Національна академія наук України
Інститут математики

Ю.Б. Зелинский

ВЫПУКЛОСТЬ
ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ

Київ — 2012

УДК 517.5:514.17:519:513.83

Выпуклость. Избранные главы / Зелинский Ю.Б. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2012. — 280 с.

Монография посвящена разработке геометрических и топологических методов анализа и исследованию с их помощью геометрии линейно выпуклых множеств и смежных вопросов комплексного и выпуклого анализа. Большое внимание уделено разработке нового метода исследования линейно выпуклых множеств в комплексных пространствах, основанного на изучении свойств многозначных отображений. Получена топологическая классификация обобщённо выпуклых множеств с гладкой границей. Установлены комплексные аналоги ряда классических теорем (Хана–Банаха, Крейна–Мильмана, Каратеодори, Фенхеля–Моро). Дан подробный исторический обзор рассмотренных вопросов. Для специалистов по выпуклому и комплексному анализу и топологии в качестве справочника, а также для студентов-математиков.

Монографія присвячена розробці геометричних і топологічних методів аналізу і дослідженню з їх допомогою геометрії лінійно опуклих множин, а також суміжних питань комплексного та опуклого аналізу. Велику увагу приділено розробці нового методу дослідження лінійно опуклих множин у комплексних просторах, який опирається на вивчення властивостей многозначних відображень. Отримана топологічна класифікація узагальнено опуклих множин з гладкою межею. Встановлено комплексні аналоги низки класичних теорем (Хана–Банаха, Крейна–Мільмана, Каратеодорі, Фенхеля–Моро). Дано детальний історичний огляд розглянутих питань. Для спеціалістів по опуклому і комплексному аналізу та топології як довідник, а також для студентів-математиків.

Ответственный редактор:
член-корреспондент НАН Украины Ю.Ю. Трохимчук

Рецензенти: *д-р физ.-мат. наук, профессор И.А. Шевчук,*
д-р физ.-мат. наук С.И. Максименко

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

ISBN 966-02-2571-7
ISBN 978-966-02-6607-0

© Інститут математики НАН України, 2012

Ю.Б. Зелинский

Выпуклость
Избранные главы

ПРАЦІ
Інституту математики НАН України

Математика та її застосування

Том 92

Головний редактор *А.М. Самойленко*

Редакційна рада:

В.В. Шарко — голова ради, Ю.М. Березанський, М.Л. Горбачук, А.А. Дороговцев, Ю.А. Дрозд, Ю.Б. Зелінський, В.С. Королюк, А.Н. Кочубей, І.О. Луковський, В.Л. Макаров, А.Г. Нікітін, В.В. Новицький, М.В. Працьовитий, О.Л. Ребенко, А.С. Романюк, Ю.С. Самойленко, С.Г. Солодкий, О.М. Шарковський

Засновано в 1994 році

От редактора

В монографии исследуются избранные вопросы интегральной геометрии. Затронутая в книге проблематика связывает в один узел проблемы комплексного анализа, топологии и элементы выпуклого анализа.

Основной цикл рассматриваемых задач — это вопросы топологической классификации обобщенно выпуклых множеств в комплексных пространствах. Среди таких множеств важную роль играют линейно выпуклые и сильно линейно выпуклые множества. Геометрические свойства этих множеств, в отличие от аналитических их свойств, до последнего времени были мало исследованы в монографической литературе. Предлагаемая монография является попыткой систематического изложения этих вопросов.

Здесь автором дана полная топологическая классификация сильно линейно выпуклых областей с гладкой границей. Решен ряд проблем, поставленных Л.А. Айзенбергом [2], по геометрическому описанию сильно линейно выпуклых множеств. Показано, что эти множества являются естественным классом, на котором можно построить комплексную теорию, аналогичную вещественному выпуклому анализу. Все классические результаты выпуклого анализа находят в подходящей интерпретации комплексную трактовку. Использование в доказательствах групп когомологий позволяет преодолеть сложность, связанную с тем, что комплексная гиперплоскость не разбивает пространство. Решенные здесь задачи позволяют по-новому взглянуть на утверждения выпуклого анализа и распространить их на более широкий класс множеств даже в вещественном случае.

Впервые для решения задач, которые вообще не удавалось решить, применен метод многозначных отображений. Исследование графиков этих отображений приводит к нахождению простых и окончательных решений задач описания глобальных свойств множества по известным свойствам его сечений линейными многообразиями. Изучаются классы отображений, инвариантные на обобщенно выпуклых множествах.

В монографии приводится решение ряда основных задач обобщенной выпуклости. Но разработанные в ней понятия и методы позволяют ставить вопрос о решении многих других задач комплексного анализа и применения геометрических и топологических методов в анализе. Некоторые, наиболее интересные с точки зрения автора,

нерешенные задачи приведены в книге. Здесь богатый источник тем для диссертационных и дипломных работ.

Некоторые параграфы монографии завершаются упражнениями, содержащими вариации или наиболее доступные частные случаи утверждений, приведенных в основном тексте. Решение этих упражнений полезно для закрепления понимания материала, но не является необходимым при первом чтении.

Ю.Ю. Трохимчук

Предисловие

Цель монографии — ознакомить читателя с рядом применений геометрических и топологических методов в комплексном анализе. Цикл вопросов, которые излагаются здесь, можно разбить на две части. Первая, существенно большая по объему, — приложения к комплексному анализу, вторая — приложения к обобщённо выпуклым множествам в вещественном евклидовом пространстве. В связи с этим, в зависимости от интересов читателя, возможны различные подходы к изучению этой книги. Если читателя больше привлекают приложения к комплексному анализу, то ему будут более интересны первые четыре главы и § 30 шестой главы. Читателю, которому более близки исследования подмножеств евклидова пространства, после краткого знакомства с частью § 1 и, по необходимости, с § 31 можно сразу переходить к § 16 и к пятой главе. История возникновения и решения излагаемых задач приводится в § 30, поэтому во введении сосредоточимся больше на связи между утверждениями и конспективном обзоре содержания. Приводимые здесь результаты ни в коей мере не претендуют на полное освещение ни возможностей многозначных отображений, ни, тем более, топологических методов в анализе. Они отражают отношение автора к геометрическому подходу к вопросам анализа и в подавляющем большинстве основаны на его результатах и результатах его учеников. Результаты других авторов, которые здесь приводятся, привлечены для придания предмету исследования определенной завершенности, хотя, как видно из текста и особенно из § 30, затронутая тема еще очень далека от того, чтобы сказать, что в ней решены все основные проблемы. Автор надеется, что монография послужит толчком для привлечения молодых исследователей к интересной развивающейся тематике, в которой используются методы вещественного, комплексного, функционального и выпуклого анализов, геометрии и топологии.

Ряд параграфов, например §§ 5, 16, 17, 20, 22, почти автономны, т.е. для их чтения достаточно минимального знания предыдущих результатов. Поэтому книга может использоваться как введение в предмет при последовательном чтении, как справочник по результатам и нерешенным проблемам по данной тематике и, наконец, для выборочного знакомства с отдельными вопросами индивидуально или для чтения спецкурсов по топологическим методам анализа магистрам математических специальностей университета.

Перейдем к краткому содержанию работы и порядку ее изучения.

Первая глава посвящена исследованию линейно выпуклых множеств и отображений, при которых сохраняется линейная выпуклость. При этом полученные результаты позволяют попутно дать локальную характеристику мебиусовых отображений в классе непрерывных отображений. Первый параграф носит вспомогательный характер. В нем приводятся основные определения, используемые в работе и иллюстрирующие их примеры. Вводится понятие линейной выпуклости, которое является одним из основных в монографии и постоянно употребляется в первых четырех главах. Другое важное определение — это понятие многозначного отображения, которое используется, с одной стороны, как объект исследования, а с другой — как мощное средство для решения различных задач анализа. Многозначные отображения позволяют найти аналитическую связь между исходным множеством и сопряженным к нему, которое в комплексном анализе заменяет известную из выпуклого анализа поляру.

Отметим, что в монографии во многих параграфах приводится ряд упражнений. Это результаты, которые несложно доказываются на основе материала, изложенного в параграфе, и подумать над которыми будет полезно читателю для полнейшего усвоения предмета.

Во втором параграфе изучаются свойства сопряженных и линейно выпуклых множеств. В частности, показано, что, несмотря на схожесть свойств линейно выпуклых множеств и выпуклых множеств, объединение семейства линейно упорядоченных по включению линейно выпуклых множеств уже может не быть линейно выпуклым. Отметим, что с этого параграфа начинает использоваться естественно возникающее из определения сопряженности непрерывное многозначное отображение $\Phi(z) = \{w \,|\, (\langle z, w\rangle = 1) \cup (w = \infty)\}$. Привлечение в третьем параграфе аппарата групп когомологий к графику отображения Φ позволяет в ряде случаев найти связь между одномерной группой когомологий исходного линейно выпуклого компакта и количеством компонент сопряженного множества. Здесь впервые встречаемся с применениями теоремы Вьеториса–Бегла. Особое внимание следует обратить на теорему 3.2, которая используется для описания сопряженного множества в § 3, а особенно полезна при описании геометрических свойств сильно линейно выпуклых множеств в § 9. Исследования § 4 связаны с изучением новых многозначных отображений, которые получаются, если изучать связь свойств исходного множества со свойствами его сечений и проекций.

Эти результаты углубляют наши познания о линейно выпуклых множествах. Наиболее важна для дальнейшего теорема 4.2, увязывающая гомологические свойства множества и его сечений. Теорема 4.6 приводится как тесно связанная по методу доказательства с результатами § 4, поскольку техника, примененная в этом параграфе, позволяет получать новые результаты и в вещественном случае. Дальше она нигде не используется, и поэтому при первом чтении ее можно опустить.

Исследования § 5 позволяют ответить на естественный вопрос: какие отображения сохраняют линейную выпуклость. При этом получаются обобщения классических теорем, которые в геометрии носят название основных теорем аффинной (соответственно проективной) геометрии. Требование непрерывности исследуемых отображений дает возможность избавиться от априорной взаимной однозначности. Рассуждения этого параграфа полностью справедливы и в вещественном случае, более того, во всех формулировках можно освободиться от приставки "полу", так как поле вещественных чисел допускает только тождественный автоморфизм.

Дальнейшее развитие указанных идей позволяет в § 6 получить следующую внутреннюю характеристику мебиусовых (т.е. представимых в виде суперпозиций конечного числа инверсий относительно сфер или отражений относительно гиперплоскостей) отображений в классе непрерывных отображений. Из всего материала §§ 5, 6 только теорема 5.2 требует знания некоторых утверждений § 2, остальные результаты полностью независимы.

Первой главой практически почти исчерпывается информация о линейно выпуклых множествах, которую можем получить, не налагая на них никаких дополнительных условий. К структуре линейно выпуклых множеств вернемся еще в § 16. Впрочем, читатель, при желании, может изучить § 16 сразу же после гл. I, так как проводимые в нем рассуждения, относящиеся к линейно выпуклым множествам, не используют результатов §§ 7–15.

В дальнейшем для получения более содержательных утверждений необходимо ограничиться более узким (на классе областей и компактов) классом сильно линейно выпуклых множеств, к изучению которого переходим в гл. II. Нахождению полной топологической классификации линейно выпуклых областей с гладкими границами посвящен § 7. Сначала устанавливается вид линейно выпуклых множеств, содержащих комплексные прямые (теорема 7.1). Потом

показывается, что если граница гладка и связна, а это естественно выполнено в ограниченном случае, то область гомеоморфна шару (теорема 7.3). Наконец, теорема 7.4 дает исчерпывающий ответ о строении линейно выпуклой области с гладкой, но несвязной границей. Показано также, что теорему 7.3 можно распространить на области, гладкие во всех точках границы, за исключением множества A, такого, что A локально не разбивает ∂D и $\partial D \setminus A$ всюду плотно в ∂D. Далее в примере 11.3 установлено, что избавиться от слова "локально" в предыдущем утверждении нельзя. В § 8 получено общее утверждение (теорема 8.1) о многозначных ацикличных отображениях грассмановых многообразий. Результаты этого параграфа носят вспомогательный характер и используются в дальнейшем (в § 9) при доказательстве линейной выпуклости сильно линейно выпуклых компактов и выпуклости компактов, обладающих ацикличными сечениями.

В § 9 изучаются геометрические свойства сильно линейно выпуклых областей и компактов. На основании ряда технических лемм и изучения графиков многозначных ацикличных отображений здесь доказывается один из основных результатов гл. II (теорема 9.1). Вещественный аналог этого результата — теорема 9.3 — утверждает выпуклость компакта, если его сечения всеми вещественными m-плоскостями ацикличны. Для доказательства этих утверждений существенно используется ряд теорем, доказанных в §§ 2–4, 8. Нужно отметить также, что сильно линейно выпуклые области, даже с гладкой границей, могут не быть выпуклыми. Из других утверждений параграфа отметим еще доказательство линейной выпуклости сильно линейно выпуклых областей и компактов. Напомним (пример 2.1), что даже выпуклое множество (но не компакт или область!) может не быть линейно выпуклым.

В § 10 изучаются компакты, все сечения которых касательными гиперплоскостями связны. Показано (теорема 10.1), что сопряженное множество к такому компакту состоит из сильно линейно выпуклых областей. На основании этого результата получена теорема 10.2, решающая одну из проблем работы [2].

Хотя класс сильно линейно выпуклых областей и компактов существенно шире класса аналогичных выпуклых множеств, однако в ряде случаев они могут совпадать. Поэтому в § 11 исследуются некоторые ситуации, которые приводят к выпуклым множествам. Здесь устанавливается (теорема 11.1), что область или компакт, являющие-

ся невырожденными декартовыми произведениями, сильно линейно выпуклы тогда и только тогда, когда они выпуклы. Похожий результат (теорема 11.2) получен и в более общем случае линейных полиэдров, однако здесь приходится накладывать ограничения на границу сомножителей. Показано также (теорема 11.3), что сильно линейно выпуклое замкнутое множество, лежащее в какой-нибудь вещественной гиперплоскости, но не лежащее ни в одной комплексной гиперплоскости, — выпукло.

Результат § 12 — теорема 12.1 — устанавливает любопытное свойство проекций невырожденных сильно линейно выпуклых компактов, которое не имеет вещественных аналогов. В § 13 увязываются свойства локальной и глобальной линейной выпуклостей. Показано, что из локальной линейной выпуклости глобальная линейная выпуклость, вообще говоря, не следует. Но некоторые дополнительные условия на границу, например, требование гладкости границы, уже обеспечивают глобальную характеристику для ограниченной области. Установлено (пример 13.4), что для неограниченной области добавления гладкости границы мало для получения глобальной линейной выпуклости. Цель гл. III в первую очередь показать, что ряд классических теорем функционального анализа в подходящей интерпретации останется справедливым, если выпуклость заменить сильной линейной выпуклостью. Известные комплексные обобщения теоремы Хана–Банаха исходили из того, что для выпуклого множества сначала находилась вещественная гиперплоскость, не пересекающая исходное множество, а в ней выделяли комплексную гиперплоскость. В случае сильной линейной выпуклости такой вещественной гиперплоскости уже, как правило, нет, но, оказывается, есть комплексная гиперплоскость, что обеспечивает решение задачи.

В § 14 получен комплексный аналог геометрической формы теоремы Хана–Банаха. Показано, что в линейно выпуклом случае аналога теоремы нет (пример 14.1). В § 15 вводится понятие комплексно экстремальных (c-экстремальных) точек и понятия c-оболочки и c-комбинации. Это комплексные аналоги вещественных понятий экстремальной точки и выпуклой оболочки. Введенные определения позволяют получить комплексные аналоги теорем Каратеодори (теорема 15.1), Крейна–Мильмана (теорема 15.4) и Кли (теорема 15.5). В этом же параграфе изучены c-экстремальные точки линейно аналитических полиэдров (теорема 15.3) и построен пример бесконечносвязного линейно выпуклого компакта со связными проекциями.

В § 16 опять встречаемся с линейно выпуклыми множествами. Примененный подход позволяет установить топологическое строение не только линейно выпуклых компактов, но и их всевозможных обобщений. Рассмотрение различных выпуклостей здесь по существу, поскольку оно позволяет применить при доказательстве метод индукции. Ключевой момент параграфа — теорема 16.1. Далее пример 16.2 показывает, что полученные оценки неулучшаемы. Дополнительные ограничения на компакты позволяют в некоторых случаях установить более точные оценки, если известны некоторые добавочные сведения о проекциях компактов или свойствах сопряженного множества (теоремы 16.2 и 16.3), в том числе и для c-оболочек.

В § 17 исследуются системы множеств, замкнутые в себе относительно пересечений, и действия некоторых групп. Для чтения этого параграфа из предыдущего материала достаточно знать определение c-оболочки. Во всем остальном он автономен. В гл. IV переходим к изучению многозначных линейно выпуклых функций. Глава может служить введением в теорию линейно выпуклых функций. Здесь установлены комплексные варианты некоторых понятий и утверждений выпуклого анализа. Эти исследования показывают, что в комплексном случае, в отличие от вещественного, по существу необходим многозначный подход.

В § 18 приводятся общие сведения, используемые в главе. Читателю, знакомому с выпуклым анализом, будет любопытно сравнить вводимые понятия и дальнейшие результаты с их вещественными аналогами, а также полезно разобраться в различиях и причинах их возникновения. В § 19 установлен комплексный аналог теоремы Фенхеля–Моро. Изучаются свойства сопряженной функции по заданным свойствам исходной функции. Показано, в частности, что комплексно однородная линейно выпуклая функция будет опорной функцией некоторого множества. В § 20 исследуются дифференциальные свойства вещественных многозначных функций со связными образами, заданных на отрезке. Здесь удается ввести такое понятие производной функции, при котором операция дифференцирования не выводит из класса изучаемых многозначных функций. На этот способ дифференцирования переносятся классические теоремы дифференциального исчисления.

В § 21 содержатся сведения о дифференцировании линейно выпуклых функций на языке субдифференциалов. Заметим, что поскольку точка не разбивает комплексную плоскость, в отличие от

вещественной прямой, то нельзя говорить о неравенствах как в вещественном случае, но все неравенства выпуклого анализа находят свой аналог на языке включений. Показано, что субдифференциалы сильно линейно выпуклой функции будут сильно линейно выпуклыми множествами, а использование теоремы 15.4 позволяет заключить, что субдифференциал открытой сильно линейно выпуклой функции в точке совпадает с c-оболочкой c-экстремальных субградиентов в этой точке. Теорема 21.3 вскрывает связь субдифференциала с двойственностью. В гл. V изучаются вопросы, идейно связанные с комплексной выпуклостью, и круг задач, тесно связанный с этой проблематикой. Глава начинается с перенесения на вещественный случай результатов § 7 о классификации обобщенно выпуклых множеств (теорема 22.1). Дальнейший шаг в исследовании обобщенной выпуклости, изучение в § 23 множеств (априори не выпуклых) для которых справедлив аналог теоремы Хана–Банаха. В §§ 24, 25 обобщены классические теоремы выпуклого анализа и комбинаторной топологии. Далее результат § 22 позволяет получить в теореме 26.1 гомологическое описание границы послойно обобщенно выпуклой области.

В §§ 27, 28 показано, что в случае ацикличных компактов для справедливости результатов § 9 достаточно обладать информацией о сечениях компакта только опорными плоскостями. Параграф 29 посвящен перенесению теоремы 11.1 на гиперкомплексный случай. Здесь же получены технические леммы, имеющие и самостоятельный интерес.

Glava VI носит справочный характер.

В § 30 приводятся исторические ссылки, даются сведения об авторах полученных результатов. Но особенно полезны для читателя, который хотел бы заняться самостоятельными исследованиями в этой области, перечисленные здесь нерешенные вопросы и ссылки на близкие исследования в литературе. Они могут послужить отправным пунктом для дальнейшего углубленного проникновения в затронутую настоящим исследованием обширную и интересную тематику. Наконец, § 31 содержит краткие сведения об используемых в работе терминах из топологии. Эти сведения приводятся только для справок и не могут служить для начального изучения топологии. Желающим ознакомиться подробнее с топологическим аппаратом, необходимо обратиться к специальной литературе. Написание настоящей книги стало возможным благодаря активной поддержке

членов семинаров по комплексному анализу, по топологическим методам анализа и по топологии в Институте математики НАН Украины. Всем им, принявшим существенное участие в обсуждении многих рассмотренных в книге результатов, автор выражает сердечную признательность. Я хочу поблагодарить своих учеников М.В. Ткачука и Б.А. Клищука, которые просмотрели всю рукопись и сделали ряд ценных замечаний.

Автор

Глава 1

Линейно выпуклые множества

§ 1. Основные понятия

В основе большинства рассмотрений настоящей книги лежит n-мерное аффинное пространство $\mathbb{C}^n$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, где n — любое целое положительное число, в частности $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$. Точки пространства $\mathbb{C}^n$ будем обозначать малыми латинскими буквами, например, $z \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где z_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — координаты точки z; $\Theta = (0, 0, \ldots, 0)$ — начало координат. Для двух точек $z, w \in \mathbb{C}^n$ запись $\langle z, w\rangle$ обозначает комплексное число $z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_n w_n$. Условимся также в дальнейшем обозначать E — произвольное множество в $\mathbb{C}^n$, ∂E — границу E; int E — внутренность E; D — область, K — компакт, $\varnothing$ — пустое множество.

Если $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)$ и $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1)$ — две различные точки из $\mathbb{C}^n$, то прямой называется множество точек z, удовлетворяющее системе из $n - 1$ уравнений

$$\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \frac{z_1 - z_1^0}{z_1^1 - z_1^0} = \frac{z_2 - z_2^0}{z_2^1 - z_2^0} = \cdots = \frac{z_n - z_n^0}{z_n^1 - z_n^0} \right\}. \tag{1.1}$$

Определение 1.1. Подмножество E пространства $\mathbb{C}^n$ называют аффинным подпространством пространства $\mathbb{C}^n$, если E вместе с каждыми двумя различными точками z^0, z^1 содержит также всю прямую γ.

Определение 1.2. Точка $z \in \mathbb{C}^n$, допускающая представление

$$z = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j, \quad \sum_{j=0}^{k} a_j = 1, \quad a_j \in \mathbb{C},$$
$$z^j \in E \quad \text{при} \quad j = 0, \ldots, k, \tag{1.2}$$

называется аффинно зависимой от E.

Как будет показано ниже, геометрическое определение 1.1 эквивалентно следующему алгебраическому.

Определение 1.3. Подмножество $E \subset \mathbb{C}^n$ называют аффинным подпространством пространства $\mathbb{C}^n$, если E содержит все точки, аффинно зависящие от E.

Легко проверить, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Определения 1.1 и 1.3 эквивалентны.*

Доказательство. Пусть E — аффинное подпространство в смысле определения 1.3. Тогда E вместе с различными точками z^0, z^1 содержит каждую точку z, допускающую представление $z = a_0 z^0 + a_1 z^1$, $a_0 + a_1 = 1$, или, что то же, $z = z^0 + a_1(z^1 - z^0)$, или $\frac{z - z^0}{z^1 - z^0} = a_1$, но это, если расписать покоординатно, система (1.1), задающая прямую через точки z^0, z^1. Обратно, если E — аффинное подпространство в смысле определения 1.1, то индукцией по числу слагаемых в (1.2) убедимся, что E содержит каждую аффинно зависимую от E точку. Для $k = 0$ это тривиально. Предположим, что E содержит все точки $w = \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_j w^j$, где $w = \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_j = 1$, $b_j \in \mathbb{C}$, $w^j \in E$, $j = 0, \ldots, k-1$, при $k \geq 1$. Если z — точка вида (1.2), то, согласно $\sum\limits_{j=0}^{k} a_j = 1$, можно считать, что одно из a_j не равно единице (не нарушая общности, пусть $a_k \neq 1$, т.е. $\sum\limits_{j=0}^{k-1} a_j \neq 0$), и написать

$$z = \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j \right) \left(\sum_{j=0}^{k-1} b_j z^j \right) + a_k z_k, \tag{1.3}$$

где $b_j = a_j / \sum\limits_{m=0}^{k-1} a_m$.

