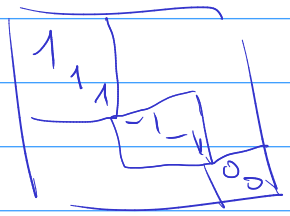
$B(v,w)$

$B(v,v)$ — квадратна форма

$B(e_i,e_j) = B(e_j,e_i)$

$B(x_1 \dots x_n) = \sum x_i^2 - \sum x_j^2$

x	a	b
a	y	c
b	c	z



Симплектична геометрия и симпл. топология

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ \sum a_{ij}\, dx_i \wedge dx_j \right\}$$

$\forall x = \{i,j\}$

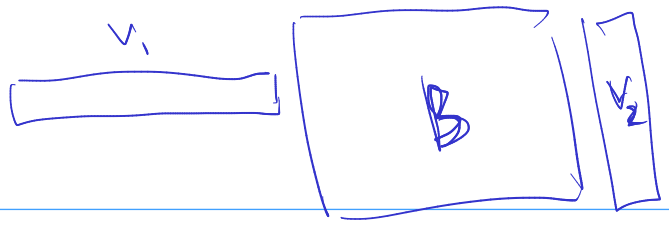
$(dx_i \wedge dx_j) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ косим 2-форма

$$(dx_i \wedge dx_j)(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = a_i b_j - a_j b_i$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$L^*(\omega)(v_1, v_2) = \omega(Lv_1, Lv_2)$

$\omega(V_1, V_2) =$ 

ω - косим., тогда матрица Грама B

$$\omega(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = b_{12}$$

$$B = \left(b_{ij} = \omega(e_i, e_j) \right)$$

ω - косим $\quad \omega(e_i, e_j) = -\omega(e_j, e_i)$

$\omega(e_i, e_j) = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

Теорема (Линейная теорема Дарбу)

$\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ тогда $\exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - лин. изом.

$L^*(\omega)$ имеет матрицу $\begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{vmatrix}$

$$L^*(\omega) = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \dots + dx_{2m-1} \wedge dx_{2m}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -bc + ad = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$