По предположению индукции $w = \sum\limits_{j=1}^{k-1} b_j z^j \in E$, так как

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_j = \sum_{j=0}^{k-1} \left(a_j / \sum_{m=0}^{k-1} a_m \right) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j / \sum_{m=0}^{k-1} a_m = 1.$$

Из (1.3) следует, что z лежит на прямой, проходящей через точки $w \in E$ и $z^k \in E$, и вместе с этой прямой принадлежит E.

Определение 1.4. Множество $E \subset \mathbb{C}^n$ называется аффинно независимым, если в E не существует точки z, аффинно зависящей от $E \backslash z$, т.е. когда из $\sum\limits_{j=0}^{k} a_j z^j = 0$ при $\sum\limits_{j=0}^{k} a_j = 0$ и попарно различных $z^j \in E$, $j = 0, 1, \ldots, k$, следует $a_j = 0$ для всех j. Очевидно, это совпадает с линейной независимостью векторов $z_1 - z_0, z_2 - z_0, \ldots, z_k - z_0$. Отсюда следует такое предложение.

Предложение 1.2. *Всякое аффинное подпространство $E \subset \mathbb{C}^n$ содержит такое максимальное аффинно независимое множество $A = \{z^0, z^1, \ldots, z^m\}$, что E представляет собой множество всех точек из $\mathbb{C}^n$, аффинно зависящих от A:*

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, z = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j, \ \sum_{j=0}^{m} a_j = 1 \right\}.$$

Определение 1.5. Входящее в предложение 1.2 число m называется комплексной размерностью E и обозначается $\dim_{\mathbb{C}} E = m$.

Замечание 1.1. Аффинное подпространство комплексной размерности m будет вещественным евклидовым пространством вещественной размерности $2m$, т.е. $\dim E = 2m$ [11].

При $m = n - 1$ аффинное подпространство E называют гиперплоскостью.

Определение 1.6. Множество $E \subset \mathbb{C}^n$ называется линейно выпуклым, если для каждой точки $z \in \mathbb{C}^n \backslash E$ существует гиперплоскость, проходящая через z и не пересекающая E.

Подчеркнем, что всюду в дальнейшем, если не оговорено другое, под прямыми, m-плоскостями и гиперплоскостями будем понимать аффинные подпространства $\mathbb{C}^n$ размерности 1, m и $n - 1$ соответственно.

П р и м е р 1.1. В случае $n = 1$ гиперплоскость — просто точка, поэтому произвольное множество $E \subset \mathbb{C}^1$ является линейно выпуклым.

П р и м е р 1.2. Всякое выпуклое замкнутое множество $E \subset \mathbb{C}^n$ или выпуклая область (т.е. множество, содержащее имеете с двумя точками и отрезок вещественной прямой, соединяющий их) являются линейно выпуклыми, так как через произвольную точку $z^0 \in \mathbb{C}^n \backslash E$ проходит вещественная гиперплоскость T вещественной размерности $2n-1$. Известно [186], что уравнение этой гиперплоскости можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \left[a_j \left(z_j - z_j^0 \right) + a_j^1 \left(\bar{z}_j - \bar{z}_j^0 \right) \right] = 0, \quad a_j, a_j^1 \in \mathbb{C}.$$

Тогда уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} a_j (z_j - z_j^0) = 0$$

задает гиперплоскость L, удовлетворяющую определению 1.6.

Обратное неверно: класс линейно выпуклых множеств значительно шире класса выпуклых множеств, как показывает следующий пример.

П р и м е р 1.3. Всякое множество $E \subset \mathbb{C}^n$, являющееся декартовым произведением $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ плоских множеств $E_j \subset \mathbb{C}^1$, $j = 1, \ldots, n$, линейно выпукло.

Это очевидно, потому что дополнение $\mathbb{C}^n \backslash E$ можно представить как объединение множеств вида

$$(\mathbb{C}^1 \backslash E_j) \times \mathbb{C}^{n-1} = \underbrace{\mathbb{C}^1 \times \cdots \times \mathbb{C}^1}_{(n-j) \text{ раз}} \times (\mathbb{C}^1 \backslash E_j) \times \underbrace{\mathbb{C}^1 \times \cdots \times \mathbb{C}^1}_{(n-j) \text{ раз}}.$$

В частности, линейно выпуклым множеством будет n-мерный тор $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ — произведение n окружностей.

Для дальнейших исследований нам будет важно следующее понятие сопряженного множества к множеству E:

$$E^* = \{ w \,|\, \langle w, z \rangle \neq 1 \text{ для всех } z \in E \}. \tag{1.4}$$

Заметим, что уравнение гиперплоскости $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j z_j = b$, не проходящей через начало координат (т.е. $b \neq 0$), всегда можно свести

к виду $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b} z_j = 1$ или, если принять $\frac{a_j}{b}$ за координаты точки $w^0 = \left(\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b}, \ldots, \frac{a_n}{b}\right)$, к виду $\langle w^0, z\rangle = 1$. Теперь, если каждой точке $w^0 \neq \Theta$ поставить в соответствие гиперплоскость $\{z \,|\, \langle w^0, z\rangle = 1\}$, то сопряженное множество E^* можно интерпретировать как множество гиперплоскостей, не пересекающих множество E, если $\Theta \in E$.

Пусть X и Y — два топологических пространства. Отображение $F : X \to Y$ называется многозначным, если образом точки $x \in X$ будет множество $F(x) \subset Y$. Отображение F называется полунепрерывным сверху в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$, такого, что $F(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x, такая, что $F(U(x)) \subset V$. Отображение F называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.

Отображение F называется полунепрерывным снизу в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$, такого, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$ найдется окрестность $U(x)$ точки x, такая, что $F(x') \cap V \neq \varnothing$ для любого $x' \in U(x)$. Отображение F называется полунепрерывным снизу, если оно полунепрерывно снизу в каждой точке.

Отображение называется непрерывным, если оно полунепрерывно снизу и сверху.

График отображения F $\Gamma(F)$ — это множество точек вида $(x, y) \in X \times Y$, удовлетворяющих условию $y \in F(x)$, где $p : \Gamma(F) \to X$, $p(x, y) = x$, $q : \Gamma(F) \to Y$, $q(x, y) = y$ — проекции графика. Иногда, если необходимо для различия, индексом внизу $\Gamma_X(F)$ будем указывать область задания отображения F. Под прообразом $F^{-1}y$ точки $y \in Y$ понимаем множество $\{x \in X | y \in F(x)\}$. Если для двух отображений $F, G : X \to Y$ для всех точек $x \in X$ выполнено включение $F(x) \subset G(x)$, то будем говорить, что G — продолжение отображения F, а F — сужение отображения G, при этом будем писать $F \subset G$.

Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется сечением отображения F, если f — сужение F, и непрерывным сечением, если f — к тому же непрерывное отображение.

Пусть $\overset{o}{\mathbb{C}}{}^n$ — пространство $\mathbb{C}^n$, пополненное бесконечной точкой (т.е. $\mathbb{C}^n$ компактифицировано одной точкой или, другими словами, отождествляются все точки $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, для которых хотя бы одна координата равна ∞), с топологией вещественной $2n$-мерной сферы S^{2n}. Легко убедиться, что многозначное отображение $\Phi : \mathbb{C}^n \to$

$\overset{o}{\mathbb{C}}{}^n$, заданное по закону

$$\Phi(z) = \{w \,|\, (\langle w, z\rangle = 1) \cup (w = \infty)\}, \tag{1.5}$$

непрерывно. Кроме того, если $\bar{z} = \{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n\}$ (черта сверху задает комплексно сопряженное число), то гомеоморфизм (т.е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение) $f : \mathbb{C}^n \to \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n \backslash \{\Theta\}$, где

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z}/|z|^2 & \text{при } z \neq \Theta, \\ \infty & \text{при } z = \Theta, \end{cases} \tag{1.6}$$

будет непрерывным сечением отображения Φ.

Отображение Φ интересно тем, что, как очевидно, $E^* = \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n \backslash \Phi(E)$, поэтому изучение сопряженного множества E^* можно заменить изучением его дополнения $\Phi(E)$.

Упражнение 1.1. Найти сопряженное множество для поликруга

$$Q = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_1| < r_1, |z_2| < r_2, \ldots, |z_n| < r_n\}.$$

Упражнение 1.2. Найти сопряженное множество для плоского множества

$$E = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, z_1 \in E_1 \subset \mathbb{C},\ z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0\}.$$

Упражнение 1.3. Доказать, что произвольное множество E, лежащее в вещественно двумерной плоскости $R^2 \subset \mathbb{C}^n$, линейно выпукло.

Упражнение 1.4. Доказать, что отображение $F : X \to Y$ полунепрерывно сверху тогда и только тогда, если для любого открытого множества $V \subset Y$ множество $F^{-1}(V)$ открыто в X.

Упражнение 1.5. Показать, что если $F : X \to Y$ — многозначное отображение локально компактных пространств, то полунепрерывность сверху F эквивалентна замкнутости графика $\Gamma(F)$.

Упражнение 1.6. Показать, что если Y — компактное пространство, то F полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда из соотношений

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \quad \text{и} \quad y_n \in F(x_n)$$

вытекает соотношение $y \in F(x)$ (при этом говорят, что верхний топологический предел $LsF(x_n)$ лежит в $F(x)$).

Упражнение 1.7. Доказать, что полунепрерывность снизу отображения $F : X \to Y$ эквивалентна тому, что для любого замкнутого множества $K \subset Y$ множество $F^{-1}(K)$ замкнуто в X.

Упражнение 1.8. Показать, что если Y — компактное пространство, то F полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда из соотношений

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{и} \quad y \in F(x)$$

вытекает существование последовательности $y_1, y_2, \ldots$, такой, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \quad \text{и} \quad y_n \in F(x_n)$$

(при этом говорят, что нижний топологический предел $LiF(x_n)$ содержит $F(x)$).

Упражнение 1.9. Показать, что если $F : X \to Y$ — полунепрерывное сверху отображение, то для произвольного компакта $A \subset X$ и $F(A)$ — компакт.

Если $F : X \to Y$ и $G : Y \to Z$ — два многозначных отображения, то композиция $G \circ F : X \to Z$ определяется как $G \circ F(x) = G(F(x))$ для всех $x \in X$.

Упражнение 1.10. Показать, что если $F : X \to Y$ и $G : Y \to Z$ — два полунепрерывных сверху отображения, то и композиция $G \circ F$ — полунепрерывное сверху отображение.

Подробнее со свойствами многозначных отображений можно ознакомиться в монографии [147].

§ 2. Свойства сопряженных и линейно выпуклых множеств

Предложение 2.1. *Для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}^n$: $E^* \supset \Theta$.*

Очевидно следует из определения сопряженного множества.

Предложение 2.2. *Если $E_1 \subset E$, то $E_1^* \supset E^*$ и $E_1^{**} \subset E^{**}$.*

Из $E_1 \subset E$ следует $\Phi(E_1) \subset \Phi(E)$. Тогда $E_1^* = \overset{o}{\mathbb{C}^n}\backslash\Phi(E_1) \supset \overset{o}{\mathbb{C}^n}\backslash\Phi(E) = E^*$.

Предложение 2.3. *Для открытого шара $I_r = \{z \,|\, z\bar{z} < r^2\}$ сопряженным множеством является замкнутый шар $I_r^* = \bar{I}_{1/r} = \{w \,|\, w\bar{w} \le 1/r^2\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства Коши–Буняковского $|\langle z,w\rangle| \le |z||w|$, очевидно, следует, что произвольная точка шара $\bar{I}_{1/r}$ лежит в I_r^*. С другой стороны, если $|w| = a > \frac{1}{r}$, то точка $z = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}}$ лежит в шаре I_r , так как удовлетворяет неравенству $z\bar{z} = \frac{\bar{w}w}{(w\bar{w})^2} = \frac{1}{w\bar{w}} = \frac{1}{a^2} < r^2$ и $\langle z,w\rangle = 1$. Следовательно, $w \notin I_r^*$.

Предложение 2.4. *Если E — компакт, то E^* открыто.*

Из непрерывности отображения Φ следует, что $\Phi(E)$ — компакт. Поэтому $E^* = \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n\backslash\Phi(E)$ открыто.

Предложение 2.5. *Если E открыто и $\Theta \in E$, то E^* — компакт.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E открыто. Докажем, что $\Phi(E)$ тоже открыто. Если $w^0 \in \Phi(E)\backslash(\infty)$, то гиперплоскость $\{w \,|\, \langle w^0, z\rangle = 1\}$ пересекает E. Существует столь малая окрестность U точки w^0, что для любого $w \in U$ гиперплоскость $\{z \,|\, \langle w,z\rangle = 1\}$ все еще пересекает E. Значит, $U \subset \Phi(E)\backslash(\infty)$. Так как E открыто и содержит Θ, то существует такое r, что $E \supset I_r$. Согласно предложениям 2.2 и 2.3, $E^* \subset \bar{I}_{1/r}$, т.е. $U = \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n\backslash\bar{I}_{1/r} \subset \Phi(E) = \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n\backslash E^*$ будет открытой окрестностью бесконечно удаленной точки в $\Phi(E)$. Следовательно, $\Phi(E)$ — открытое множество. Тогда $E^* = \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n\backslash\Phi(E)$ — замкнутое множество, лежащее в компактном шаре $E^*_{1/r}$, поэтому оно компактно.

Если не предполагать $\Theta \in E$, то предложение 2.5 неверно, но из доказательства очевидно, что E^* будет замкнуто.

Предложение 2.6. *Если γ — прямая, проходящая через начало координат, то $\{\Phi(z)\backslash(\infty) | z \in \gamma\backslash\Theta\}$ — семейство параллельных гиперплоскостей при разных $z \in \gamma\backslash\Theta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что уравнение прямой (1.1), проходящей через начало координат, можно переписать в виде

$$\gamma = \left\{z \,|\, z_j = z_j^1 t,\ t \in \mathbb{C}^1\right\}, \quad |z^1| \neq 0.$$

Тогда при $z \neq \Theta$ $\Phi(z)\backslash(\infty) = \{w \,|\, \langle w,z\rangle = 1\} = \{w | w_1 z_1^1 t + \cdots + w_n z_n^1 t = 1,\ t \neq 0\} = \{w \,|\, \langle w, z^1\rangle = \frac{1}{t}, t \neq 0\}$. Последнее множество состоит из семейства всех гиперплоскостей, параллельных гиперплоскости $\{w \,|\, \langle w, z^1\rangle = 1\}$, за исключением гиперплоскости, проходящей через начало координат.

Предложение 2.7. *Если γ — прямая, не проходящая через начало координат, то $\{\Phi(z)\backslash(\infty) | z \in \gamma\}$ — семейство гиперплоскостей, содержащих некоторую фиксированную $(n-2)$-плоскость N.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение прямой (1.1), не проходящей через начало координат, можно переписать в виде

$$\gamma = \{z \,|\, (z_j - z_j^0) = (z_j^1 - z_j^0)t,\ t \in \mathbb{C}^1,\ |z_j^0| \neq 0\} = \\ = \{z \,|\, z_j = (z_j^1 - z_j^0)t + z_j^0,\ t \in \mathbb{C}^1,\ |z_j^0| \neq 0\}.$$

Тогда $\Phi(z)\backslash(\infty) = \{w \,|\, \langle w, z\rangle = 1\} = \{w \,|\, w_1[(z_1^1 - z_1^0)t + z_1^0] + \cdots + w_n[(z_n^1 - z_n^0)t + z_n^0] = 1\}$. Если $t = 0$, то $\Phi(z^0)\backslash(\infty) = \{w \,|\, \langle w, z^0\rangle = 1\}$ задает уравнение гиперплоскости. Если $t = 1$, то $\Phi(z^1)\backslash(\infty) = \{w \,|\, \langle w, z^1\rangle = 1\}$ — уравнение другой гиперплоскости. Их пересечение $[\Phi(z^0)\backslash(\infty)] \cap [\Phi(z^1)\backslash(\infty)]$ задает $(n-2)$-плоскость N. Очевидно, что гиперплоскости $\Phi(z^0)\backslash(\infty)$ и $\Phi(z^1)\backslash(\infty)$ не могут быть параллельными, иначе, согласно предыдущему предложению, $z^1 = az^0$ и, следовательно, прямая $\gamma = \{z \,|\, z_j = az_j^0 t\}$ проходит через начало координат, что исключено условием. Покажем, что N содержится в каждой гиперплоскости $\Phi(z)\backslash(\infty)$. Имеем

$$\Phi(z)\backslash(\infty) = \{w \,|\, \langle w, z\rangle = 1\} = \{w \,|\, \langle w, (z^1 - z^0)t + z^0\rangle = 1,\ t \in \mathbb{C}^1\} = \\ = \{w \,|\, \langle w, z^1\rangle t + \langle w,\ z^0\rangle(1-t) = 1,\ t \in \mathbb{C}^1\}.$$

Но при $w \in N$ последнее равенство очевидно удовлетворяется. Заметим, что подобно предыдущему предложению семейство $\Phi(z)\backslash(\infty)$ содержит все гиперплоскости, содержащие N, за исключением гиперплоскости, проходящей через начало координат.

Предложение 2.8. *Пусть множество E содержит прямую. Тогда E^* содержится в гиперплоскости, проходящей через начало координат.*

Доказательство следует из предыдущих двух предложений, так как множество $\{\bigcup\limits_z \Phi(z) | z \in \gamma \subset E\}$ исчерпывает все пространство $\overset{o}{\mathbb{C}^n}$, за исключением гиперплоскости, проходящей через начало координат.

Предложение 2.9. *Для любого комплексного числа $\lambda \neq 0$ $(\lambda E)^* = \lambda^{-1} E^*$.*

Предложение 2.10. *Множества E^* и $(z + E)^*$ гомеоморфны, если $\Theta \in E \cap (z^0 + E)$ или $\Theta \notin E \cup (z_0 + E)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению сопряженного множества, $\Theta \in E^* \cap (z_0 + E)$. Множество $E^*\backslash\Theta$ состоит из гиперплоскостей, не пересекающих E, а сдвиг E на z_0 взаимно однозначно переводит гиперплоскость $\langle w^0, z\rangle = 1$, $w^0 \neq \Theta$, в параллельную

ей гиперплоскость $\langle w^0, z - z_0\rangle = 1$. При этом, чтобы выполнялось включение $\Theta \in z_0 + E$, необходимо и достаточно, чтобы $z_0 \in E$.

Предложение 2.11. *Пусть $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ — аффинное отображение пространства $\mathbb{C}^n$ "на" пространство $\mathbb{C}^m$ и $E \subset \mathbb{C}^m$ — линейно выпуклое множество. Тогда множество $f^{-1}(E) \subset \mathbb{C}^n$ также линейно выпукло.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}^n \backslash f^{-1}(E)$. Рассмотрим точку $f(z)$ и гиперплоскость $L \subset \mathbb{C}^m$ через $f(z)$, не пересекающую E. Тогда $f^{-1}(L)$ — аффинное подмногообразие пространства $\mathbb{C}^n$, $f^{-1}(L) \cap f^{-1}(E) = \varnothing$, кроме того, прообразом гиперплоскости при аффинном отображении "на" будет гиперплоскость.

Замечание 2.1. Ниже будет показано (см. пример 14.1), что образ линейно выпуклого множества при аффинном отображении, вообще говоря, не будет линейно выпуклым.

Предложение 2.12. $(\bigcup\limits_\alpha E_\alpha)^* = \bigcap\limits_\alpha E_\alpha^*$.

Действительно,

$$(\bigcup_\alpha E_\alpha)^* = \overset{o}{\mathbb{C}^n} \backslash \bigcup_\alpha \Phi(E_\alpha) = \bigcap_\alpha [\overset{o}{\mathbb{C}^n} \backslash \Phi(E_\alpha)] = \bigcap_\alpha E_\alpha^*.$$

Предложение 2.13. *Пусть последовательность компактов E_k, $k = 1, 2, \ldots$, такова, что $E_{k+1} \subset E_k$ и $E = \bigcap\limits_k E_k$. Тогда $E^* = \bigcup\limits_k E_k^*$.*

Доказательство. Из $E_k \supset E$ следует $E_k^* \subset E^*$ и $\cup E_k^* \subset E^*$. Пусть точка $w^0 \in E^*$, следовательно, гиперплоскость $L = \{z | \langle w^0, z\rangle = 1\}$ не пересекает E. Предположим, что $w^0 \notin \cup E_k^*$; тогда гиперплоскость L пересекает каждое множество E_k, $k = 1, 2, \ldots$. Получим систему вложенных компактов $K_k = E_k \cap L$, $K_{k+1} \subset K_k$. Следовательно, $K = \cap K_k \neq \varnothing$, что противоречит равенству $K = \cap K_k = (\cap E_k) \cap L = E \cap L = \varnothing$. В силу произвольности выбора w^0, получаем обратное включение $\cup E_k^* \supset E^*$, поэтому $E^* = \bigcup\limits_k E_k^*$.

Предложение 2.14. *Если компакт E аппроксимируется извне последовательностью областей D_k, $k = 1, 2, \ldots$, то $E^* = \bigcup\limits_k D_k^*$, $E^{**} = \bigcap\limits_k D_k^{**}$.*

Доказательство. Из предложения 2.13 $E^* = \bigcup\limits_k D_k^*$. Используем цепочку включений $D_{k+1} \subset \bar{D}_{k+1} \subset D_k$. Согласно предложению 2.2 $D_{k+1}^* \supset \bar{D}_{k+1}^* \supset D_k^*$, поэтому $\bigcup\limits_k \bar{D}_k^* = \bigcup\limits_k D_k^*$. Следовательно, $E^* = \bigcup\limits_k D_k^*$. Теперь из предложения 2.12 вытекает $E^{**} = \bigcap\limits_k D_k^{**}$.

Запись $E_1 \subset\subset E$ означает компактную вложимость подмножества, т.е. замыкание $\bar{E}_1$ ограничено и вместе с его некоторой открытой окрестностью лежит в E.

Предложение 2.15. *Если $E_1 \subset\subset E$ и $\Theta \in E_1$, то $E^* \subset\subset E_1^*$ и $E_1^{**} \subset\subset E^{**}$.*

Доказательство. Пусть некоторая окрестность $U(\bar{E}_1) = E_2$ замыкания $\bar{E}_1$ лежит в E. Тогда справедливы включения $E_1 \subset \bar{E}_1 \subset E_2 \subset E$ и, согласно предложению 2.2, $E_1^* \supset \bar{E}_1^* \supset E_2^* \supset E^*$. По предложению 2.5 множество E_2^* компактно, а, согласно предложению 2.4, множество $\bar{E}_1^*$ открыто. Поэтому $E_1^* \supset\supset E^*$. Повторное применение этого рассуждения, с учетом предложения 2.1, завершает доказательство.

Предложение 2.16. *$E^{**} \supset E$, $E^{***} = E^*$.*

Доказательство. Из определения сопряженного множества следуют включения $E^{**} \supset E$ и $E^{***} \supset E^*$. Применяя предложение 2.2 к включению $E^{**} \supset E$, получим $E^{***} = E^*$.

Теорема 2.1. *Для линейной выпуклости множества $E, \Theta \in E$, необходимо и достаточно, чтобы $E^{**} = E$.*

Доказательство. Пусть множество $E, \Theta \in E$, линейно выпукло. Следовательно, для произвольной точки $z^0 \in \mathbb{C}^n \backslash E$ существует гиперплоскость l, проходящая через точку z^0 и не пересекающая E. Так как начало координат принадлежит E, то эта гиперплоскость не проходит через Θ и уравнение ее может быть записано в виде $l = \{z \,|\, \langle z, w^0 \rangle = 1\}$, где $w^0 \in E^*$. Поэтому $z^0 \notin E^{**}$, так как $\langle z^0, w^0 \rangle = 1$. Отсюда имеем, что произвольная точка $z^0 \in \mathbb{C}^n \backslash E$ не принадлежит E^{**}. Отсюда и из предложения 2.16 следует $E^{**} = E$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $E^{**} = E$ и $z^0 \in \mathbb{C}^n \backslash E = \mathbb{C}^n \backslash E^{**}$. Тогда существует точка $w^0 \in E^*$, такая, что $\langle z^0, w^0 \rangle = 1$. Гиперплоскость $l = \{z \,|\, \langle z, w^0 \rangle = 1\}$ проходит через точку z^0, но не пересекает множества E, так как никакая ее точка не принадлежит E^{**}. Следовательно E — линейно выпуклое множество. Теорема доказана.

Следующий результат — очевидное следствие теоремы и предложения 2.16.

Следствие 2.1. Для произвольного множества E сопряженное множество E^* линейно выпукло.

Предложение 2.17. *Пересечение произвольной совокупности линейно выпуклых множеств линейно выпукло.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcap\limits_{\alpha} E_\alpha$, где E_α — линейно

выпуклые множества. Если $z \notin E$, то существует E_α, такое, что $z \notin E_\alpha$, и гиперплоскость L, содержащая z, со свойством $L \cap E_\alpha = \varnothing$. Но тогда $L \cap E = \varnothing$.

Предложение 2.17 показывает, что линейная выпуклость удовлетворяет аксиоме выпуклости [201], т.е. к ней применимы все положения аксиоматической теории выпуклости. В следующей главе будет рассматриваться другое обобщение выпуклости, которое уже не удовлетворяет этой аксиоме.

Следующий пример показывает, что аналогичное утверждение для объединения множеств (даже упорядоченных по включению) в общем случае уже не справедливо.

П р и м е р 2.1. Пусть в пространстве $\mathbb{C}^2 = \{z = (z_1, z_2) \,|\, z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2\}$ задано семейство замкнутых множеств $F_n = \{z \,|\, -ny_1 \geq y_2 \geq ny_1\}$. Легко убедиться, что каждое множество F_n выпукло и, следовательно, линейно выпукло. Однако множество $E = \bigcup\limits_n F_n = \{z \,|\, (y_1 < 0) \bigvee (y_1 = y_2 = 0)\}$ не является линейно выпуклым, так как для произвольной точки $z^0 \notin E$, но лежащей на ∂E с условием $y_1^0 = 0$, $y_2^0 \neq 0$, уравнение прямой, не пересекающей E, должно иметь вид

$$\frac{z_1 - z_1^0}{a} = \frac{z_2 - z_2^0}{b}, \quad a, b \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Далее заметим, что $b \neq 0$ потому, что в противном случае прямая γ имеет вид $z_2 = z_2^0$ и, следовательно, пересекает E. Таким образом, уравнение (2.1) сводится к уравнению

$$z_1 - z_1^0 = d\big(z_2 - z_2^0\big), \quad d \in \mathbb{C}, \tag{2.2}$$

или с учетом того, что $d = S_1 + iS_2$, к системе вещественных линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_1^0 = S_1\big(x_2 - x_2^0\big) - S_2\big(y_2 - y_2^0\big), \\ y_1 = S_1\big(y_2 - y_2^0\big) - S_2\big(x_2 - x_2^0\big). \end{cases} \tag{2.3}$$

Заметим теперь, что прямая γ должна лежать в вещественной гиперплоскости $y_1 = 0$, иначе $\gamma \cap E \neq \varnothing$. Теперь легко видеть, что либо система (2.3) имеет решение вида $(x_1, 0; x_2, 0)$, тогда $\gamma \cap E \neq \varnothing$, либо множество ее решений принадлежит множеству решений

системы

$$\begin{cases} x_1 - x_1^0 = S_1(x_2 - x_2^0), \\ y_2 = y_2^0, \\ y_1 = 0, \end{cases}$$

которое вещественно одномерно и не может содержать комплексную прямую. Следовательно, $\gamma \cap E \neq \varnothing$ и E не является линейно выпуклым множеством.

Замечание 2.2. Заменяя в примере (2.1) множества F_n на их пересечения с компактным шаром $B_R = \{z||z| \leq R\}$, получим аналогичный пример для компактов, где $K_n = F_n \cap B_R$, $A = E \cap B_R$. Следует также отметить легко проверяемый факт, что множества K_n и A будут выпуклыми. Докажем линейную выпуклость объединения упорядоченного семейства открытых линейно выпуклых множеств.

Предложение 2.18. *Пусть $\{E_\alpha\}$, $\alpha \in A$, — семейство линейно упорядоченных по включению линейно выпуклых открытых множеств $E_\alpha \subset \mathbb{C}^n$, т.е. A линейно упорядочено и $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow E_\alpha \subset E_\beta$. Тогда множество $E = \bigcup\limits_{\alpha \in A} E_\alpha$ линейно выпукло.*

Доказательство. Пусть $z \notin E$. Тогда $z \notin E_\alpha$ для всех α. Выберем в каждом компакте E_α^* точку w, задающую гиперплоскость, проходящую через точку z и не пересекающую E_α. Так как $\cap E_\alpha^*$ — компакт, то из совокупности $\{w_\alpha\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке $w \in \cap E_\alpha^*$ согласно предложению 2.12. Точка w задает гиперплоскость L, проходящую через точку z и не пересекающую E.

Покажем, что сопряженные множества фактически задаются проекциями исходного множества.

Если в пространстве $\mathbb{C}^n$ задана гиперплоскость L, то под канонической проекцией π_L пространства $\mathbb{C}_n$ на прямую γ, не параллельную L, понимаем отображение, которое каждой гиперплоскости L_1, параллельной L, ставит в соответствие точку $\gamma \cap L_1$. Под канонической проекцией множества E $\pi_L : E \to \gamma$ понимаем ограничение $\pi_{L|E}$. Очевидно, что образ проекции не зависит от выбора прямой γ, не параллельной L, в том смысле, что все такие образы проекций гомеоморфны между собой.

Предложение 2.19. *Пусть $E \subset \mathbb{C}^n$ и $\Theta \in E$ — произвольное множество, l — прямая, проходящая через начало координат, L — гиперплоскость, $L = \Phi(w) \backslash (\infty), w \in l$. Тогда для канонической*

проекции $\pi_L : E \to \gamma$ *множество* $\overset{o}{\gamma}\backslash\pi_L(E)$, *где* $\overset{o}{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$, *гомеоморфно* $l \cap E^*$.

Доказательство. Согласно предложению 2.6, каждая точка $w \in l\backslash\Theta$ задает гиперплоскость $\Phi(w)\backslash(\infty)$, а $\Phi(\Theta) = \infty$. Очевидно, что точке $w \in l \cap E^*$ взаимно однозначно соответствует гиперплоскость $\Phi(w)\backslash(\infty)$, не пересекающая E, или, что то же самое, точка $\gamma \cap [\Phi(w)\backslash(\infty)] \in \gamma\backslash\pi_L(E)$. Понятно, что имеет место гомеоморфизм дополнений $\pi_L(E) \approx \overset{o}{l}\backslash l \cap E^*$.

Напомним, что n-мерное комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ топологически эквивалентно топологизированному угловой метрикой множеству прямых пространства $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через Θ.

Более подробное описание проективных пространств можно найти в [193, с. 45]. Заметим, что если для семейства гиперплоскостей, содержащих фиксированную $(n-2)$-плоскость T, выберем дополнительную к T в $\mathbb{C}^n$ 2-плоскость R, такую, что $T \cap R = a$, то пересечениями гиперплоскостей этого семейства с R будут прямые и в R получим семейство прямых, проходящих через фиксированную точку a. Согласно сказанному выше, это одномерное проективное пространство $\mathbb{C}P^1$.

Из предложения 2.7 видно, что оно взаимно однозначно соответствует при отображении Φ пополненной прямой $\overset{o}{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$, не проходящей через начало координат, если соответствие дополнить следующим образом: точка (∞) отображается в гиперплоскость, проходящую через начало координат. Если T — $(n-2)$-плоскость, не пересекающая множество E, то под канонической проекцией π_T множества E на проективное пространство $\mathbb{C}P^1$ понимаем отображение, ставящее в соответствие сечению $E \cap L$ гиперплоскость L, проходящую через T. Заметим, что отображение задано корректно, так как различные гиперплоскости этого семейства пересекаются лишь по T, а $T \cap E = \varnothing$.

Предложение 2.20. *Пусть* $E \subset \mathbb{C}^n$ — *произвольное множество,* $T - (n-2)$*-плоскость,* $T \cap E = \varnothing$, l — *прямая в сопряженном пространстве, задающая проективное пространство гиперплоскостей, содержащих* T. *Тогда множество* $\mathbb{C}P^1\backslash\pi_T(E)$ *гомеоморфно множеству* $l \cap E^*$.

Доказательство. Очевидно, что точкам $l \cap E^*$ при отображении Φ взаимно однозначно соответствуют гиперплоскости,

не пересекающие E, т.е. проектирующиеся на дополнение к $\pi_T(E)$. Как и в предыдущем предложении, $\pi_T(E) \approx \overset{o}{l} \setminus l \cap E^*$.

Определение 2.1. Множество E, лежащее в вещественной двумерной плоскости T (в частности, на комплексной прямой), называется односвязным, если $T \setminus E$ связно.

Предложение 2.21. *Если множество E связно, то сечения E^* прямыми односвязны.*

Доказательство. Предложение очевидным образом следует из определения 2.1 и предложений 2.19 и 2.20, если учесть, что образы проекций $\pi_L(E)$ и $\pi_T(E)$ для связного E всегда связны.

Предложение 2.22. *Для произвольного множества E образы проекций множеств E и E^{**} совпадают.*

Доказательство. Используя предложения 2.20, 2.19 и 2.16, имеем $\pi(E^{**}) \approx \overset{o}{l} \setminus l \cap E^{***} = \overset{o}{l} \setminus l \cap E^* \approx \pi(E)$, где $\pi = \pi_L$ или $\pi = \pi_T$. Кроме того, заметим, что E^{**} получается из E присоединением тех точек пространства $\mathbb{C}^n$, через которые нельзя провести гиперплоскость, не пересекающую E. Очевидно, что такое присоединение не меняет образа ни одной проекции.

Предложение 2.23. *Если $\Theta \in G$, $G \subset \mathbb{C}^n$ — ограниченное открытое множество, то точка w^0 принадлежит границе ∂G^* тогда и только тогда, когда гиперплоскость $L = \{z \,|\, \langle w^0, z\rangle = 1\}$ проходит через какую-нибудь точку границы ∂G, но не пересекает множество G.*

Доказательство. Пусть гиперплоскость L не пересекает G, но проходит через некоторую точку $z^0 \in \partial G$. Тогда точка $w^0 \in G^*$ и не может лежать во внутренности компакта G^*, иначе, если некоторая окрестность точки w^0 $U(w^0) \subset G^*$, то все гиперплоскости $\{z \,|\, \langle w, z\rangle = 1\}$, $w \in U(w^0)$, не пересекали бы G, а это противоречит непустоте пересечения $L \cap \partial G$. С другой стороны, если $w^0 \in \partial G^*$, то $w^0 \in G^*$ в силу компактности G^* (предложение 2.5) и, следовательно, гиперплоскость L не пересекает G. Если L не пересекает компакта $\bar{G}$, то, по предложению 2.4, w^0 принадлежит открытому множеству $\bar{G}^* \subset G^*$ и не может лежать на границе ∂G^*. Поэтому L не пересекает G, но непременно пересекает $\bar{G}$, значит L проходит через некоторую точку границы ∂G.

Предложение 2.24. *Если E — линейно выпуклое множество, то и внутренность его $\operatorname{int} E$ — линейно выпуклое множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности, будем считать, что $\Theta \in \operatorname{int} E$. Нам нужно только показать, что для произвольной точки $z^0 \in \partial E$ существует гиперплоскость, содержащая z^0 и не пересекающая $\operatorname{int} E$. Для всех остальных точек из $\mathbb{C}^n \backslash (\overline{\operatorname{int} E})$ это следует из линейной выпуклости E. Рассмотрим $(\operatorname{int} E)^*$. Согласно предложению 2.5 это — компакт. Пусть $\{z^k\}$ — последовательность точек в $\mathbb{C}^n \backslash E$ и $\lim\limits_{k\to\infty} z^k = z^0$. Для каждой точки z^k существует гиперплоскость L_k, содержащая z_k и не пересекающая E. Каждая гиперплоскость L_k задается уравнением $L_k = \{z \,|\, \langle w^k, z\rangle = 1\}$, где $w^k \in E^* \subset (\operatorname{int} E)^*$. Из последовательности $\{w^k\}$ выбираем сходящуюся последовательность. Пусть $w^0 \in (\operatorname{int} E)^*$ — ее предельная точка. Тогда гиперплоскость $L = \{z \,|\, \langle w^0, z\rangle = 1\}$, во-первых, не пересекает $\operatorname{int} E$, во-вторых, проходит через точку z^0, так как $\langle w^0, z^0\rangle = \lim\limits_{k\to\infty} \langle w^k, z^k\rangle = 1$.

Заметим, что для замыкания линейно выпуклого множества аналогичное утверждение, как видно из следующего примера, уже неверно.

П р и м е р 2.2. Легко видеть, что область $D = \{z \,|\, |z_2| < |z_1 - 1| < 2\}$ линейно выпукла в $\mathbb{C}^2$, но ее замыкание $\bar{D} = \{z \,|\, |z_2| \le |z_1 - 1| \le 2\}$ уже не линейно выпукло, так как для точки $z = (1, 1) \notin D$ произвольная прямая, содержащая ее, непременно пересекает $\bar{D}$.

Множество E называется звездным относительно точки $a \in E$, если вместе с произвольной точкой b в E лежит отрезок $[a, b]$.

Предложение 2.25. *Если E — звездное относительно начала координат множество, то E^* также звездно относительно начала координат.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $w^0 \in E^*$ и существует число λ, $0 < \lambda < 1$, такое, что точка $w^1 = \lambda w^0 \notin E^*$. Следовательно, существует $z^1 \in E$, для которого $\langle w^1, z^1\rangle = 1$. Но E звездно относительно начала координат, поэтому $z^0 = \lambda z^1 \in E$. Значит, $\langle w^0, z^0\rangle = \langle \lambda w^0, \frac{1}{\lambda} z^0\rangle = \langle w^1, z^1\rangle = 1$, т.е. $w^1 \in E^*$. Это противоречие доказывает предложение.

Предложение 2.26. *Если область D ограничена и $\lambda \bar{D} \subset D$, $0 < \lambda < 1$, то D^* — звездный относительно начала координат компакт, а $\bar{D}^*$ — такая звездная относительно начала координат область, что ее замыкание $\overline{(\bar{D})}^* = D^* = \bigcap\limits_{\lambda>1} \lambda(\bar{D})^*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предыдущего предложения, предложений 2.4 и 2.5 следует, что D^* — звездная относительно начала координат область, а $\bar{D}$ — звездный относительно начала координат

компакт. Возьмем произвольное $\lambda > 1$. Тогда $(1/\lambda)\bar{D} \subset\subset D$, а значит, согласно предложениям 2.9 и 2.15, $(\lambda^{-1}\bar{D})^* = \lambda\overline{(D)}^* \supset\supset \overline{(\bar{D})}^* \supset D^*$. Поэтому $\bigcap\limits_{\lambda>1}(\lambda(\bar{D})^*) = \overline{(\bar{D})}^* \supset D^*$. Обратное включение вытекает из $\overline{(D)}^* \subset D^*$.

Полярой множества E называется множество

$$E^0 = \{w | Re\langle z, \bar{w}\rangle \leq 1 \text{ для всех } z \in E\}.$$

Известно, что поляра любого множества E является замкнутым выпуклым множеством [191]. Аналогично вводится антиполяра $E^\bullet$:

$$E^\bullet = \{w | \bar{w} \in E^0\} = \{w | Re\langle z, w\rangle \leq 1 \text{ для всех } z \in E\}.$$

Множество $E^\bullet$ симметрично поляре относительно комплексного сопряжения, следовательно, оно тоже замкнуто и выпукло.

Предложение 2.27. *Пусть множество E открыто. Тогда $E^\bullet \subset E^*$.*

Доказательство. Включение $E^\bullet \subset E' = \{w \mid \mathrm{Re}\langle z, w\rangle < 1 \text{ для всех } z \in E\}$ очевидно. Покажем, что для открытого множества E выполнено равенство. Из определения $E' \subset E^\bullet$. Если $E^\bullet \backslash E' \neq \varnothing$, то найдется точка $w^0 \in E^\bullet \backslash E'$. Для этой точки $\mathrm{Re}\langle z, w^0\rangle \leq 1$ для всех $z \in E$ и для некоторой точки $z^0 \in E$ $\mathrm{Re}\langle z^0, w^0\rangle = 1$. В силу открытости E, $z^0 \in E$ вместе с некоторой окрестностью $U(z^0)$. Вещественно линейная функция $\mathrm{Re}\langle z, w^0\rangle$ не может достигать в точке z^0 своего максимального значения. Поэтому существует точка $z \in U(z^0) \subset E$, в которой $\mathrm{Re}\langle z, w^0\rangle > 1$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Определение 2.2. Множество $E \subset \mathbb{C}^n$ называется круговым, если с каждой точкой z^0 ему принадлежит и любая точка

$$z = z^0 e^{i\Theta}, \quad 0 < \Theta < 2\pi.$$

Круговое множество называется полным, если вместе с каждой точкой z^0 ему принадлежат и все точки $z = tz^0$, $t \in \mathbb{C}$, для которых $|t| \leq 1$.

Предложение 2.28. *Если $D \in \Theta$ — круговая область, то $D = D^\bullet = D^0$ — круговой выпуклый компакт. Если к тому же область D ограничена, $\lambda\bar{D} \subset D$, $0 < \lambda < 1$, то $(\bar{D})^*$ — выпуклая круговая область.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если D — круговая область, то по непрерывности $\bar{D}$ — круговое множество. Из предложения 2.9, полагая $\lambda = e^{i\Theta}$, получим, что D^* и $(\bar{D})^*$ — тоже круговые множества. Имеем

$$D^* = \{w \,|\, \langle w, z\rangle \neq 1,\ z \in D\} =$$
$$= \{w \,|\, \langle w, ze^{i\Theta}\rangle \neq 1,\ 0 \leq \Theta \leq 2\pi,\ z \in D\} =$$
$$= \{w \,|\, \langle w, z\rangle \neq 1,\ z \in D\} = \{w \,|\, |\langle w, z\rangle| < 1,\ z \in D\} \subset$$
$$\subset \{w \,|\, \mathrm{Re}\langle w, z\rangle \leq 1,\ z \in D\} = D^\bullet,$$

поэтому, в силу предложения 2.27, $D^* = D^\bullet$. Кроме того, для кругового множества $D^\bullet = D^0$, так как из $z \in D^\bullet$ следует и $\tilde{z} \in D^0$.

Если область D ограничена и $\lambda\bar{D} \subset D$, $0 < \lambda < 1$, то, согласно предложению 2.26, $(\bar{D})^*$ — звездная круговая область и $(\bar{D})^* = \cap\lambda(\bar{D})^*$. Покажем выпуклость $(\bar{D})^*$. Если $(\bar{D})^*$ не выпукла, то существует пара точек $\tilde{z^1}, \tilde{z^2} \in (\bar{D})^*$, такая, что некоторая точка z^0 соединяющего их отрезка не лежит в $(\bar{D})^*$. В силу звездности относительно начала координат области $(\bar{D})^*$, существует $\lambda_0 > 1$, для которого $\lambda_0 z^1$, $\lambda_0 z^2 \in (\bar{D})^* \subset D^*$, но $\lambda_0 z^0 \notin (\bar{D})^*$ (если бы $\lambda_0 z^0 \in (\bar{D})^*$, то и $z^0 \in (\bar{D})^*$ в силу звездности). Очевидно, что и все точки λz^0 при $\lambda_0 \geq \lambda \geq 1$ не принадлежат $(\bar{D})^*$. Из представления D видно, что $\lambda_0 z^0 \notin \cap\lambda(\bar{D})^* = D^*$. Следовательно, D^* невыпукло. Но это противоречит совпадению D^* с выпуклым множеством $D^\bullet$.

Понятие n-кругового и полного n-кругового множеств [227] вводится аналогично определению 2.2, требуется только покоординатное выполнение условия (2.1).

Упражнение 2.1. Пусть D — n-круговая область. Показать, что тогда $D^* = D^\bullet = D^0$ – n-круговой выпуклый компакт. А если к тому же D — ограниченная полная n-круговая область, то $(\bar{D})^*$ — выпуклая n-круговая область.

П р и м е р 2.3. Пусть $D = \left\{z | z = x + iy, |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |y| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \subset \mathbb{C}$. Тогда сопряженное множество $D^* = \left\{w \middle| |w \pm \frac{1}{\sqrt{2}}| \leq \frac{1}{2}, |w \pm \frac{i}{\sqrt{2}}| \leq \frac{1}{2}\right\}$, состоящее из объединения четырех замкнутых кругов, является не выпуклым компактом.

Пример очевидным образом распространяется на n-мерный случай рассмотрением декартовых произведений $D \times \mathbb{C}^{n-1}$ и показывает, что в случае некруговых выпуклых областей сопряженное множество может быть не выпуклым.

Заметим, что эта ситуация — не исключение, а встречается в подавляющем большинстве случаев.

Если для какого-нибудь сечения множества E прямой λ, проходящей через начало координат, дополнение к инверсии множества $\lambda \cap E$ — невыпуклое множество, то некоторая проекция множества E^*, согласно предложению 2.19, будет невыпуклой. Следовательно, невыпукло и множество E^*.

Предложение 2.29. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$, $\Theta \in D$, — связная область и для каждой точки z^0 границы ∂D существует гиперплоскость, проходящая через z^0 и не пересекающая D. Тогда D будет связной компонентой некоторого линейно выпуклого множества.*

Доказательство. Пусть z^0 — произвольная точка границы ∂D. Выберем одну из гиперплоскостей, проходящую через z^0 и не пересекающую D. Так как эта гиперплоскость не проходит через начало координат, то ее уравнение можно записать в виде $\{z \,|\, \langle w^0, z\rangle = 1\}$. Значит $w^0 \in D^*$, и поэтому $z^0 \notin D^{**}$, так как $\langle w^0, z^0\rangle = 1$. Итак, любая точка границы ∂D не принадлежит D^{**}. Отсюда и из предложения 2.16 получим, что D — связная компонента линейно выпуклого множества D^{**}.

Области, рассмотренные в предложении 2.29, обычно называются линейно выпуклыми по Айзенбергу, который впервые обратил внимание на их важность в комплексном анализе [3]. При $n = 2$ аналогичные области рассматривались Г. Беенке и Е. Пешлем [257].

Предложение 2.30. *Если компакт $K \subset \mathbb{C}^n$, $\Theta \in K$, аппроксимируется извне последовательностью линейно выпуклых по Айзенбергу областей, то K будет связной компонентой линейно выпуклого компакта.*

Доказательство. Пусть K аппроксимируется извне последовательностью линейно выпуклых по Айзенбергу областей $K = \cap D_k^{**}$, $k = 1, 2, \ldots, D_{k+1} \subset D_k$. Согласно предложению 2.29, D_k совпадает со связной компонентой множества $(D_k)^{**}$. А так как, согласно предложению 2.14, $K^{**} = (\cap D_k)^{**} = \cap D_k^{**}$, то связная компонента K^{**}, содержащая K, непременно содержится в пересечении $\cap D_k = K$.

В главе III будет построен пример 15.3, показывающий, что связные компоненты линейно выпуклых областей и компактов, вообще говоря, могут не быть линейно выпуклыми.

Предложение 2.31. *Всякая связная компонента D открытого линейно выпуклого множества является областью голоморфности.*

Доказательство очевидным образом следует из того, что для каждой граничной точки $z^0 \in \partial D$ области D существует гиперплоскость $\langle a, z\rangle + b = 0$, не пересекающая D и проходящая через z_0. Тогда функция $\frac{1}{\langle a,z\rangle+b}$ голоморфна в D и непродолжима в z^0. В силу известного признака областей голоморфности [241], D является областью голоморфности.

Упражнение 2.2. Доказать, что поляра

$$E^0 = \{w \mid \operatorname{Re}\langle z, \bar{w}\rangle \le 1 \text{ для всех } z \in E\}$$

будет замкнутым выпуклым множеством для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}^n$.

Более тонкие связи между исходным множеством и сопряженным к нему будут изучаться в последующих параграфах с привлечением методов теории гомологий.

§ 3. Применение гомологических методов при изучении сопряженных множеств

В настоящем параграфе используются некоторые понятия теории гомологий и теории расслоенных пространств, с основами которых можно ознакомиться в монографиях [193, 236] или кратко в приложении (§ 31).

Пусть $H^j(E)$ — j-я группа когомологий Александрова–Чеха множества E с коэффициентами в группе целых чисел; $\widetilde{H}^j(E)$ — приведенная группа. Имеет место изоморфизм групп

$$H^j(E) \approx \begin{cases} \widetilde{H}^j(E), & j > 0, \\ \widetilde{H}^j(E) \oplus \mathbb{Z}, & j = 0. \end{cases}$$

Кроме того, пусть $\widetilde{H}_j(E)$ — j-я приведенная группа сингулярных гомологий множества E с коэффициентами в группе целых чисел.

Отметим еще, что в отображении Φ (см. § 1 (1.5)) образ каждой точки $z \ne \Theta$ гомеоморфен вещественной $(2n-2)$-сфере S^{2n-2}. Это легко проверить, используя стереографическую проекцию сферы на компактифицированную одной точкой гиперплоскость.

Лемма 3.1. *График отображения Φ для линейно выпуклого компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ с точностью до гомеоморфизма имеет следующий*

вид:

$$\Gamma_K(\Phi) = \begin{cases} K \times S^{2n-2}/S^{2n-2}, \ \Theta \in \partial K, \ K \subset \{\operatorname{Re} z_n \geq 0\}, \\ K \times S^{2n-2}, \ \Theta \notin K. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что в достаточно малой окрестности произвольной точки, отличной от начала координат, график отображения Φ представляет собой тривиальное расслоение, т.е. гомеоморфно декартовому произведению $U(z) \times S^{2n-2}$. Пусть $z \neq \Theta$ — некоторая точка из $\mathbb{C}^n$. Тогда $\Phi(z)$ — гиперплоскость, компактифицированная точкой ∞. В силу непрерывности многозначного отображения Φ, найдется такая окрестность $B(z)$ точки z, что для всех $z' \in B(z)$ ортогональная проекция $t_{z'}$ $\Phi(z')$ на $\Phi(z)$ есть гомеоморфизм.

Если теперь зададим взаимно однозначное соответствие между произведением $B(z) \times \Phi(z)$ и множеством $\Gamma_{B(z)}(\Phi)$ по закону $(z', y) \to (f(z'), t_{z'}^{-1}(y))$ (определение f см. § 1 (1.6)), то видим, что график отображения Φ будет локально тривиальным расслоением над $\mathbb{C}^n \backslash \{\Theta\}$, т.е. локально представим как декартово произведение. В силу линейной выпуклости, компакт K лежит в $\mathbb{C}^n \backslash \lambda$, где λ — некоторый луч из точки Θ (при условии, что $\Theta \notin K$). Легко убедиться, что пространство $\mathbb{C}^n \backslash \lambda$ стягиваемо. Тогда из [236] или теоремы 31.2 следует, что график $\Gamma_{\mathbb{C}^n \backslash \lambda}(\Phi)$ гомеоморфен произведению $(\mathbb{C}^n \backslash \lambda) \times S^{2n-2}$, где сферы S^{2n-2} можно выбрать фиксированного радиуса. Так как $K \subset \mathbb{C}^n \backslash \lambda$, то $\Gamma_k(\Phi) \approx K \times S^{2n-2}$ как ограничение графика на подмножество. Если же K лежит в полупространстве $\operatorname{Re} z_n \geq 0$, то для графика отображения Φ над полупространством $\operatorname{Re} z_n \geq 0$ с выколотым началом координат справедливо, аналогично предыдущему, гомеоморфное соответствие

$$\Gamma_{[(\operatorname{Re} z_n \geq 0) \backslash \{\Theta\}]}(\Phi) \approx [(\operatorname{Re} z_n \geq 0) \backslash \{\Theta\}] \times S^{2n-2},$$

где сферы S^{2n-2} имеют фиксированный радиус r. Рассмотрим естественное гомеоморфное соответствие пространств

$$[(\operatorname{Re} z_n \geq 0) \backslash \{\Theta\}] \times S^{2n-2} \approx \bigcup_{z \in [(\operatorname{Re} z_n \geq 0) \backslash \{\Theta\}]} (z, S_z^{2n-2}),$$

где радиус сферы S_z^{2n-2} равен $r|z|$, а правое пространство наделено топологией, индуцированной декартовым произведением $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2n-1}$,

где $\mathbb{R}^{2n-1}$ – $(2n-1)$-вещественное евклидово пространство, содержащее сферы S_r^{2n-2}. Это соответствие теперь легко продолжить до гомеоморфизма пространств $\Gamma_{(\operatorname{Re} z_n \geq 0)}(\Phi)$ и $\bigcup\limits_{z\in(\operatorname{Re} z_n\geq 0)}(z, S_z^{2n-2})$, где S_Θ^{2n-2} — $*$-точка. Утверждение леммы получаем ограничением Φ на нужный нам компакт.

Заметим, что лемму 3.1 будем применять для изучения сопряженного множества K^*, а согласно предложению 2.10 оно не изменится, если проведем сдвиг компакта K при $\Theta \in K$ так, чтобы он лежал в полупространстве $\operatorname{Re} z_n \geq 0$ и $\Theta \in \partial K$.

Отметим также, что линейная выпуклость K использовалась лишь для существования луча λ, не пересекающего K. Если такой луч существует, то лемма справедлива без дополнительных ограничений на K.

Исходя из того, что образы всех точек $z \in K$ при многозначном отображении Φ содержат точку (∞), можем рассмотреть цепочку непрерывных однозначных отображений

$$\Gamma(f) \xrightarrow{\aleph} \Gamma(\Phi) \to \Gamma \to \Phi(K),$$

где $\Gamma(f)$ — график сечения f (см. § 1); $\aleph : \Gamma(f) \to \Gamma(\Phi)$ — естественное вложение графиков; $\Gamma = \Gamma(\Phi)/[K \times (\infty)]$ — фактор-пространство; $q : \Gamma(\Phi) \to \Phi(K)$ — проекция графика на образ; диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\Phi) & \xrightarrow{q} & \Phi(K) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \nearrow_{\beta} & \\ \Gamma & & \end{array}$$

коммутативна. Из-за того, что $\Gamma(f)$ гомеоморфно K как график однозначного отображения и $f(z) = \infty$ лишь при $z = 0$, вложение $\tau = \alpha\aleph : \Gamma(f) \to \Gamma$ индуцирует тривиальное отображение групп когомологий

$$\tau_j^* : \ H^j(\Gamma) \to H^j(\Gamma(f)) \quad \forall\, j.$$

Поэтому из коммутативности диаграммы для отображений

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(f) & \xrightarrow{q} & f(K) \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \Gamma & \xrightarrow{\beta} & \Phi(K) \end{array}$$

следует коммутативность диаграммы для групп когомологий

$$\begin{array}{ccc} H^j(\Gamma(f)) & \xleftarrow[\approx]{q_j^*} & H^j(f(K)) \\ \tau_j^* \uparrow & & \uparrow \psi_j^* \\ H^j(\Gamma) & \xleftarrow{\beta_j^*} & H^j(\Phi(K)), \end{array}$$

где q_j^* — изоморфизмы из-за гомеоморфности f. Отсюда и из тривиальности гомоморфизмов τ_j^* следует, что $\psi_j^* = 0$ для всех j. Следовательно, мы получили, что при многозначном отображении Φ все ненулевые коциклы на $f(K)$ заклеиваются в $\Phi(K)$ и имеют место короткие точные последовательности групп когомологий

$$0 \to H^{j-1}(f(K)) \to H^j(\Phi(K), f(K)) \to H^j(\Phi(K)) \to 0 \quad \forall\, j,$$

в частности, $H^{2n-1}(f(K)) \approx H^{2n}(\Phi(K), f(K))$.

Отсюда очевидны следующие утверждения.

Предложение 3.1. *$\Phi(K)$ включает в себя все компоненты множества $\mathbb{C}^n \backslash f(K)$, кроме компоненты, содержащей начало координат.*

Таким образом, K^* содержится в связной компоненте множества $\mathbb{C}^n \backslash f(K)$, в которую входит начало координат.

Предложение 3.2. *Если $\Phi(K) = f(K)$, то $H^j(K) = H^j(\Phi(K)) = 0$.*

Замечание 3.1. Класс компактов со свойством $\Phi(K) = f(K)$ не пуст; он содержит, как видно из предложения 2.3, по крайней мере, все шары с центром Θ.

Используя то, что образ каждой точки $z \in K, z \neq \Theta$, при отображении Φ гомеоморфен сфере S^{2n-2}, получаем коммутативные диаграммы для отображений и групп когомологий

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-2} \approx \Phi(z) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(\Phi) \\ & \searrow^{\beta} & \downarrow g \\ & & \Phi(K) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^j(S^{2n-2}) & \xleftarrow{\alpha_j^*} & H^j(\Gamma(\Phi)) \\ & \nwarrow_{\beta_j^*} & \uparrow g_j^* \\ & & H^j(\Phi(K)) \end{array}$$

где α и β — естественные вложения.

В последней диаграмме согласно лемме 3.1 $\alpha_j^* = 0$ для связных компактов, лежащих в верхнем полупространстве и содержащих начало координат. Поэтому для них $\beta_j^* = 0$ и имеет место точная последовательность

$$0 \to H^{2n-2}(S^{2n-2}) \to H^{2n-1}(\Phi(K), S^{2n-2}) \to H^{2n-1}(\Phi(K)) \to 0,$$

и изоморфизм

$$H^{2n-2}(\Phi(K), S^{2n-2}) \approx H^{2n-2}(\Phi(K)).$$

Отсюда следует такое предложение.

Предложение 3.3. *$\Phi(K) \neq S^{2n-2}$ ни для какого связного компакта, лежащего в верхней полуплоскости и содержащего начало координат.*

Предложение 3.4. *Для линейно выпуклого компакта $K \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, $H^{2n-1}(K) = 0$.*

Доказательство. Если это не так, то K разбивает $\mathbb{C}^n$ [202] и есть ограниченная компонента A множества $\mathbb{C}^n \backslash K$. Все гиперплоскости, проходящие через произвольную точку $z \in A$, непременно пересекают K, что противоречит его линейной выпуклости.

Лемма 3.2. *Для линейно выпуклого компакта K справедлив изоморфизм*

$$H^{j+2n-2}(\Gamma_K(\Phi)) \approx H^j(K) \quad \textit{при } j > 0,$$

если K лежит в полупространстве $\operatorname{Re} z_n \geq 0$.

Доказательство очевидно, если воспользоваться представлением графика из леммы 3.1 и формулой Кюннета.

В дальнейшем, не нарушая общности, так как нас интересуют топологические свойства K^*, в силу предложения 2.10 считаем, что компакт K лежит в полупространстве $\operatorname{Re} z_n \geq 0$.

Если теперь исследовать проекцию графика на образ $q : \Gamma_K(\Phi) \to \Phi(K)$, то устанавливаются утверждения, которые описывают некоторые связи между $\Phi(K)$ и K.

Определение 3.1. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется собственным, если прообраз произвольного компакта — компакт.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное собственное отображение локально компактных пространств. Обозначим $d_k(f)$ — относительную размерность [10] множества точек $B_k = \{y \in Y | \check{H}^k(f^{-1}y) \neq 0\}$; если

$B_k = \varnothing$, то положим $d_k = -\infty$. Известно [200] следующее утверждение.

Теорема 3.1 (Вьеториса–Бегла–Скляренко). *Если для произвольного $k \geq 0$ выполнено неравенство*

$$d_k(f) \leq r - 1 - k,$$

то отображение f индуцирует изоморфизм групп когомологий

$$f^* : \ H^j(f(X)) \to H^j(X) \quad \textit{при } j > r$$

и эпиморфизм при $j = r$.

Прообраз каждой точки $w \in \Phi(K)$ при проекции q гомеоморфен $\Phi^{-1}(w)$. Следовательно, можно аналогично ввести $d_k(\Phi)$, положив $d_k(\Phi) = d_k(q)$. Заметим, что прообразом точки $w \in \Phi(K)$, $w \neq \infty$, при отображении Φ будет пересечение K с гиперплоскостью $\{z \,|\, \langle w, z\rangle = 1\}$, прообразом точки $w = \infty$ будет весь компакт K.

Теорема 3.2. *Если K — линейно выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$ и $d_k \leq 2n - 2 - k$ для произвольного $k \geq 0$, то $(p^*)^{-1}q^* : H^{2n-1}(\Phi(K)) \to H^1(K)$ — эпиморфизм и $H^j(K) = 0$ при $j > 1$, где $p : \Gamma_K(\Phi) \to K$ — проекция графика на прообраз. Если же $d_k(\Phi) \leq 2n - 3 - k$ для произвольного $k \geq 0$, то $H^{2n-1}(\Phi(K)) \approx H^1(K)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 3.1 при выполнении неравенства $d_k(\Phi) \leq 2n - 2 - k$ проекция q индуцирует изоморфизм групп $H^j(\Phi(K))$ и $H^j(\Gamma_k(\Phi))$ при $j > 2n - 1$, а также эпиморфизм $H^{2n-1}(\Phi(K)) \to H^{2n-1}(\Gamma_K(\Phi))$. Используя лемму 3.2, получим цепочку

$$H^{j+2n-2}(\Phi(K)) \overset{q^*}{\to} H^{j+2n-2}(\Gamma_K(\Phi)) \overset{(p^*)^{-1}}{\to} H^j(K) \quad \text{при } j > 0,$$

где q^* — изоморфизм при $j > 1$ и эпиморфизм при $j = 1$. Но $H^{j+2n+2}(\Phi(K)) = 0$ при $j > 1$, так как $\Phi(K)$ — компактное подмножество $\mathbb{C}^n$. Это и завершает доказательство первой части теоремы. Вторая часть доказывается аналогично.

Следствие 3.1. Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклый компакт и $d_k(\Phi) \leq 2n - 3 - k$ для произвольного $k \geq 0$ и группа $H^1(K)$ конечно порождена, то количество компонент множества K^* на единицу больше ранга группы $H^1(K)$.

Согласно теореме двойственности Александера и нашей теореме 3.2, имеют место изоморфизмы $\widetilde{H}_0(K)^* \approx H^{2n-1}(\Phi(K)) \approx H^1(K)$,

где ранг группы $\tilde{H}_0(K^*)$ на единицу меньше количества компонент множества K^*.

Следствие 3.2. Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклый компакт и $d_k(\Phi) \leq 2n-2-k$ для произвольного $k \geq 0$, то из $H^1(K) \neq 0$ следует $H^{2n-1}(\Phi(K)) \neq 0$, т. е. K^* несвязно.

Следует из цепочки гомоморфизмов

$$\widetilde{H}_0(K^*) \approx H^{2n-1}(\Phi(K)) \overset{(p^*)^{-1}q^*}{\longrightarrow} H^1(K),$$

так как, согласно теореме 3.2, $(p^*)^{-1}q^*$ — эпиморфизм.

Определение 3.2. Скажем, что множество E ациклично, если $\widetilde{H}^j(E) = 0$ для всех $j \geq 0$.

Следствие 3.3. Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклый компакт и пересечения K с гиперплоскостями ацикличны, за исключением пересечений с конечным их числом, то

$$H^1(K) \approx H^{2n-1}(\Phi(K)) \quad \text{и} \quad H^j(K) = 0 \quad \text{при } j > 1.$$

Доказательство. Очевидно, что при выполнении условий следствия $d_k(\Phi) = 0$ или -∞ при $0 \leq k \leq 2n-3$ и $d_k(\Phi) = -\infty$ при $k > 2n-3$, так как прообразом точки $w \in \Phi(K)$, $w \neq \infty$, будет пересечение гиперплоскости $\{z|\langle w, z\rangle = 1\}$ с компактом (т.е. компактное подмножество $(2n-2)$-мерной вещественной плоскости). Если же $w = \infty$, то $\Phi^{-1}(\infty) = K$ и, как показано в предложении 3.4, $H^{2n-1}(K) = 0$, а если $H^{2n-2}(K) \neq 0$, то из теоремы 3.1 следует, что из семейства параллельных гиперплоскостей бесконечное число гиперплоскостей пересекает K по неацикличным множествам, что противоречит условию следствия. Следовательно, выполнено неравенство $d_k(\Phi) \leq 2n-3-k$ для всех $k \geq 0$ и можно применить теорему 3.2.

Пусть компакт K лежит в некоторой прямой. Тогда, используя теорему 3.2, получим следующее утверждение.

Предложение 3.6. *Если компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ лежит в некоторой прямой, то $H^1(K) \approx H^{2n-1}(\Phi(K))$.*

Доказательство. Легко убедиться (см. § 2), что множество гиперплоскостей, содержащих эту прямую, гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{C}P^{n-2}$. Остальные гиперплоскости или не пересекаются с этой прямой, или пересекают ее по одной точке. Отсюда получаем оценки $d_0(\Phi), d_1(\Phi) \geq \dim \mathbb{C}P^{n-2} = 2n-4$, а для

остальных $k > 1$ $d_k(\Phi) = -\infty$. Следовательно, выполнено неравенство $d_k(\Phi) \leq 2n - 3 - k$ для произвольного $k \geq 0$ и, согласно теореме 3.2, $H^1(K) \approx H^{2n-1}(\Phi(K))$.

Более тонкие рассуждения показывают, что и для компактов, лежащих в вещественно двумерной плоскости, имеет место аналогичный результат.

Предложение 3.7. *Если компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ лежит в вещественно двумерной плоскости T, то отображение*

$$(p^*)^{-1}q^* : \ H^{2n-1}(\Phi(K)) \to H^1(K)$$

— изоморфизм.

Доказательство. Предполагаем, что плоскость не совпадает с комплексной прямой, случай которой разобран выше. В пересечении K с некоторой гиперплоскостью L $H^1(L \cap K) \neq 0$ лишь тогда, когда $L \supset T$; неравенство $H^0(L \cap K) \neq 0$ возможно тогда, когда или $L \supset T$, или $L \cap T = l$, где l — вещественная прямая. Существует единственная 2-плоскость λ, содержащая T. Множество гиперплоскостей, которые содержат 2-плоскость λ, гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{C}P^{n-3}$ (см. § 2). Следовательно, $d_1(\Phi) \leq \dim \mathbb{C}P^{n-3} = 2n - 6$.

Множество гиперплоскостей, содержащих фиксированную вещественную прямую, а следовательно, и прямую, ее содержащую, гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{C}P^{n-2}$. В свою очередь, множество вещественных прямых на плоскости T представляет собой грассманово многообразие $RG'(2,1)$ [193]. Легко убедиться, что это двумерное многообразие, т.е. $\dim RG'(2,1) = 2$. Следовательно,

$$d_0(\Phi) \leq \max\left(\dim \mathbb{C}P^{n-3}; \dim \mathbb{C}P^{n-2} + \dim RG'(2,1)\right) = 2n - 2.$$

Кроме того, $d_k(\Phi) = -\infty$ при $k > 1$. Отсюда $d_k(\Phi) \leq 2n - k$ для произвольного $k \geq 0$. Теперь из теоремы 3.2 следует, что $(p^*)^{-1}q^*$ — эпиморфизм.

Покажем мономорфность $(p^*)^{-1}q^*$. Если это отображение не мономорфно, то существует два разных элемента α, β группы $H_0(K^*) \approx H^{2n-1}(\Phi(K))$, переходящих при отображении $(p^*)^{-1}q^*$ в один элемент. Элементам α, β соответствуют гиперплоскости в $\mathbb{C}^n \backslash K$, а элементу $(p^*)^{-1}q^*(\alpha) = (p^*)^{-1}q^*(\beta)$ — точка в $T \backslash K$, так как $H^1(K) \approx \widetilde{H}_0(T \backslash K)$. Поэтому возьмем две такие гиперплоскости L_1 и L_2, проходящие через фиксированную точку $a \in T \backslash K$ и не пересекающие T

по другим точкам. Они пересекаются по $(n-2)$-плоскости Λ. На L_1 и L_2 выберем пару точек $a \in L_1$, $b \in L_2$, которые можно соединить отрезком, не пересекающим T. Легко убедиться, что это можно сделать. Тогда точкам отрезка $[a,b]$ соответствует семейство гиперплоскостей, проходящих через эти точки, содержащих и задающих изотопию гиперплоскости L_1 в гиперплоскость L_2, которая не задевает K. Это противоречит выбору α и β как разных элементов группы $\widetilde{H}_0(K^*)$.

Лемма 3.3. *Пусть компакт K состоит из конечного объединения отрезков и изолированных точек (т.е. K — полиэдральный компакт* [225] *и $\dim K = 1$). Тогда K — линейно выпуклый компакт.*

Доказательство. Пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}^n \backslash K$. Покажем, что через точку z_0 можно провести гиперплоскость L, такую, что $K \cap L = \varnothing$.

Пусть $[a,b]$ — один из отрезков, входящих в K, и $z \in [a,b]$. Множество гиперплоскостей, содержащих точки z_0 и z, представляет собой проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-2}(z)$, $\dim \mathbb{C}P^{n-2}(z) = 2n-4$. Следовательно, множество гиперплоскостей, проходящих через точку z_0 и пересекающих отрезок $[a,b]$, есть $\bigcup\limits_{z\in[a,b]} \mathbb{C}P^{n-2}(z)$, оно замкнуто и имеет размерность не больше $2n-3$. Множество всех гиперплоскостей, проходящих через точку z_0 и не пересекающих K, получается конечным объединением множеств вида $\bigcup\limits_{z\in[a,b]} \mathbb{C}P^{n-2}(z)$ по отрезкам, входящим в K, и имеет, согласно [11], размерность не больше $2n-3$ (точки из K считаем отрезками с $a=b$). Но так как множество всех гиперплоскостей, проходящих через точку z, есть проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ размерности $2n-2$, то множество тех гиперплоскостей среди них, которые не пересекают z, всюду плотно в $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Замечание 3.1. Легко сообразить, что одномерная не полиэдральная кривая в $\mathbb{C}^n$ может не быть линейно выпуклой. Достаточно взять негладкую кривую, которая проектируется на всю область, лежащую в вещественной гиперплоскости $L \subset \mathbb{C}^n$. Теперь нетрудно подобрать преобразование пространства $\mathbb{C}^n$, такое, чтобы полученная после преобразования кривая центральным проектированием покрывала всю единичную сферу, а сама лежала за пределами единичного шара. Эта кривая не может быть линейно выпуклой, поскольку через начало координат нельзя провести не только гиперплоскость, но и прямую так, чтобы она не пересекла кривой.

Замечание 3.2. Пусть в множестве K^* произвольные две точки w_1, w_2, отличные от начала координат, можно соединить путем, не проходящим через начало координат, т.е. существует гомеоморфизм f отрезка [0,1] в K^*, такой, что $f(0) = w_1$, $f(1) = w_2$. Каждой точке $w(t)$ пути соответствует гиперплоскость $\{z \,|\, \langle w(t), z\rangle = 1\}$. Это обозначает, что произвольные две гиперплоскости, соответствующие разным точкам $w_1, w_2 \in K^*$, можно соединить изотопией $F(t, z)$ (т.е. гомеоморфизмом $F(t, z) : [0, 1] \times \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^n$), которая при каждом t будет задавать гиперплоскость $\{z \,|\, \langle w(t), z\rangle = 1\}$ и такой, что $F(t, z) \cap K \neq \varnothing$ при каждом t. Это условие выполнено по крайней мере тогда, когда K^* — открытое связное множество.

Замечание 3.3. Несвязность сопряженного множества обозначает, что плоскости вида $\{z \,|\, \langle w, z\rangle = 1\}$, соответствующие точкам w_1, w_2, принадлежащим разным компонентам K^*, нельзя изотопно перевести друг в друга так, чтобы в каждый момент t изотопия $F(t, z)$ задавала плоскость $\{z \,|\, \langle w(t), z\rangle = 1\}$ и $F(t, z) \cap K = \varnothing$ при каждом t.

Если K — компакт и одна из точек (пусть w_2) принадлежит компоненте K^*, содержащей точку Θ, то, выбирая другую точку из этой же компоненты (согласно предыдущему замечанию всем таким точкам соответствуют гиперплоскости, изотопно переходящие друг в друга в $\mathbb{C}^n \backslash K$), легко добиться, чтобы гиперплоскости $\{z \,|\, \langle w_1, z\rangle = 1\}$ и $\{z | \langle w_2, z\rangle = 1\}$ пересекались, т.е. их можно считать выходящими из одной точки. Для этого достаточно перебрать точки w, лежащие на сфере S^{2n-1} с центром в точке Θ и весьма малого радиуса, чтобы $S^{2n-1} \subset K^*$.

Предложение 3.8. *Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — связный полиэдральный компакт,* $\dim K = 1$ *и K связно, то K — ациклический компакт.*

Доказательство. Будем доказывать применением индукции по размерности n. Если $n = 1$, то утверждение очевидно, так как K гомеоморфно дополнению к K. Предположим, что предложение справедливо при $n = m - 1$ и докажем его для $n = m$.

Пусть найдется сечение K гиперплоскостью L, такое, что $H^1(K \cap L) \neq 0$. Выберем связную компоненту $K' \subset K \cap L$, для которой $H^1(K') \neq 0$. Заметим, что K' — также одномерный связный полиэдр. Отсюда по предположению индукции множество $(K')^*$ несвязно, иначе можно применить наше утверждение, поскольку $L \approx \mathbb{C}^{m-1}$ (здесь сопряженность рассматривается относительно комплексно $(m-1)$-мерного пространства L). Выберем точку $z_0 \in L \cap (\mathbb{C}^m \backslash K)$. Заметим, что $z_0 \in \mathbb{C}^m \backslash K$, поэтому в $\mathbb{C}^m$, согласно лемме 3.3, найдет-

ся гиперплоскость M, проходящая через z_0 и не пересекающая K. Тогда $M \cap L$ — гиперплоскость в L, не пересекающая K'. Следовательно, $L \cap M$ задается некоторой точкой $w_0 \in (K')^*$. Пусть точки w_0 и w_1 принадлежат разным компонентам $(K')^*$ и пусть γ в M такая, что $\gamma \cap L = z_0$. Спроектируем K на L параллельно прямой γ. Пусть K_1 — образ проекции компакта K в L. Тогда K_1 — одномерный связный полиэдр. Согласно лемме 3.3, он линейно выпуклый. Кроме того, $K_1 \supset K'$, $z_0 \notin K_1$ и $(M \cap L) \cap K_1 = \varnothing$. Очевидно, что $H^1(K_1) \neq 0$ и K_1^* — несвязно. Согласно предложению 2.2, $K_1^* \subset (K')^*$, а из леммы 3.3 следует, что K_1^* — открытое всюду плотное множество в $(K')^*$.

Пусть точка $w_1' \in K_1^*$ принадлежит той же компоненте множества $(K')^*$ что и точка w_1. Тогда, согласно замечанию 3.3, гиперплоскость $L \cap M$ нельзя в L перевести изотопно в гиперплоскость L', соответствующую точке w_1', не пересекая компакта K_1. Рассмотрим теперь в $\mathbb{C}^m$ гиперплоскости M и $L' \times \gamma$. Очевидно, что они не пересекают K и, следовательно, им соответствуют в K^* две точки w_1 и w_2 соответственно. Поскольку множество K^* связно, то точки w_1 и w_2 можно соединить в открытом множестве K^* путем $w(t)$. Кроме того, множество P точек в $\mathbb{C}^m$, соответствующих гиперплоскостям, параллельным гиперплоскости L, гомеоморфно комплексной прямой (предложение 2.6), т.е. имеет размерность 2. Следовательно, путь $w(t)$, $w(0) = w^1$, $w(1) = w^2$ можно выбрать таким образом, что он не пересекает множество P. Тогда среди гиперплоскостей $\{z \,|\, \langle w(t), z\rangle = 1\}$ нет гиперплоскостей, параллельных L. Следовательно, каждая из этих гиперплоскостей пересекает L по $(m-2)$-плоскости. Эти пересечения задают изотопию гиперплоскости $L \cap M$ в гиперплоскость L', которая не задевает компакта K', что противоречит тому, что точки w_0, w_1' принадлежат разным компонентам множества $(K')^*$.

Полученное противоречие показывает, что для сечения K произвольной гиперплоскостью L $H^1(K \cap L) = 0$, т.е. сечения односвязны. Вспомним, однако, что $\Phi^{-1}(\infty) = K$. Поэтому не исключено, что $H^1(\Phi^{-1}(\infty)) \neq 0$. Следовательно, $d_1(\Phi) \leq 0$ и $d_k(\Phi) = -\infty$ при $k > 1$.

Заметим, что множество вещественных прямых, пересекающих компакт K не меньше, чем в двух точках, имеет, в силу полиэдральности K, размерность не больше двух в множестве $RG'(2n, 1)$ всех вещественных прямых пространства $\mathbb{C}^n$. Через каждую фиксированную прямую можно провести множество гиперплоскостей, которое

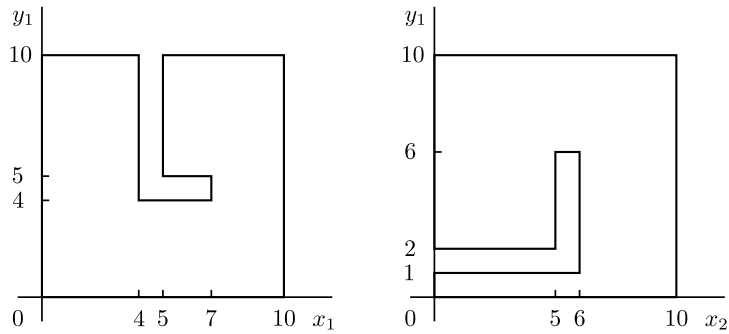


Рис. 1.

гомеоморфно $\mathbb{C}P^{n-2}$. Отсюда следует, что размерность множества гиперплоскостей, которые пересекают K не менее, чем по двум точкам, не больше $2n-2$. Следовательно, $d_0(\Phi) \leq 2n-2$. Отсюда, по теореме 3.2,

$$H^{2n-1}(\Phi(K)) \to H^{2n-1}(\Gamma_K(\Phi)) \approx H^1(K)$$

есть эпиморфизм, где $H^{2n-1}(\Phi(K)) \approx \widetilde{H}_0(K^*) = 0$. Таким образом, $H^1(K) = 0$.

Предложение доказано.

Замечание 3.4. Легко видеть из доказательства, что лемма 3.3 и предложение 3.8 справедливы и тогда, когда компакт K представляет собой счетное объединение одномерных полиэдров.

П р и м е р 3.1. Построим пример связного линейно выпуклого полиэдрального компакта $K \subset \mathbb{C}^2$, для которого K^* связно, но $H^1(K) \neq 0$. Этот компакт будет лежать в вещественной трехмерной гиперплоскости

$$L = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im}(z_1 - z_2) = 0\}.$$

Зададим в L систему координат x_1, x_2, $y_1 = y_2$. Вещественные прямые, лежащие в трехмерном евклидовом пространстве L и параллельные одной из осей $0x_1$, $0x_2$, являются следами в L гиперплоскостей $z_1 = \text{const}$, $z_2 = \text{const}$. Возьмем в L куб (рис. 1)

$$A = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 0 \leq x_1 \leq 10,\ 0 \leq x_2 \leq 10,\ 0 \leq y_1 \leq 10\}$$

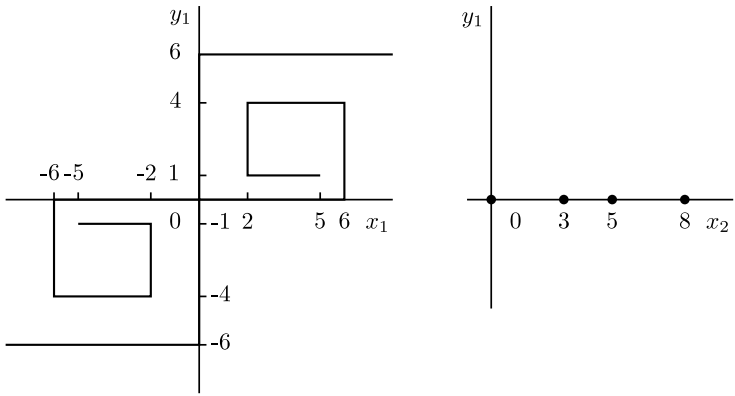


Рис. 2.

и удалим из него следующие параллелепипеды:

$$B_1 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 4 \le x_1 \le 5,\ 0 \le x_2 \le 10,\ 4 \le y_1 \le 10\},$$
$$B_2 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 5 \le x_1 \le 7,\ 0 \le x_2 \le 10,\ 4 \le y_1 \le 5\},$$
$$B_3 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 0 \le x_1 \le 10,\ 0 \le x_2 \le 6,\ 1 \le y_1 \le 2\},$$
$$B_4 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 0 \le x_1 \le 10,\ 5 \le x_2 \le 6,\ 2 \le y_1 \le 6\}.$$

Полученный компакт K обладает тем свойством, что произвольная гиперплоскость $\{z \,|\, \langle w, z\rangle = 1\} \subset \mathbb{C}^2 \backslash K$ изотопно переводится в гиперплоскость вида $z_1 = \text{const}$ или $z_2 = \text{const}$, причем изотопия не задевает компакта K. Следовательно, множество K^* связно. Но легко видеть, что компакт K имеет гомотопический тип окружности. Следовательно, $H^1(K) \approx \mathbb{Z}$.

Если теперь взять ε-окрестность K, где $\varepsilon < 1/4$, то получим линейно выпуклую область с аналогичными свойствами.

П р и м е р 3.2. Покажем, что одномерный полиэдральный компакт вида $K = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{C}^2$, где K_1 и K_2 — плоские компакты со свойством $H^1(K_1) \approx H^1(K_2) \approx 0$, может иметь множество K^* несвязным.

Зададим компакты K_1 и K_2. Пусть $K_1 = A_1 \cup A_2$, где множество A_1 состоит из объединения отрезков в плоскости (рис. 2)

$$A_1 = \{(x_1, y_1) \,|\, (0 \le x_1 \le 36,\ y_1 = 6) \cup (2 \le x_1 \le 6,\ y_1 = 4) \cup$$
$$\cup (2 \le x_1 \le 5,\ y_1 = 1) \cup (0 \le x_1 \le 6,\ y_1 = 0) \cup$$

$$\cup(x_1 = 0,\ 0 \le y_1 \le 6) \cup (x_1 = 2,\ 1 \le y_1 \le 4) \cup (x_1 = 6,\ 0 \le y_1 \le 4)\},$$

а множество A_2 центрально симметрично A_1. Компакт K_2 состоит из четырех точек в плоскости $z_1 = 0$ ($x_1 = 0; 3; 5; 8, y_2 = 0$). Полученный компакт будет одномерным полиэдром, следовательно, из леммы 3.3 вытекает, что он линейно выпуклый. Легко убедиться, что прямая

$$\gamma = \{z \,|\, 4z_1 = (z_2 - 4)(3 + 2i)\}$$

изотопно не переводится в прямую вида $z_2 = \text{const}$ так, чтобы каждый шаг изотопии был прямой и изотопия не задевала компакт K. Для этого достаточно увидеть, что в вещественной трехмерной гиперплоскости $y_2 = 0$ вещественная прямая

$$\begin{cases} 2x_1 = 3y_1, \\ 4x_1 = 3(x_2 - 4) \end{cases}$$

(след комплексной прямой γ) не переводится изотопией без пересечения K ни в какую вещественную прямую вида $x_1 = \text{const}$, $y = \text{const}$ так, чтобы каждый шаг изотонии был вещественной прямой. Следовательно, множество K несвязно.

П р и м е р 3.3. Как и в примере 3.1, рассмотрим компакт K, лежащий в вещественной гиперплоскости (3.1), где

$$A_1 = \{(x_1, y_1, x_2) \,|\, x_1 = 1,\ -5 \le y_1 \le 0,\ x_2 = 0\},$$
$$A_2 = \{(x_1, y_1, x_2) \,|\, x_1 = \cos x_2,\ y_1 = \sin x_2,\ 0 \le x_2 \le 4\pi\}$$

— кусок винтовой линии,

$$A_3 = \{(x_1, y_1, x_2) \,|\, x_1 = -1,\ 0 \le y_1 \le 5,\ x_2 = 4\pi\}.$$

Линейная выпуклость K очевидна. Теперь, как и в примере 3.2, нет изотопии вещественной прямой $l = \{(x_1, y_1, x_2) |\ x_1 = 0, y_1 = 0\}$ в прямую $l_1 = \{(x_1, y_1, x_2) |\ x_1 = 2, y_1 = 0\}$, не пересекающей K. Поэтому K^* несвязно, хотя K — гладкая кривая, гомеоморфная отрезку.

Задача 3.1. Выяснить, существуют ли компакты $K \subset \mathbb{C}^n$, удовлетворяющие равенству $\Phi(K) = f(K)$ (см. замечание 3.1) и отличные от шаров при $n > 1$.

§ 4. Свойства сечений и проекций линейно выпуклых множеств

В настоящем параграфе внимание сосредоточено на более тонких свойствах сечений и проекций, чем те, которые получены в § 2. Большинство результатов, полученных здесь, требуют привлечения аппарата теории гомологии.

Теорема 4.1. *Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклый компакт и множество K^* связно, то сечение K произвольной вещественно двумерной плоскостью односвязно.*

Доказательство. Как установлено в предложении 2.4, K^* — открытое множество, поэтому согласно замечанию 3.3 для произвольных гиперплоскостей $L^1 = \{z \,|\, \langle w^1, z\rangle = 1\}$, $L^2 = \{z \,|\, \langle w^2, z\rangle = 1\} \subset \mathbb{C}^n \backslash K$ существует изотопия, переводящая L^1 в L^2 и не задевающая компакта K. Пусть найдется вещественно двумерная плоскость T, такая, что $H^1(K \cap T) \neq 0$. Пусть A — ограниченная компонента множества $T \backslash K \cap T$ и точка $z' \in A$. В силу линейной выпуклости K, через точку z' можно провести гиперплоскость L^1, такую, что $L^1 \cap K = \varnothing$. Очевидно, что $L^1 \cap T = z'$, иначе пересечение $L^1 \cap K$ не было бы пустым множеством. Заключим K в шар B фиксированного радиуса и через некоторую точку $z^2 \in \mathbb{C}^n \backslash B$ проведем гиперплоскость L^2, $L^2 \cap B = \varnothing$. Гиперплоскостям L^1 и L^2 соответствуют точки w^1, w^2 в K^*, их задающие. С одной стороны, как отмечено раньше, существует изотопия, переводящая L^1 в L^2. С другой стороны, $\Phi(w^1) = L^1 \cup (\infty)$ и $\Phi(w^2) = L^2 \cup (\infty)$ представляют собой вещественно $(2n-2)$-мерные циклы в $\overset{o}{\mathbb{C}}{}^n$, из которых $\Phi(w^1)$ зацеплен с компактом K, а $\Phi(w^2)$ не зацеплен с ним, поэтому не существует гомотопии, переводящей $\Phi(w^1)$ в $\Phi(w^2)$, которая не задевает компакт K. Полученное противоречие показывает односвязность сечений K произвольными вещественно двумерными плоскостями.

Доказанная теорема обобщает предложение 2.21.

Теорема 4.2. *Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — компакт и $a \in K$ — такая точка, что сечение K произвольной прямой, проходящей через точку a, ациклично. Тогда K — ацикличный компакт.*

Доказательство. Множество прямых, проходящих через точку a, гомеоморфно комплексно проективному пространству $\mathbb{C}P^{n-1}$. Получаем многозначное ацикличное отображение $F : \mathbb{C}P^{n-1} \to K$, которое каждой прямой (точке проективного простран-

ства) ставит в соответствие сечение K этой прямой. Очевидно, что $F(\mathbb{C}P^{n-1}) = K$. Согласно теореме Вьеториса–Бегла, проекция графика $p : \Gamma(F) \to \mathbb{C}P^{n-1}$ индуцирует изоморфизм групп когомологий $p^* : H^j(\mathbb{C}P^{n-1}) \to H^j(\Gamma(F))$. Проекция графика $q : \Gamma(F) \to K$ отображает подмножество $\mathbb{C}P^{n-1} \times a \subset \Gamma(F)$ в точку a и гомеоморфна на дополнении к этому множеству, так как различные прямые могут пересекаться только в точке a.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F) & \xrightarrow{\ q\ } & K \\ \alpha\bigcup & & \bigcup \\ \mathbb{C}P^{n-1} \times a & \xrightarrow{\ q_1\ } & a, \end{array}$$

где $q(\Gamma(F)\backslash(\mathbb{C}P^{n-1} \times a)) = K\backslash a$. Поэтому ей соответствует коммутативная диаграмма групп когомологий

$$\begin{array}{ccccc} H^j(\Gamma(F), \mathbb{C}P^{n-1} \times a) & \longrightarrow & H^j(\Gamma(F)) & \to & \\ \uparrow{\scriptstyle \tilde{q}^*} \approx & & \uparrow{\scriptstyle q^*} & & \\ H^j(K, a) & \longrightarrow & H^j(K) & \to & \\ \to H^j(\mathbb{C}P^{n-1} \times a) & \longrightarrow & H^{j+1}(\Gamma(F), \mathbb{C}P^{n-1} \times a) & & (4.1) \\ \uparrow{\scriptstyle q_1^*} & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{q}^*} & & \\ \to H^j(a) & \longrightarrow & H^{j+1}(K, a). & & \end{array}$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}P^{n-1} \times a & & \subset & & \Gamma(F) \\ & \searrow^{P_1} & & \swarrow_{P} & \\ & & \mathbb{C}P^{n-1} & & \end{array}$$

(где p_1 — ограничение p на подмножество), которой соответствует коммутативная диаграмма групп когомологий

$$\begin{array}{ccc} H^j(\mathbb{C}P^{n-1} \times a) & \xleftarrow{\ \alpha^*\ } & H^j(\Gamma(F)) \\ & \nwarrow^{p_1^*} & \uparrow{\scriptstyle p^*} \\ & & H^j(\mathbb{C}P^{n-1}) \end{array}$$

получим, что α^* — изоморфизм. Тогда, в силу точности когомологических последовательностей (4.1), $H^j(\Gamma(F), \mathbb{C}P^{n-1}\times a) = 0\ \forall\, j$. Относительный гомеоморфизм $q : \Gamma(F)\backslash(\mathbb{C}P^{n-1} \times a) \to K\backslash a$ индуцирует изоморфизм q^* соответственных относительных групп когомологий. Следовательно, $H^j(K, a) = 0\ \forall\, j$. Теперь из точности когомологической последовательности получаем изоморфизм $H^j(K) \approx H^j(a)$. Теорема доказана.

Следствие 4.1. Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклый компакт, множество K^* связно и найдется точка $a \in K$, такая, что сечения K прямыми, проходящими через точку a, связны.

Тогда K – ацикличный компакт.

Из теорем 4.1 и 4.2 легко следует такая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — открытая область, $a \in D^-$ такая точка, что сечение D произвольной прямой, проходящей через a, связно и односвязно. Тогда $H^j(D) = 0\ \forall\, j$.*

Доказательство. Осуществим инверсию

$$I :\ \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n \to \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n, \quad I(z) = \begin{cases} \dfrac{z-a}{|z-a|^2}, & z \neq \Theta;\ \infty, \\ \infty, & z = \Theta, \\ \Theta, & z = \infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

При этой инверсии $\overset{o}{\mathbb{C}}{}^n$ гомеоморфно переходит в себя. Прямые через точку a переходят в прямые через начало координат. Для компакта $K = \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n \backslash I(D)$ выполнены условия предыдущей теоремы относительно прямых, проходящих через начало координат. Следовательно, $\widetilde{H}^j(K) = 0\ \forall\, j \geq 0$. Согласно двойственности Александера,

$$H_j(I(D)) \approx \widetilde{H}^{2n-j-1}(K) = 0 \quad \forall\, j.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.4. *Пусть $K \subset \mathbb{C}^n, \Theta \in K$, — компакт, такой, что образ проекции K на произвольную прямую ацикличен, т.е.*

$$\widetilde{H}^j(\pi_L(K)) = 0 \quad \forall\, j.$$

Тогда множество K^* — ациклично, $\widetilde{H}_j(K^*) = 0\ \forall\, j$.

Доказательство. Согласно предложению 2.19, для произвольной прямой l, проходящей через начало координат, пересечение $l \cap K^*$ гомеоморфно $\overset{o}{\gamma}\backslash \pi_L(K)$. Следовательно, воспользовавшись

двойственностью Александера, получим изоморфизмы

$$\widetilde{H}_j(l \cap K^*) \approx \widetilde{H}_j(\overset{o}{\gamma} \backslash \pi_L(K)) \approx \widetilde{H}^{2n-j-1}(\pi_L(K)) = 0.$$

Теперь утверждение теорем следует из теоремы 4.3.

Аналогично можно получить и следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$, $\Theta \in D$, — область, такая, что образ проекции D на произвольную прямую связен и односвязен. Тогда компакт D^* ацикличен.*

Следствие 4.2. Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$, $\Theta \in D$ — линейно выпуклый компакт, такой, что образы проекций множества K^* на произвольную прямую связны и односвязны. Тогда K — ацикличный компакт.

Если ацикличность пересечений имеет место для произвольных вещественно двумерных плоскостей, проходящих через фиксированную точку, а не только для комплексных прямых, то справедливы более сильные утверждения, которые можно уже рассматривать в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.6. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $n > 2$, l — вещественная прямая, такая, что $l \cap K \neq \varnothing$ и всякая вещественная двумерная плоскость, содержащая l, пересекает K по ацикличному множеству. Тогда компакт K ацикличен и пересечение $l \cap K$ связно.*

Доказательство. Применим индукцию по размерности евклидового пространства. Пусть $n = 3$. Тогда множество вещественно двумерных плоскостей, проходящих через вещественную прямую l, гомеоморфно окружности S^1. Рассмотрим многозначное отображение $F : S^1 \to K$, ставящее в соответствие каждой двумерной плоскости T, проходящей через прямую l (точке S^1), множество по которому T пересекает K. Проекция $p : \Gamma(F) \to S^1$ индуцирует изоморфизм $p^* : H^j(S^1) \to H^j(F)$, а проекция q задает относительный гомеоморфизм $q_1 : \Gamma(F) \backslash (l \times S^1) \to K \backslash l$. На произведении $l \times S^1$ q действует как проекция $q(a, b) = a$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma = \Gamma(F) & \xrightarrow{\quad q \quad} & K \\ \bigcup & & \bigcup \\ (K \cap l) \times S^1 & \longrightarrow & K \cap l = A, \end{array}$$

где $q(\Gamma(F) \backslash ((K \cap l) \times S^1)) = K \backslash l$. Отсюда получим диаграмму для

групп когомологий

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(A) & \longrightarrow & H^1(K,A) & \xrightarrow{\alpha_1} & H^1(K) & \to & \\
\approx\downarrow & & q_1^*\downarrow\approx & & q^*\downarrow & & \\
\to H^0(A\times S^1) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, A\times S^1) & \xrightarrow{\alpha_2} & H^1(\Gamma) & \xrightarrow{f} & \\
 & & & & \wr\wr & & \\
 & & & & H^1(S^1)\approx\mathbb{Z} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \| & & & & \\
\to H_1(A) & \longrightarrow & H^2(K,A) & \longrightarrow & H^2(K) & \to & 0 \\
\downarrow & & q_1^*\downarrow\approx & & \downarrow & & \\
\to H^1(A\times S^1) & \xrightarrow{j_1} & H^2(\Gamma, A\times S^1) & \longrightarrow & H^2(\Gamma) & & \\
 & & & & \wr\wr & & \\
 & & & & H^2(S^1)=0 & &
\end{array} \tag{4.3}$$

В этой диаграмме q_1^* — изоморфизм, так как q_1 — относительный гомеоморфизм; $H^1(A)=0$, потому что A — компактное подмножество вещественной прямой; $H^0(A\times S^1)\approx H^0(A)$, $H^1(A\times S^1)\approx H^0(A)$ согласно формуле Кюннета. Из леммы о пяти гомоморфизмах q^* — мономорфизм, а из точности верхней строки α_1 — эпиморфизм. Следовательно, $\operatorname{im} q^*\alpha_1 = \operatorname{im}\alpha_2$, где $\operatorname{im}\alpha$ — образ гомоморфизма α.

Рассмотрим два случая.

Пусть множество A связно. Тогда из коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccccc}
S^1\times A & & \subset & & \Gamma \\
 & {\scriptstyle p_1}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle p} & \\
 & & S^1 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
H^1(S^1\times A) & & \xleftarrow{\ j\ } & & H^1(\Gamma) \\
 & {\scriptstyle\approx}\ \swarrow{\scriptstyle p_1^*} & & \nwarrow{\scriptstyle p^*}\ {\scriptstyle\approx} & \\
 & & H^1(S^1) & &
\end{array}$$

следует изоморфность j. Отсюда и из точности последовательности $\operatorname{im}\alpha_2 = 0$. Но так как q^* — мономорфизм, то $H^1(K)=0$. Кроме того, из мономорфности j следует цепочка изоморфизмов

$$H^2(K)\approx H^2(K,A)\approx H^2(\Gamma, A\times S^1)\approx H^2(\Gamma)=0.$$

Пусть теперь A несвязно. Тогда $H^1(A\times S^1)\approx H^0(A)$ имеет не меньше двух образующих и из точности когомологической последовательности $\operatorname{im} j_1 \neq 0$. Но тогда $H^2(K)\approx H^2(K,A)\approx \operatorname{im} j_1\neq 0$.

А если $H^2(K) \neq 0$, то K разбивает $\mathbb{R}^3$. Выберем произвольную внутреннюю точку x ограниченной компоненты множества $\mathbb{R}^3 \backslash K$, не принадлежащую прямой l. Произвольная вещественная двумерная плоскость T, проходящая через точку x, разбивается множеством $T \cap K$. Отсюда следует, что $H^1(T \cap K) \neq 0$. Выберем теперь такую плоскость T, которая проходит через точку x и прямую l. Согласно отмеченному выше, сечение $T \cap K$ неодносвязно. Полученное противоречие доказывает теорему при $n = 3$.

Предположим теперь, что теорема доказана для $n = m - 1$, и докажем ее для $n = m > 3$. Если $K \subset \mathbb{R}^m$, то согласно предположению индукции получаем, что сечения K вещественно $(m-1)$ и $(m-2)$-мерными плоскостями, содержащими прямую l, ацикличны. Фиксируем одну из $(m-2)$-мерных плоскостей, содержащих прямую l. Пусть N — такая плоскость и $\widetilde{H}^j(N \cap K) = 0 \ \forall\, j$. Обозначим $A = N \cap K$. Множество $(m-1)$-мерных вещественных плоскостей, содержащих плоскость N, гомеоморфно окружности. Как и в случае $n = 3$, получаем ацикличное отображение $F : S^1 \to K$, ставящее в соответствие $(m-1)$-мерным плоскостям сечения компакта K. В силу ацикличности множества A имеем $H^j(A \times S^1) \approx H^j(S^1)$. В коммутативной диаграмме групп когомологий

$$\begin{array}{ccc}
H^j(K, A) & \longrightarrow & H^j(K) \longrightarrow \\
{\scriptstyle q_1^*}\big\downarrow\approx & & \big\downarrow \\
H^j(\Gamma, A \times S^1) & \longrightarrow & H^j(\Gamma) \longrightarrow \\
\longrightarrow H^j(A) & \longrightarrow & H^{j+1}(K, A) \\
\big\downarrow & & {\scriptstyle q_1^*}\big\downarrow\approx \\
\longrightarrow H^j(A \times S^1) & \longrightarrow & H^{j+1}(\Gamma, A \times S^1),
\end{array}$$

возникающей аналогично диаграмме (4.3), как и в случае $n = 3$, $H^j(\Gamma) \approx H^j(A \times S^1)$. Поэтому из точности строк $H^j(\Gamma, A \times S^1) = 0$ и в следствие того, что $q_1 : \Gamma \backslash (A \times S^1) \to K \backslash A$ — относительный гомеоморфизм $H^j(K, A) \approx H^j(\Gamma, A \times S^1) = 0$. Теперь из точности верхней строки $H^j(K) \approx H^j(A) = 0 \ \forall\, j$. Теорема доказана.

Следствие 4.3. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $a \in K$ — такая точка, что всякая вещественно двумерная плоскость, содержащая a, пересекает K по ацикличному множеству. Тогда K — звездный компакт относительно точки a.

Следствие 4.4. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, такой, что всякая вещественно двумерная плоскость пересекает K по ацикличному множеству. Тогда K — выпуклый компакт.

Последнее следствие представляет собой частный случай теоремы Аумана [255]. Полностью эта теорема будет доказана в гл. II.

Следствие 4.5. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, T — вещественно j-мерная плоскость, такая, что $T \cap K \neq \varnothing$ и каждая вещественно двумерная плоскость l, для которой $l \cap T \cap K \neq \varnothing$, пересекает K по ацикличному множеству. Тогда K — ацикличный компакт, звездный относительно произвольной точки $a \in T \cap K$, и множество $T \cap K$ выпукло.

§ 5. Отображения, сохраняющие линейную выпуклость

В настоящем параграфе изучим преобразования пространств $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}P^n$, которые оставляют инвариантными линейно выпуклые множества. Попутно будут получены обобщения основных теорем аффинной (проективной) геометрии (предложение 5.1 и теорема 5.6), с которыми можно ознакомиться более подробно в [21] и которые там доказываются для биекций (взаимооднозначных отображений без требования непрерывности). Здесь они приводятся для полноты изложения. Требование непрерывности исследуемых отображений позволяет избавиться от априорной взаимной однозначности (достаточно только требования невырожденности полного прообраза), а также получить справедливость локальных теорем. Вещественная аффинность отображений пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих выпуклость, углы или растяжения, исследовалась в работах А.В. Кузьминых [144–146].

Определение 5.1. Отображение $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ называется полуаффинным, если система координат выбирается так, что

$$f(\lambda u + \mu v) = \sigma(\lambda) f(u) + \sigma(\mu) f(v),$$

где $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — автоморфизм поля $\mathbb{C}$.

Скажем, что отображение f инвариантно (строго инвариантно) на семействе $\mathfrak{B}$ подмножеств топологического пространства, если f отображает любое подмножество $A \in \mathfrak{B}$ в (на) подмножество $\mathfrak{B}$.

Теорема 5.1 (основная теорема аффинной геометрии). *Пусть* $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *— биекция, строго инвариантная на множестве прямых. Тогда* f *— полуаффинное отображение.*

Доказательство приведено в [21].

Предложение 5.1. *Пусть* $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ *— гомеоморфизм, строго инвариантный на* k*-плоскостях,* $1 \leq k \leq n-1$*. Тогда* f *— полуаффинное преобразование.*

Доказательство. Покажем сначала, что при $k > 1$ гомеоморфизм f строго инвариантен на $(k-1)$-плоскостях. Пусть T — произвольная $(k-1)$-плоскость и L_1, L_2 — две разные k-плоскости, ее содержащие. Тогда $f(L_1)$ и $f(L_2)$ — две разные k-плоскости, которые, в силу гомеоморфности f, пересекаются по комплексно $(k-1)$-мерному множеству $f(T)$. Но тогда $f(T)$ есть $(k-1)$-плоскость. Повторяя рассуждения, на $k-1$ шаге получим, что гомеоморфизм f строго инвариантен на прямых, т.е. выполнены условия теоремы 5.1.

Теорема 5.2. *Если гомеоморфное преобразование* $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ *строго инвариантно на линейно выпуклых компактах, то* f *— полуаффинное преобразование.*

Доказательство. Если f не является полуаффинным преобразованием, то, согласно предыдущему предложению, найдется гиперплоскость L, такая, что $f(L)$ не будет гиперплоскостью. Не нарушая общности, примем, что $L = \{z \,|\, z_n = 0\}$. Пусть K_m — последовательность цилиндров в некоторой окрестности L вида $K_m = Q_m \times B_m^{n-1}$, где

$$Q_m = \left\{ z_1 \Big| \frac{1}{m} \leq |z_1| \leq 1 - \frac{1}{m} \right\} \subset \mathbb{C},$$
$$B_m^{n-1} = \{z' = (z_2, \ldots, z_n) || z'| \leq m\} \subset \mathbb{C}^{n-1}.$$

Очевидно, что все K_m линейно выпуклы. Кроме того, линейно выпуклым будет множество $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \operatorname{int} K_m$. Через начало координат проходит единственная гиперплоскость L, не пересекающая A. В силу того, что f сохраняет линейную выпуклость компактов, все $f(K_m)$ – линейно выпуклые компакты. Очевидно, что $f(K_m) \subset f(K_{m+1})$, поэтому $f(K_m) \subset \operatorname{int} f(K_{m+1})$. Кроме того, $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} f(K_m) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \operatorname{int} f(K_m)$, $\operatorname{int} f(K_m) \subset \operatorname{int} f(K_{m+1})$, $(\operatorname{int} f(K_m))^* \supset (\operatorname{int} f(K_{m+1}))^*$, где $(\operatorname{int} f(K_m))^*$ — компакт. Согласно предложению 2.24 $\operatorname{int} f(K_m)$ — линейно выпуклое множество. Тогда,

согласно предложениям 2.12 и 2.13, $(\bigcup\limits_m f(K_m))^{**} = (\bigcup\limits_m \operatorname{int} f(K_m))^{**} = (\bigcap\limits_m (\operatorname{int} f(K_m))^*)^* = (\bigcup\limits_m \operatorname{int} f(K_m))^{**} = \bigcup\limits_m \operatorname{int} f(K_m) = \bigcup\limits_m f(K_m)$. Поэтому, вследствие гомеоморфности f и теоремы 2.1, $f(A) = \bigcup\limits_m f(K_m)$ есть линейно выпуклое множество и для точки $f(0)$ существует гиперплоскость $L_1 \supset f(0)$, не пересекающая $f(A)$. Множество $f(A)$ разбивает пространство $\mathbb{C}^n$, поэтому точка $f(0)$, а следовательно, и гиперплоскость L_1 должны лежать в множестве $f(L)$, гомеоморфном гиперплоскости. Но так как вещественно $(2n-2)$-мерное многообразие $f(L)$ не может содержать как собственное подмножество многообразие той же размерности, то $f(L) = L_1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Распространим предложение 5.1 на гомеоморфизмы, которые априори не будут отображениями "на".

Предложение 5.2. *Пусть $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — гомеоморфизм, инвариантный на прямых. Тогда f строго инвариантен на прямых.*

Доказательство. Заметим, что для произвольной прямой l на пересечение $l \cap f(\mathbb{C}^2)$ может отображаться, в силу гомеоморфности f, только некоторая прямая (достаточно взять пару точек $a, b \in l \cap f(\mathbb{C}^2)$ и через прообразы $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(b)$ провести прямую). Если выбрать две параллельные прямые, пересекающие область $f(\mathbb{C}^2)$, то в них могут отображаться только параллельные прямые. Теперь в силу гомеоморфности f легко видеть, что образы параллельных прямых λ, λ_1 лежат в параллельных прямых (если это не так, то достаточно через произвольную точку $z \in f(\lambda_1)$ провести прямую, параллельную прямой, содержащей $f(\lambda)$, чтобы получить противоречие).

Предположим, что образ $f(\lambda)$ некоторой прямой λ не совпадает со всей прямой l, его содержащей. Тогда в λ есть последовательность точек $\{z^m\} \to \infty$, такая, что последовательность $\{f(z^m)\}$ сходится к некоторой конечной точке w. Выберем точку $z \notin \lambda$. Рассмотрим последовательность прямых $\{\lambda_m\}$, где λ_m — прямая, содержащая пару точек z и z_m. Эта последовательность при $m \to \infty$ стремится к прямой, параллельной λ. Но образ $f(\lambda)$ лежит на прямой l_1, пересекающей, в силу непрерывности f, прямую l в точке w, т.е. заведомо не параллельной l. Полученное противоречие доказывает предложение.

Предложение 5.3. *Пусть гомеоморфизм $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, инвариантный на k-плоскостях, $2 \leq k \leq n-1$. Тогда f инвариантен на $(k-1)$-плоскостях.*

Доказательство. Выберем две разные k-плоскости, содержащие заданную $(k-1)$-плоскость λ. Их образами будут открытые подмножества в k-мерных плоскостях, которые пересекаются по комплексно $(k-1)$-мерному множеству (гомеоморфному $(k-1)$-плоскости). Следовательно, эти k-плоскости должны быть разными, иначе непустое пересечение их открытых подмножеств содержало бы открытое множество размерности k. Но разные k-плоскости, содержащие в пересечении комплексно $(k-1)$-мерное множество, очевидно пересекаются по $(k-1)$-плоскости, которая содержит $f(\lambda)$.

Теорема 5.3. *Пусть гомеоморфизм $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, инвариантен на k-плоскостях, $1 \leq k < n$. Тогда f — полуаффинное отображение.*

Очевидно, эта теорема следует из предложений 5.3, 5.2 и 5.1.

Предложение 5.4. *Непрерывное отображение $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, инвариантное на прямых и такое, что $f(\mathbb{C}^2)$ не содержится ни в какой прямой, будет гомеоморфизмом.*

Доказательство. Очевидно, что пересечение $f(\mathbb{C}^2)$ с произвольной прямой будет связным множеством. Ведь, если точки $a, b \subset f(\mathbb{C}^2)$, а точки $\alpha \in f^{-1}(a)$, $\beta \in f^{-1}(b)$, то образ прямой, проходящей через точки α, β, содержит пару точек $a \cup b$.

Пусть $l \subset \mathbb{C}^2$ — некоторая прямая. Рассмотрим $f(l)$ – подмножество прямой λ и прямую λ_1, параллельную λ и такую, что $\lambda_1 \cap f(\mathbb{C}^2)$ содержит более одной точки (такая прямая существует согласно условию и связности пересечений $f(\mathbb{C}^2)$ с прямыми). Прообраз множества $\lambda_1 \cap f(\mathbb{C}^2)$ содержит по крайней мере одну прямую l_1. Очевидно, что $l \cap l_1 = \varnothing$. Следовательно, l_1 параллельна l.

Перед тем как продолжить доказательство утверждения, докажем ряд лемм, справедливых при условиях нашего предложения. В частности, выше доказана следующая лемма.

Лемма 5.1. *В пару параллельных прямых λ_1, λ_2, каждая из которых содержит в пересечении $\lambda_1 \cap f(\mathbb{C}^2)$, $\lambda_2 \cap f(\mathbb{C}^2)$ более одной точки, могут переходить только параллельные прямые.*

Лемма 5.2. *Ни одна прямая не переходит в точку.*

Доказательство. Если $f(l) = a$, где l — прямая, а a — точка, то рассмотрим еще три точки b, c, d, такие, что никакие три из точек a, b, c, d не лежат на одной прямой. Это возможно, так как $f(\mathbb{C}^2)$ — связное множество, не принадлежащее никакой прямой. Рассмотрим прямые λ_1 и λ_2, проходящие через пары точек b, d и c, d соответственно. Они пересекаются в точке d. Их прообразы вклю-

чают некоторые прямые l_1, l_2, проходящие через пары точек β, δ и γ, δ соответственно, $\beta \in f^{-1}(b)$, $\gamma \in f^{-1}(c)$, $\delta \in f^{-1}(d)$. Прямые l_1, l_2 не могут пересекать прямую l, так как $a \notin \lambda_1 \cup \lambda_2$ и не могут совпадать, потому что их образы принадлежат разным прямым. Следовательно, мы построили через точку δ две прямые, параллельные прямой l. Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 5.3. *Пересекающиеся прямые не могут отобразиться в одну прямую.*

Доказательство. Пусть l_1, l_2 — разные прямые, $l_1 \cap l_2 = \alpha$ и $f(l_1) \subset \lambda$, $f(l_2) \subset \lambda$, где λ — прямая, причем ни $f(l_1)$, ни $f(l_2)$ не может быть точкой в силу леммы 5.1. Выберем прямую λ_1, параллельную λ и такую, что $\lambda_1 \cap f(\mathbb{C}^2)$ содержит более одной точки. Согласно лемме 5.1, прообраз $f^{-1}(\lambda_1)$ должен состоять из прямых, одновременно параллельных l_1 и l_2, но это невозможно в силу невырожденности $f^{-1}(\lambda_1)$.

Вернемся теперь к доказательству предложения. Покажем, что f — гомеоморфизм. Если f — не гомеоморфизм, то найдется точка $a \in f(\mathbb{C}^2)$, такая, что $f^{-1}(a)$ содержит по меньшей мере две точки α_1, α_2. Пусть β — некоторая точка, не лежащая на прямой, проходящей через точки α_1, α_2, и не принадлежащая $f^{-1}(a)$ (такая точка существует в силу невырожденности f). Рассмотрим прямые λ_1 и λ_2, проходящие через пары точек α_1, β и α_2, β соответственно. Тогда прямые λ_1 и λ_2 пересекаются по точке β, а их образы $f(\lambda_1)$ и $f(\lambda_2)$ принадлежат одной прямой, что противоречит лемме 5.3. Предложение доказано.

Предложение 5.5. *Пусть $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, — непрерывное отображение, инвариантное на прямых, и $f(\mathbb{C}^n)$ не лежит ни в какой гиперплоскости. Тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Пусть l — некоторая прямая в $\mathbb{C}^n$. Найдется некоторая другая прямая l_1 через точку $a \in l$, такая, что $f(l_1) \cap f(l) = f(a)$ (иначе $f(\mathbb{C}^n) \subset f(l)$). Рассмотрим 2-плоскость T — линейную оболочку прямых l и l_1. Очевидно, что образом 2-плоскости будет подмножество 2-плоскости T_1 — линейной оболочки прямых, содержащих $f(l_1)$ и $f(l)$ соответственно. Согласно предложению 5.4, $f|_T$ — гомеоморфизм. Но тогда, в силу произвольности выбора l, f — тоже гомеоморфизм (если $f(a) = f(b)$, то можно взять прямую l, проходящую через точки a и b).

Лемма 5.4. *Пусть $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, n \geq 2$, — непрерывное отображение, инвариантное на k-плоскостях, $1 \leq k < n$, и $f(\mathbb{C}^2)$ не*

лежит ни в какой гиперплоскости. Тогда f — гомеоморфное полуаффинное отображение, инвариантное на $(k-1)$-плоскостях.

Доказательство. Пусть l_1 — произвольная k-плоскость, содержащая фиксированную $(k-1)$-плоскость l. Образ $f(l_1)$ лежит в k-плоскости λ_1. Поскольку $f(\mathbb{C}^n)$ не лежит ни в какой k-плоскости, то существует k-плоскость l_2, такая, что $\dim_{\mathbb{C}} l = k-1$, где $l = l_1 \cap l_2$, $f(l_2) \subset \lambda_2$; здесь λ_2 — k-плоскость и $\dim_{\mathbb{C}}(\lambda_1 \cap \lambda_2) \leq k-1$. Тогда $f(l) = f(l_1 \cap l_2) \subset f(l_1) \cap f(l_2) \subset \lambda_1 \cap \lambda_2$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.4. *Пусть $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, — непрерывное отображение, инвариантное на k-плоскостях, $1 \leq k < n$, и $f(\mathbb{C}^n)$ не лежит ни в какой гиперплоскости. Тогда f — гомеоморфное полуаффинное отображение.*

Эта теорема, очевидно, следует по индукции из леммы 5.4 и предложений 5.5 и 5.1.

Исследуем вопрос распространения предложения 5.1 на проективные пространства $\mathbb{C}P^n$, которые будем рассматривать как пространство $\mathbb{C}^n$, пополненное бесконечно удаленной гиперплоскостью.

Проективное преобразование пространства $\mathbb{C}P^n$, рассматриваемого как $\mathbb{C}^n$, пополненное бесконечно удаленной гиперплоскостью, задается дробно-линейными функциями

$$z'_j = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} z_k + b_j}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{0k} z_k + b_0}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

a_{jk}, b_k — комплексные числа.

Определение 5.2. Скажем, что отображение $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ полупроективно, если оно представимо в виде суперпозиции $f = gh$, где h есть непрерывное продолжение на проективное пространство полуаффинного отображения $\hat{h} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, а g — проективное преобразование.

Теорема 5.5. *Пусть $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, $n \geq 2$, — гомеоморфизм, строго инвариантный на прямых. Тогда f — полупроективное отображение.*

Доказательство. Отметим, что в отличие от случаев, рассмотренных в предыдущих предложениях, здесь уже не имеет места сохранение параллельности. Параллельные гиперплоскости (т.е. пересекающиеся по бесконечно удаленной $(n-2)$-плоскости) могут

переходить в пересекающиеся плоскости. Если f отображает бесконечно удаленную гиперплоскость в себя, то данная теорема следует из теоремы 5.1. Пусть теперь $\mathcal{L}$ — бесконечно удаленная гиперплоскость в $\mathbb{C}P^n$, а $f(\mathcal{L})$ — ее конечный образ при f. Гиперплоскость $f(\mathcal{L})$ можно задать уравнением $\langle a, w\rangle = b$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_j, b \in \mathbb{C}$, и $\langle a, w\rangle = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$. Пусть $g(w) = \frac{w}{\langle a,w\rangle - b}$ — проективное преобразование $\mathbb{C}P^n$, тогда для $h = gf$ ограничение $\hat{h}|_{\mathbb{C}^n}$ удовлетворяет условию теоремы 5.1 и поэтому полуаффинно. Следовательно, $f = g^{-1}h$ — полупроективное отображение.

Изучим более подробно двойственность, порождаемую соотношением

$$\langle w, z\rangle = 1. \tag{5.1}$$

Если считать два экземпляра пространства $\mathbb{C}^n$ с координатами z, w соответственно дуальными друг другу, то (5.1) при $w, z \neq \Theta$ фиксированной точке в $\mathbb{C}^n$ ставит в соответствие гиперплоскость в дуальном пространстве и, наоборот, по набору независимых n точек на гиперплоскости, не содержащей Θ, однозначно определяет точку дуального пространства. Покажем, что инвариантное на подмножествах гиперплоскостей непрерывное отображение $f : D \to D_1$ областей $(D, D_1 \subset \mathbb{C}^n)$, образ $f(D)$ которого не лежит ни в какой гиперплоскости, порождает непрерывное отображение $f^* : D^* \to D_1^*$ дуальных областей, $D^* = \{w \,|\, \langle w, z\rangle \neq 1,\ z \in D\}$. Покажем, что отображение f однозначно задает соответствие гиперплоскостей. Для этого достаточно показать, что образ непустого множества $L \cap D$, где L — произвольная гиперплоскость, не может лежать в плоскости меньшей размерности. Предположим противное. Пусть $f(L \cap D) \subset T$, где $T - (n-2)$-плоскость. Так как $f(D)$ не лежит ни в какой гиперплоскости, то существует точка $u \in f(D)$ и $u \notin T$. Аналогично лемме 5.4 легко показать, что f инвариантно на подмножествах прямых. Теперь пусть точка $v \in f^{-1}u$, а z — некоторая точка из $L \cap D$. Проведем прямую γ через пару точек v и z. Тогда $f(\gamma \cap D) \supset u$ и $f(z) \in T$. Следовательно, $f(\gamma \cap D) \supset \mathcal{L}$. Теперь последовательно соединяя прямыми пары точек из $L \cap D$ и $\gamma \cap D$, видим, что некоторая открытая окрестность U множества $L \cap D$ полностью отображается в гиперплоскость $\mathcal{L}$. Если теперь z — произвольная точка из D, то проводя прямую через эту точку так, чтобы она пересекала U, в силу инвариантности f на подмножествах прямых получим, что $f(D) \subset \mathcal{L}$, а это противоречит условию. Следовательно,

отображение f однозначно определяет гиперплоскость L, в которой лежит образ сечения $L \cap D$. Поставим в соответствие точке дуального пространства, заданной гиперплоскостью L, $L \cap D \neq \varnothing$, точку дуального пространства, заданную гиперплоскостью $\mathcal{L}$. Получаем некоторое соответствие точек дуальных областей $f^* : D^* \to D_1^*$. Очевидно, что построенное отображение непрерывно, так как близким гиперплоскостям соответствуют близкие точки. Легко также видеть, что гомеоморфность f влечет за собой гомеоморфность f^* и наоборот.

Ясно, что двойственность областей и отображений можно распространить и на области в $\mathbb{C}P^n$, только тогда началу координат нужно ставить в соответствие бесконечно удаленную гиперплоскость, а гиперплоскости, проходящей через начало координат, — точку бесконечно удаленной гиперплоскости, которая замыкает прямую, задающую пучок гиперплоскостей, параллельных данной.

Покажем, что полученные выше результаты носят локальный характер.

Теорема 5.6. *Пусть $f : D \to D_1$, $D, D_1 \subset \mathbb{C}^n$, — непрерывное отображение, инвариантное на подмножествах гиперплоскостей, и $f(D)$ не содержится ни в какой гиперплоскости. Тогда f — гомеоморфное полупроективное отображение.*

Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что области D, D_1 ограничены, содержат начало координат и $f(0) = 0$ (этого легко добиться дополнительными проективными преобразованиями). Области D, D_1 содержат соответственно некоторые шары радиусов r, r_1 с центром в начале координат. Как отмечено выше, отображение f индуцирует непрерывное отображение f^* двойственных областей D^*, D_1^*, содержащих бесконечно удаленные точки и вместе с ними дополнения к шарам радиусов $1/r$, $1/r_1$ соответственно. В силу $f(0) = 0$, f^* по непрерывности переводит бесконечно удаленную точку в бесконечно удаленную точку.

Поэтому, аналогично предложению 5.1 и теореме 5.4, получается, что ограничение f^* на $D^* \backslash (\infty)$ есть полуафинное преобразование, которое естественно продолжается на все пространство $\mathbb{C}^n \supset D^* \backslash (\infty)$ и далее, по непрерывности, на все $\mathbb{C}P^n$. Но это, в силу отмеченной выше двойственности, возможно только тогда, когда f — гомеоморфизм и продолжается до отображения $\mathbb{C}P^n$ в $\mathbb{C}P^n$, инвариантного на гиперплоскостях. Следовательно, согласно теореме 5.5, f — полупроективное отображение.

Как и выше, теорема 5.6 естественно справедлива и для непрерывных отображений, инвариантных на подмножествах k-плоскостей, $1 \le k < n$.

П р и м е р 5.1. Отображение $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(z_1, z_2) = (\bar{z_1}, \bar{z_2})$ служит примером полуаффинного отображения, не являющегося аффинным.

В рассуждениях ряда теорем мы априори не предполагали гомеоморфности отображений, которую получали как следствие невырожденности. Заметим, что аффинные и сопряженные к ним отображения исчерпывают класс полуаффинных гомеоморфизмов [21].

Упражнение 5.1. Установить эквивалентность двух описаний проективного пространства $\mathbb{C}P^n$: а) $\mathbb{C}P^n$ есть множество прямых пространства $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через Θ, топологизированное угловой метрикой; б) $\mathbb{C}P^n$ есть пространство классов комплексно пропорциональных ненулевых комплексных последовательностей $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ (точкам с $z_{n+1} = 0$ соответствует бесконечно удаленная гиперплоскость).

§ 6. Внутренняя характеристика мебиусовых отображений

Отметим, что все предыдущие рассуждения очевидным образом переносятся на вещественный случай, т.е. на непрерывные отображения евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и его подобластей, инвариантные на вещественных k-плоскостях. Более того, во всех формулировках слова "полупроективные" заменяются соответственно на "аффинные" и "проективные", так как поле вещественных чисел допускает только тождественный автоморфизм [37].

Напомним дальше (см. [134]), что гомеоморфизм пространства $f : \overset{o}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^n \cup (\infty)$, являющийся суперпозицией конечного числа отражений (инверсий относительно сфер или отражений относительно гиперплоскостей), называется мебиусовым преобразованием $\overset{o}{\mathbb{R}^n}$.

В рассуждениях настоящего параграфа под прямыми и k-плоскостями подразумеваем вещественные прямые и вещественные k-мерные аффинные подмногообразия $\mathbb{R}^n$. Если мы кроме инвариантности отображения на прямых потребуем еще инвариантность на сферах, то получим следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть $f : \overset{o}{\mathbb{R}}{}^n \to \overset{o}{\mathbb{R}}{}^n$, $n \geq 2$, — гомеоморфизм, инвариантный на $(n-1)$-сферах (гиперплоскость считаем сферой, проходящей через точку ∞). Тогда f есть мебиусово преобразование.*

Доказательство. Пусть f переводит бесконечно удаленную точку в некоторую конечную точку a. Рассмотрим инверсию

$$g(x) = a + (1/|x-a|)^2(x-a). \tag{6.1}$$

Суперпозиция $h = gf$ будет гомеоморфизмом $\overset{o}{\mathbb{R}}{}^n$ в $\overset{o}{\mathbb{R}}{}^n$, инвариантным на $(n-1)$-сферах. Ограничение h на $\mathbb{R}^n$ инвариантно на гиперплоскостях. Следовательно, в силу вещественного аналога предложения 5.1, h — аффинное преобразование, т.е. h имеет вид $h(x) = Ax + x_0$. Покажем, используя инвариантность на $(n-1)$-сферах, что h переводит центры шаров в центры шаров, ограниченных соответствующими сферами. Для этого достаточно показать, что h переводит произвольный диаметр шара в диаметр соответствующего ему шара-образа. Пусть B — произвольный шар, ограниченный сферой S^{n-1}. Проведем две параллельные касательные гиперплоскости $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ к нему. Известно, что отрезок, соединяющий точки касания α_1 и α_2, будет диаметром B. В силу аффинности h, $h(\mathcal{L}_1)$ и $h(\mathcal{L}_2)$ будут параллельными гиперплоскостями, касательными к шару $h(B)$.

В силу гомеоморфности h, точки касания отражаются в точки касания $h(\alpha_1)$ и $h(\alpha_2)$, а поэтому в силу аффинности h диаметр $[\alpha_1, \alpha_2]$ переходит в диаметр $[h(\alpha_1), h(\alpha_2)]$. Отсюда, в частности, следует что h сохраняет ортогональность гиперплоскостей и прямых. Рассмотрим ортогональную систему из n гиперплоскостей через начало координат $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. При отображении h эта система перейдет в ортогональную систему из n гиперплоскостей. Мебиусовым (даже изометричным) преобразованием φ можно привести эту систему к виду $y_1 = 0, \ldots, y_n = 0$. Следовательно, аффинное преобразование φh имеет вид $\varphi h(x) = Bx$, где B — диагональная матрица. Еще раз используем то, что сферы с центром в начале координат переходят в сферы с центром в начале координат. Из этого получается, что отображение $\psi = \varphi h$ является растяжением $\varphi h(x) = rx$, где r — вещественное число.

Таким образом, мы представили $f = g^{-1}h^{-1}\varphi^{-1}\psi$ как суперпозицию мебиусовых преобразований. Теорема доказана.

Замечание 6.1. Если $n = 2$, то выбирая при доказательстве теоремы 6.1 $g(z) = 1/(z-a)$, $z = x_1 + ix_2$ и замечая, что преобразование h

можно реализовать суперпозицией не более трех преобразований: сдвига $h_1(z) = z - z_0$, поворота $h_2(z) = e^{i\alpha}z$ и, если нужно, сопряженного преобразования $h_3(z) = \bar{z}$, получаем, что все преобразования, сохраняющие окружности, являются дробно-линейными, если они сохраняют ориентацию, и сопряженными к дробно-линейными, если они обращают ориентацию.

Следствие 6.1. $f : \overset{o}{\mathbb{R}^n} \to \overset{o}{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — непрерывное отображение, инвариантное на $(n-1)$-сферах, и $f(\mathbb{R}^n)$ не лежит ни в какой $(n-1)$-сфере. Тогда f есть мебиусово преобразование.

Доказательство. Если f переводит бесконечно удаленную точку в некоторую конечную точку, то инверсией (6.1) отправим эту точку в бесконечность. Дальше утверждение следует из вещественного аналога теоремы 5.4 и теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *Пусть $f : D \to D_1$ (D, D_1 — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) — непрерывное отображение, инвариантное на подмножествах $(n-1)$-сфер, и $f(D)$ не лежит ни в какой $(n-1)$-сфере. Тогда f есть мебиусово преобразование.*

Доказательство. Возьмем гиперплоскость L, которая при f переходит в $(n-1)$-сферу. Рассмотрим конечную точку $a \in f(L \cup D)$. Инверсией $g : g(y) = a + (1/|y-a|)^2(y-a)$ переведем ее в бесконечно удаленную точку. Если $f^{-1}(a)$ не содержит бесконечно удаленной точки, то выберем $b \in f^{-1}(a)$ и инверсией $\varphi(x) = b + (1/|x-b|)^2(x-b)$ отправим и эту точку в бесконечность (если же $\infty \in f^{-1}(a)$, то положим $\varphi \equiv id$). Получаем теперь непрерывное отображение $h = gf\varphi^{-1}$ области $\varphi(D)$ в область $g(D_1)$, переводящее бесконечно удаленную точку в себя, и инвариантное на подмножествах $(n-1)$-сфер. Кроме того, h инвариантно на гиперплоскостях. Поэтому, в силу вещественных аналогов теорем 5.5 и 5.6, оно будет вещественно проективным преобразованием на всем проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$. Но $h(\infty) = \infty$, поэтому из вещественного аналога предложения 5.3 h — вещественно аффинное преобразование $\mathbb{R}^n$. Но, кроме этого, на множестве $h(D)$ h инвариантно на подмножествах $(n-1)$-сфер. Выбирая сферу достаточно малого радиуса, лежащую целиком в $h(D)$, аналогично теореме 6.1, завершим доказательство.

Теорема 6.2 дает внутреннее описание класса мебиусовых преобразований, а именно: класс мебиусовых преобразований области $D \subset \mathbb{R}^n$ совпадает с классом ее невырожденных непрерывных отображений, инвариантных на подмножествах $(n-1)$-сфер.

Глава 2

Сильно линейно выпуклые множества

В настоящей главе продолжим изучение линейно выпуклых множеств, но сосредоточим свое внимание на классе сильно линейно выпуклых множеств, которые, с одной стороны, как будет показано ниже, в случае компактов и областей, включаются в класс линейно выпуклых множеств, а с другой, обладают более богатой структурой. Этот класс множеств позволяет получить естественные комплексные аналоги многих классических теорем функционального анализа. Из примера 2.1 видно, что, вообще говоря, класс сильно линейно выпуклых множеств не включается в класс линейно выпуклых множеств.

§ 7. Линейно выпуклые области с гладкими границами

Теорема 7.1. *Всякое линейно выпуклое множество $E \subset \mathbb{C}^n$, которое содержит хотя бы одну прямую, есть цилиндр с образующими в виде параллельных друг другу m-плоскостей $(1 \leq m \leq n)$ и не более чем вещественно $2(n-m)$-мерным линейно выпуклым основанием Q, которое уже не содержит ни одной прямой. Сопряженное множество к E лежит в $(n-m)$-плоскости.*

Доказательство. Заметим, что линейно выпуклое множество $E \subset \mathbb{C}^n$ вместе с прямой l и точкой z содержит также пря-

мую l_z, параллельную l. Если это не так, то для некоторой точки имеем $z_1 \in l_z$, $z_1 \notin E$. Следовательно, в силу линейной выпуклости E, существует гиперплоскость $T \subset \mathbb{C}^n$, $z_1 \in T$, $T \cap l \subset T \cap E = \varnothing$. Но это возможно лишь тогда, когда T паралельна l, и поэтому она полностью содержит l_z. Тогда $T \cap E \supset l_z \cap E \supset z$, что противоречит выбору T. Отсюда видно, что множество всех прямых, проходящих через z и лежащих в E, заполняет некоторую m-мерную образующую B_z множества E $(1 \leq m \leq n)$ (доказательство аналогично проведенному выше: если E содержит две прямые, то оно включает и их линейную оболочку и т.д.). Поэтому E должно быть цилиндром с параллельными B_z образующими и основанием $Q = E \cap C_z$, где C_z — дополнительное к B_z в $\mathbb{C}^n$ пространство. Линейная выпуклость Q очевидна.

Так как E содержит m линейно независимых прямых γ_k, $k = 1, \ldots, m$, то E^* содержится в γ_k^* для всех k (предложение 2.2). Но известно, что γ_k^* — гиперплоскость (предложение 2.8). Тогда $E^* \subset \bigcap_{k=1}^{m} \gamma_k^*$, а пересечение m линейно независимых гиперплоскостей задает $(n-m)$-плоскость.

Теорема 7.2. *Если $E \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклое множество, такое, что $\mathbb{C}^n \backslash E$ несвязно, то E есть цилиндр с образующими в виде параллельных друг другу гиперплоскостей и основанием, лежащим на прямой γ, причем множество компонент $\gamma \backslash Q$ взаимно однозначно соответствует множеству компонент из $\mathbb{C}^n \backslash E$, а E^* гомеоморфно $\overset{o}{\gamma} \backslash Q$ и находится на прямой, проходящей через начало координат, где $\overset{o}{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$.*

Доказательство. Если точки z^1 и z^2 принадлежат разным компонентам множества $\mathbb{C}^n \backslash E$, то, очевидно, гиперплоскости $L(z^1)$ и $L(z^2)$, содержащие соответственно их и не пересекающие E, также лежат в разных компонентах $\mathbb{C}^n \backslash E$ и не пересекаются. Поэтому они параллельны. Отсюда следует, что произвольная гиперплоскость, не пересекающая E, параллельна им. Таким образом, если точка $z^0 \in E$, то в E лежит и гиперплоскость $L(z^0)$, проходящая через z^0 и параллельная $L(z^1)$. Первое утверждение теоремы следует теперь из теоремы 7.1.

Известно (предложение 2.6), что семейство всех параллельных гиперплоскостей задаётся точками прямой в сопряженном пространстве, проходящей через начало координат. Поэтому второе утверждение теоремы следует из параллельности гиперплоскостей, не пересе-

кающих E, так как множество E^* задает гиперплоскости, не пересекающие E. Уточним предложение 2.23 для неограниченных областей.

Лемма 7.1. *Если $D \ni \Theta$ — область в $\mathbb{C}^n$, то точка $w_0 \neq \Theta$ принадлежит границе компакта D^*, такого, что $\operatorname{int} D^* \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда гиперплоскость $L = \{z \,|\, \langle w_0, z\rangle = 1\}$ проходит через какую-нибудь конечную точку границы ∂D, но не пересекает область D. Если же область D не ограничена, то $\Theta \in \partial D^*$.*

Доказательство. В случае точки $w_0 \neq \Theta$ доказательство дословно повторяет доказательство предложения 2.23 для ограниченных областей. Если же область D не ограничена, то очевидно, что $\Theta \in \partial D^*$ (иначе, если $\Theta \in \operatorname{int} D^*$ содержит некоторый открытый шар B_r радиуса $r > 0$ и, следовательно, область D содержится в замкнутом шаре $\bar{B}_{1/r}$ (предложения 2.2 и 2.3), т.е. ограничена, что противоречит предположению).

Будем говорить, что область D имеет гладкую границу ∂D, если D можно задать следующим образом: $D = \{z \,|\, \Phi(z, \bar{z}) < 0\}$, где Φ — вещественная непрерывно дифференцируемая функция в $\mathbb{C}^n$ и $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ в точках ∂D.

Лемма 7.2. *Пусть линейно выпуклую область $D \ni \Theta$ можно записать в виде $D = \{z \,|\, \Phi(z, \bar{z}) < 0\}$, где вещественная функция Φ дифференцируема и $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ в конечных точках границы ∂D области D. Тогда граница ∂D^* компакта D^* при $\operatorname{int} D^* \neq \varnothing$ имеет вид*

$$\partial D^* = \{w | w_k = \Phi'_{z_k}(z_1\Phi'_{z_1} + \cdots + z_n\Phi'_{z_n})^{-1},\ k = 1, \ldots, n,$$
$$z \in \partial D \text{ при } z \neq \infty \text{ или } w = \Theta \text{ при } z = \infty\}.$$

Доказательство. Для каждой конечной точки $\xi \in \partial D$ существует единственная гиперплоскость L, проходящая через ξ и не пересекающая D (а именно гиперплоскость, лежащая в единственной вещественной касательной гиперплоскости в ∂D, см. пример 1.2)

$$L = \{z | (z_1 - \xi_1)\Phi'_{\xi_1} + \cdots + (z_n - \xi_n)\Phi'_{\xi_n} = 0\}.$$

Поскольку $\Theta \in D$, то гиперплоскость L не проходит через Θ, а поэтому свободный член уравнения $\xi_1\Phi'_{\xi_1} + \cdots + \xi_n\Phi'_{\xi_n} \neq 0$. Следовательно, уравнение для L можно привести к виду

$$L = \{z | z_1\Phi'_{\xi_1}(\xi_1\Phi'_{\xi_1} + \cdots + \xi_n\Phi'_{\xi_n})^{-1} + \cdots +$$
$$+ z_n\Phi'_{\xi_n}(\xi_1\Phi'_{\xi_1} + \cdots + \xi_n\Phi'_{\xi_n})^{-1} = 1\}.$$

Таким образом, согласно предыдущей лемме, получаем представление для точек $w \in \partial D^*$, $w \neq \Theta$. Бесконечно удаленной же точке $z = \infty \in \partial D$, также согласно предыдущей лемме, соответствует точка $\Theta \in \partial D^*$.

Лемма 7.3. *Если D — линейно выпуклая область с гладкой связной границей, то все сечения области D прямыми связны и односвязны.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно, так как прямая совпадает с пространством $\mathbb{C}$, а граница будет замкнутой жордановой кривой в $\overset{o}{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup (\infty)$. Пусть $n > 1$. Покажем сначала, что для произвольной прямой γ множество $D \cap \gamma$ связно. Если это не так, то существуют точки z^0 и z^1, принадлежащие разным компонентам множества $D \cap \gamma$. Кроме этого, в силу связности D существует непрерывный путь $z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $z(0) = z^0$, $z(1) = z^1$, лежащий в D. Пусть G_0 — компонента $D \cap \gamma$, содержащая точку z^0, ∂G_0 — ее граница. В силу гладкости границы ∂D и линейной выпуклости D в каждой точке $\xi \in \partial G_0$ существует единственная касательная гиперплоскость к ∂D, причем эти гиперплоскости непрерывно зависят от точки ξ и разным точкам $\xi_1, \xi_2 \in \partial G_0$ соответствуют разные касательные гиперплоскости (если бы касательная гиперплоскость L содержала две точки $\xi_1, \xi_2 \in \partial G_0$, то она бы содержала и всю прямую γ, но это невозможно, так как мы имели бы, с одной стороны, $L \cap D = \varnothing$, а с другой, $L \cap D \supset \gamma \cap D \neq \varnothing$). Касательная гиперплоскость $L(\xi)$ в точке $\xi \in \partial G_0$ задаётся некоторой точкой $w(\xi) \in D^*$, $L(\xi) = \{z \,|\, \langle w(\xi), z\rangle = 1, \langle w(\xi), \xi\rangle = 1\}$. В силу леммы 7.2 и сказанного выше имеет место гомеоморфизм

$$f: \begin{cases} \xi \to w(\xi), & \xi \in \partial G_0, \quad \xi \neq \infty, \\ \infty \to \Theta, \end{cases}$$

причем $f(\partial G_0) \subset \partial D^*$. Не нарушая общности, полагаем, что прямая γ проходит через начало координат (этого легко достичь параллельным сдвигом). Тогда, согласно предложению 2.19, множество $D \cap \gamma$ гомеоморфно дополнению $\overset{o}{\lambda} \setminus \pi_\lambda(D^*)$ к канонической проекции сопряженного множества D^* на прямую λ, $\lambda^o = \lambda \cup (\infty)$. Но так как $D \cap \gamma$ несвязно, то отсюда следует, что $H^1(\pi_\lambda(D^*)) \neq 0$. Заметим также, что множество $f(\partial G_0)$ при проекции гомеоморфно проектируется в $\partial\pi_\lambda(D^*)$ (в силу упомянутого выше гомеоморфизма между ∂G_0 и $\partial\pi_\lambda(D^*)$). Точкам z^0 и z^1 в сопряженном про-

странстве соответствуют две гиперплоскости $\mathcal{L}_0 = \{w \,|\, \langle w, z^0\rangle = 1\}$ и $\mathcal{L}_1 = \{w \,|\, \langle w, z^1\rangle = 1\}$, не пересекающие D^*, причем $\mathcal{L}_0$ зацеплена с циклом $\pi_\lambda f(\partial G_0)$ (определение зацепления циклов см. [10] или § 31), а значит, и с циклом $f(\partial G_0)$, гомеоморфно проектирующимся на него при проекции π_λ; гиперплоскость $\mathcal{L}_1$ не зацеплена с этими циклами. Следовательно, с одной стороны, не существует гомотопии, переводящей $(2n-2)$-цикл $\mathcal{L}_0 \cup (\infty)$ в $(2n-2)$-цикл $\mathcal{L}_1 \cup (\infty)$ и не пересекающей $f(\partial G_0) \subset D^*$. С другой стороны, путь $z(t)$ задает гомотопию, переводящую гиперплоскость $\mathcal{L}_0$ в гиперплоскость $\mathcal{L}_1$ по закону $\mathcal{L}_t = \{w \,|\, \langle w, z(t)\rangle = 1\}$, не пересекающую D, так как $z(t) \in D \;\forall t$. Полученное противоречие показывает связность множества $D \cap \gamma$.

Теперь согласно показанному выше $D \cap \gamma$ – область на прямой γ. Докажем ее односвязность. Предположим, что она неодносвязна; тогда граница $\partial(D \cap \gamma)$ не связна. Для точек z^0, z^1, принадлежащих разным компонентам $\partial(D \cap \gamma)$, существует замкнутая жорданова кривая $\Gamma \subset D \cap \gamma$, которая разделяет в γ точки z^0, z^1. В силу связности ∂D можем соединить точки z^0, z^1 непрерывным путем $\Gamma_1 = \{z \,|\, z(t),\ 0 \le t \le 1\} \subset \partial D,\ z(0) = z^0,\ z(1) = z^1$, причем одна из точек z^0 или z^1 может быть бесконечно удаленной точкой. В каждой конечной точке $z(t), 0 \le t \le 1$, проведем касательную гиперплоскость $L(t)$ к границе. Очевидно, что в силу линейной выпуклости $L(t) \cap D = \varnothing$. Поэтому $\gamma \not\subset L(t)$. Гиперплоскость $L(t)$ и не лежащая на ней прямая γ имеют одну общую точку $\xi(t)$ (конечную, если они не параллельны, и бесконечную, если они параллельны). Если же точка $z(t)$ при $t = 0$ или 1 бесконечна, то положим $L(t) = \infty$; в этом случае $\xi(t) = \gamma \cap L(t) = \infty$. В силу гладкости границы ∂D, семейство $L(t)$ непрерывно зависит от t (в том числе и в бесконечно удаленной точке), и поэтому получаем непрерывный путь $\Gamma_2 = \{z \,|\, z = \xi(t),\ 0 \le t \le 1\}$, соединяющий точки $z(0) = \xi(0),\ z(1) = \xi(1)$ в прямой $\overset{o}{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$. Так как замкнутая жорданова кривая Γ разделяет точки z^0, z^1, то $\Gamma \cap \Gamma_2 \ne \varnothing$. Следовательно, для некоторого $t = t^0$ $L(t^0) \cap \Gamma \subset L(t^0) \cap D \ne \varnothing$. Это противоречит линейной выпуклости D.

Лемма 7.4. *Если $D \cap \gamma \ne \varnothing$ для линейно выпуклой области D с гладкой связной границей и прямой γ, то $\overline{D \cap \gamma} = \bar{D} \cap \gamma$.*

Доказательство. Согласно предыдущей лемме, $D \cap \gamma$ связно. Очевидно, что всегда $\overline{D \cap \gamma} \subset \bar{D} \cap \gamma$. Пусть $\bar{D} \cap \gamma \backslash \overline{D \cap \gamma} \ne \varnothing$. Предположим, что множество $A = \bar{D} \cap \gamma \backslash \overline{D \cap \gamma}$ незамкнуто. Из лем-

мы 7.3 $B = D \cap \gamma$ — жорданова область, а ее граница ∂B — гладкая жорданова кривая. Если множество A незамкнуто, то это значит, что в окрестности некоторой точки $\xi \in \partial B$ пересечение $\gamma \cap \partial D$ не будет жордановой кривой. Такое, согласно теории Морса [166], возможно только тогда, когда γ лежит в вещественной касательной гиперплоскости T в точке ξ к границе ∂D. В силу линейной выпуклости D, существует гиперплоскость L через точку ξ, такая, что $L \cap D = \varnothing$. Из-за гладкости ∂D эта гиперплоскость единственна и, согласно лемме 7.2, лежит в T. Прямая γ и гиперплоскость L, лежащие в вещественной $(2n-1)$-мерной плоскости T, имеют по меньшей мере общую вещественную прямую. Но тогда $\gamma \subset L$. Следовательно, $\varnothing \neq \gamma \cap D \subset L \cap D = \varnothing$. Получили противоречие. Таким образом, A — замкнутое множество, т.е. $\bar{D} \cap \gamma$ несвязно. Возьмем точки z^0, z^1 в разных компонентах множества $\bar{D} \cap \gamma$, $z^0 \in D \cap \gamma$, а $z^1 \in A \subset \partial D$. Так как ∂D — гладкая гиперповерхность, то существует путь $z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $z(0) = z^0$, $z(1) = z^1$, $z(t) \in D$ для $0 \leq t < 1$. Рассмотрим семейство прямых $\gamma(t)$, проходящих через пары точек z^0, $z(t)$, $0 < t \leq 1$. Так как для $t = 1$ z^0 и z^1 принадлежат разным компонентам $\bar{D} \cap \gamma(1) = \bar{D} \cap \gamma$, то для t, достаточно близких к 1, z^0 и $z(t)$, принадлежат разным компонентам $\bar{D} \cap \gamma(t)$, а следовательно, и разным компонентам $D \cap \gamma(t)$. Это противоречит лемме 7.3. Значит, $\bar{D} \cap \gamma = \overline{D \cap \gamma}$.

Дальше в теореме 7.3 и лемме 7.5 мы предполагаем, что граница области будет связным многообразием в проективном пространстве, полученном из $\mathbb{C}^n$ пополнением его бесконечно удаленной гиперплоскостью.

Теорема 7.3. *В $\mathbb{C}^n$ линейно выпуклая область со связной гладкой границей гомеоморфна шару.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D = \{z | \Phi(z, \bar{z}) < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклая область с гладкой границей. Не нарушая общности, полагаем $\Theta \in D$. Рассмотрим сечение $D \cap \gamma_a$ области D произвольной прямой $\gamma_a = \{z \,|\, z = at,\ a = (a_1, \ldots, a_n),\ |a| = 1,\ t \in \mathbb{C}^1_t\}$, проходящей через начало координат. Согласно лемме 7.3, $D \cap \gamma_a$ — односвязная область в γ_a. Отображение $z = at$ устанавливает изометрию области $D_a = \{t \,|\, \Phi(at, \bar{a}\bar{t}) < 0\}$ и сечения $D \cap \gamma_a$. По теореме Римана [158], существует единственная аналитическая функция $t = f_a(v)$, отображающая конформно единичный круг $V = \{v \,|\, |v| < 1\} \subset \mathbb{C}^1_v$ на односвязную область $D_a \ni 0$ и удовлетворяющая условиям $f_a(0) = 0$, $f'_a(0) > 0$.

Определим вектор-функцию $z = F(w)$, отображающую взаимно однозначно единичный шар

$$U = \left\{ w = (w_1, \dots, w_n) \,\middle|\, |w| = \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 \right)^{1/2} < 1 \right\} \subset \mathbb{C}^n_w$$

на область $D \subset \mathbb{C}^n_z$. Положим для любого $w = av \in U$, где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $|a| = 1$, $v \in \mathbb{C}^1$, $|v| < 1$,

$$z = F(w) = a f_a(v). \tag{7.1}$$

Отображение F определено для любого $w \in U$ и $F(U) \subset D$. Действительно, для $w \in U$ существуют $a = (a_1, \dots, a_n)$, $|a| = 1$, и $v \in \mathbb{C}^1$, $|v| < 1$, такие, что $w = av$ (возьмем, например, $a = w/|w| = (w_1/|w|, \dots, w_n/|w|)$, $v = |w|$, для $w \neq \Theta$ и $v = 0$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $|a| = 1$ — любое для $w = \Theta$). Так как $f_a(v) \in D_a$ для $|v| < 1$, то $F(av) = a f_a(v) \in D \cap \gamma_a \subset D$. Отображение F однозначно, т.е. не зависит от представления $w = av$. Действительно, $F(\Theta) = a f_a(\Theta) = \Theta$. Пусть $w \neq \Theta$, $w = av = a^0 v^0$, где a, $a^0 \in \mathbb{C}^n$, $|a| = |a^0| = 1$. Тогда $|v| = |v^0|$, $v^0 = ve^{i\varphi}$, где φ — вещественное число. Следовательно, $a^0 = ae^{-i\varphi}$. Функция $\psi(v) = e^{i\varphi} f_a(ve^{-i\varphi})$ конформно отображает единичный круг V на область $D_{a^0} = D_{ae^{-i\varphi}} = \{t \,|\, \Phi(ae^{-i\varphi}t,\ \overline{ae^{-i\varphi}t}) < 0\} = e^{i\varphi} D_a$, получающуюся из D_a поворотом на угол φ, причем $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = f_a(0) > 0$. В силу единственности такого конформного отображения, $\psi(v) = f_{a^0}(v)$. Таким образом, $F(a^0 v^0) = a^0 f_{a^0}(v^0) = ae^{-i\varphi}(e^{i\varphi} f_a(v^0 e^{-i\varphi})) = a f_a(v) = F(av)$.

Покажем, что F отображает U на всю область D. Для произвольной точки $z \in D$ существуют $a \in \mathbb{C}^n$, $|a| = 1$, и $t \in D_a$, такие, что $z = at$. Так как f_a отображает единичный круг на D_a, то существует $v \in V$, для которого $f_a(v) = t$. Тогда $F(av) = a f_a(v) = z$ и $av \in U$.

Наконец, пусть $w^0, w' \in U$ и $F(w^0) = F(w')$. Положим $w' = a'v'$, $w^0 = a^0 v^0$, $|a| = |a'| = 1$, $v', v^0 \in V$. Согласно (7.1) $a^0 f_0(v^0) = a' f_{a'}(v')$. Отсюда $|f^0_a(v^0)| = |f_{a'}(v')|$. Значит, комплексные числа $f_{a^0}(v^0)$ и $f_{a'}(v')$ отличаются на множитель $e^{i\varphi}$, где φ — вещественное число, а, следовательно, и векторы a^0, a' связаны соотношением $a^0 e^{i\varphi} = a'$. Тогда $w' = a'v' = a^0 e^{i\varphi} v'$. По (7.1), $F(w') = a^0 f_{a^0}(e^{i\varphi} v') = F(w^0) = a^0 f_{a^0}(v^0)$ и, в силу взаимной однозначности, $f_{a^0} v^0 = e^{i\varphi} v'$. Значит, $w^0 = a^0 v^0 = (a' e^{-i\varphi} v') = a'v' = w'$, т.е. F взаимноодносзначно.

Докажем, что отображение $z = F(w)$ непрерывно. Возьмем произвольные точку $w^0 \in U$ и последовательность $\{w^\nu\} \to w^0$, $w^\nu \in U$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Пусть $w^0 \neq \Theta$. Существуют a^ν, $a^0 \in \mathbb{C}^n$, $|a^\nu| = |a^0|$, v^ν, $v^0 \in V$, такие, что $w^\nu = a^\nu v^\nu$, $w^0 = a^0 v^0$, $\{a^\nu\} \to a^0$, $\{v^\nu\} \to v^0$ (положим, например, $v^\nu = |w^\nu|$, $a^\nu = w^\nu/|w^\nu|$).

Покажем, что область D_{a^0} совпадает с ядром E последовательности областей $\{D_{a^\nu}\}$ [158]. Действительно, так как $\Theta \in D$, то существует шар $\{z||z| < \rho\} \subset D$. Следовательно, круг $\{t\,|\,|t| < \rho\} \subset D_{a^\nu}$ для любого ν. Пусть теперь $t' \in E$, $t \neq \infty$. Тогда существует окрестность $V(t')$ точки t', принадлежащая областям D_{a^ν} для всех ν, начиная с некоторого ν_0, т.е. $\Phi(a^\nu t, \overline{a^\nu t}) < 0$ для всех $t \in V(t')$, $\nu > \nu_0$. Следовательно, $\Phi(a^0 t, \overline{a^0 t}) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \Phi(a^\nu t, \overline{a^\nu t}) \leq 0$ для всех $t \in V(t')$, т.е. $V(t') \subset \Delta_{a_0} = \{t\,|\,\Phi(a^0 t, \overline{a^0 t}) \leq 0\}$. Так как по лемме 7.4 $\bar{D}_{a^0} = \Delta_{a^0}$, а граница ∂D_{a^0}, по предположению, гладкая жорданова кривая во всех конечных точках, то $t' \in D_{a^0}$.

Для любой точки $t' \in D_{a^0}$ существует замкнутая окрестность $\bar{V}(t^0) \subset D_{a^0} = \{t\,|\,\Phi(a^0 t, \overline{a^0 t}) < 0\}$. Так как функция $\Phi(at, \overline{at})$ непрерывна, то для ν, достаточно больших, $\Phi(a^\nu t, \overline{a^\nu t}) < 0$ на компакте $\overline{V(t')}$, т.е. $V(t') \subset D_{a^\nu}$, значит, $t' \in E$. Рассуждение проведено для произвольной последовательности $\{a^\nu\} \to a^0$, следовательно, D_{a^ν} является ядром любой подпоследовательности $\{a^\nu\}$, т.е. области D_{a^ν} сходятся к ядру $E = D_{a^0}$. По теореме Каратеодори [158] последовательность функций f_{a^ν} равномерно сходится к f_{a^0} внутри $V = \{v||v| < 1\}$. Следовательно, $\lim\limits_{\nu\to\infty} F(w^\nu) = \lim\limits_{\nu\to\infty} a^\nu f_{a^\nu}(v^\nu) = a^0 f_{a^0}(v^0) = F(w^0)$, т.е. вектор-функция F непрерывна в точке w^0.

Пусть $\{w^\nu\} \to \Theta, w^\nu \neq \Theta, \nu = 1, 2, \ldots$ Докажем, что $\{F(w^\nu)\} \to \Theta$. Предположим, что это не так. Тогда найдётся $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{w^{\nu_k}\}$, такая, что $|F(w^{\nu_k})| > \varepsilon$ для любого k. Имеет место представление $w^{\nu_k} = a^k v^k$, $a^k \in \mathbb{C}^n$, $|a^k| = 1$, $v^k \in \mathbb{C}^1$, $\{v^k\} \to 0$. Так как $\{a\,|\,a \in \mathbb{C}^n,\ |a| = 1\}$ — компакт, то можно полагать (иначе еще раз перейдем к подпоследовательности), что a^k сходится к некоторой точке $a^0, |a^0| = 1$. В силу равномерной сходимости f_{a^k} к f_{a^0} внутри V,

$$F(w^{\nu_k}) = a^k f_{a^k}(v^k) \to a^0 f_{a^0}(0) = F(\Theta) = \Theta.$$

Получено противоречие.

Непрерывность обратного отображения F^{-1} можно показать или точно так же, учитывая, что по теореме Каратеодори $f^{-1}_{a^\nu}$ при $\{a^\nu\} \to$

a^0 равномерно сходится к $f^{-1}_{a^0}$ внутри D_{a^0}, или используя то, что предел произвольной сходящейся последовательности $\{F(w^\nu)\}$ при $\{w^\nu\} \to w_0 \in \partial U$ принадлежит ∂D. Теорема доказана.

Теорема 7.4. *Если $D \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклая область с гладкой несвязной границей, то D есть цилиндр с образующими в виде параллельных друг другу гиперплоскостей и основанием в виде плоской области Q с гладкой границей, лежащей на прямой l (дополнительном подпространстве к образующей цилиндра), число компонент ∂Q совпадает с числом компонент ∂D. Сопряжённый компакт D^* состоит из объединения плоских двумерных компактов, гомеоморфных кругам и лежащих на прямой, проходящей через начало координат. Граница этих компактов гладка во всех точках, за исключением, может быть, начала координат, по которому могут пересекаться некоторые из компактов.*

Доказательство следует из теоремы 7.2. Дополнительного рассмотрения требует лишь гладкость границы ∂Q. Легко видеть, что D^* получается из $\overset{\circ}{l}\setminus Q$ преобразованием инверсии $1/t$, $t \in \mathbb{C}$, которое гладко во всех точках, отличных от Θ, а граница $\partial(\overset{\circ}{l}\setminus Q)$ состоит из гладких кривых, за исключением, быть может, точки ∞, которая при инверсии отображается в начало координат. Если $l\setminus Q$ имеет несколько неограниченных компонент, то соответствующие им компакты в сопряженном множестве пересекаются по началу координат.

Следствие 7.1. Если $D \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклая область с гладкой границей, то ее сечение произвольной прямой всегда связно.

Доказательство очевидно, так как произвольное сечение области прямой (если ∂D несвязно) или лежит в одной из образующих цилиндра, или гомеоморфно основанию. Случай связной границы разобран в лемме 7.3.

Замечание 7.1. Теоремы 7.3 и 7.4 дают полное топологическое описание линейно выпуклых областей с гладкой границей.

Исследуем, насколько в теореме 7.3 можно избавиться от требования гладкости. Легко построить пример даже ограниченной области, например $D = D_1 \times D_2$, где D_1 — кольцо, $D_1 = \{z_1 \,|\, 1 < |z_1| < 2\} \subset \mathbb{C}$, а D_2 — единичный шар в $\mathbb{C}^{n-1}$, который показывает, что если множество точек негладкости (в данном случае $\partial D_1 \times \partial D_2$) разбивает границу ∂D, то теорема 7.3 может быть несправедливой. В работе [153] показано, что при некоторых дополнительных условиях можно пренебречь счетным множеством точек негладкости. Покажем, что

на самом деле в этой теореме можно пренебречь произвольным множеством A, локально не разбивающим ∂D и таким, что $\partial D \backslash A$ всюду плотно в ∂D.

Лемма 7.5. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклая область со связной границей, причем граница ∂D гладкая во всех точках, за исключением множества A, такого, что A локально не разбивает ∂D и $\partial D \backslash A$ всюду плотно в ∂D. Тогда все сечения D прямыми связны и односвязны.*

Доказательство. Покажем связность сечения $D \cap \gamma$. Предположим, что $D \cap \gamma$ несвязно. Если $\partial(D \cap \gamma) \subset \partial D \backslash A$, то полностью проходят рассуждения леммы 7.3. Если же $\partial(D \cap \gamma) \cap A \neq \varnothing$, то затруднение, с которым сталкиваемся, это то, что для границы ∂D_0 компоненты $\partial(D \cap \gamma)$ в некоторых (или во всех, если $\partial G_0 \subset A$) точках существуют неединственные касательные гиперплоскости и мы не можем упорядочить их непрерывно. Если сумеем обойти эту трудность, то все остальные рассуждения проходят аналогично лемме 7.3. В силу того, что A локально не разбивает ∂D, для произвольной окрестности $U_k \subset \partial D$ цикла ∂G_0 существует ненулевой одномерный цикл a_k, лежащий в $\partial D \backslash A$ и являющийся ε-сдвигом цикла ∂G_0. Как и в лемме 7.3, циклу a_k соответствует гомеоморфно цикл c_k на ∂D^*, задающий непрерывное семейство касательных гиперплоскостей к D в точках из a_k. Каждая касательная гиперплоскость пересекает нашу прямую γ в одной точке, при этом получаем некоторый цикл b_k. Выберем окрестность U_k настолько близкой, чтобы циклы a_k и b_k были ε-сдвигами граничного цикла ∂G_0 и цикл b_k был бы зацеплен с точкой $z^0 \in G_0$ ($b_k \subset \gamma \backslash D \cap \gamma$). Циклу b_k, согласно предложению 2.19, гомеоморфно соответствует цикл $d_k \in \pi_\lambda(D^*)$, зацепленный в прямой λ с точкой $w_0 \in \lambda \cap \mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_0 = \{w | \langle w, z^0 \rangle = 1\}$, а в пространстве $\overset{\circ}{\mathbb{C}}{}^n$ — с $(2n-2)$-циклом $\mathcal{L}_0 \cup (\infty)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} a_k & \xleftarrow{\ \alpha\ } & c_k \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_\lambda} \\ b_k & \xrightarrow{\ \beta\ } & d_k \end{array}$$

где α и β — гомеоморфизм; δ — ε-сдвиг. Поэтому c_k — ненулевой одномерный цикл, который при проекции проектируется изоморфно в цикл d_k. Следовательно, цикл c_k также зацеплен с циклом $\mathcal{L}_0 \cup (\infty)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны лемме 7.3.

Отметим, что отсюда следует справедливость теоремы 7.3 при наложенных в лемме 7.5 условиях.

Легко построить пример, когда лемма 7.3 и теорема 7.3 справедливы даже при наличии дополнительной линейно выпуклой оболочки (т.е. когда $\operatorname{int} \bar{D} \neq D$) и когда $\operatorname{grad} \Phi = 0$ в точках ∂D.

П р и м е р 7.1. Пусть $D = \mathbb{C}^n \backslash A$, где A — вещественная полугиперплоскость $\operatorname{Re} z_n \geq 0$. Очевидно, что в данном случае все сечения D прямыми связны и односвязны и справедлива теорема 7.3.

Замечание 7.2. В § 11 мы построим пример, который покажет, что в лемме 7.5 слово "локально" в общем случае опустить нельзя.

Предыдущие результаты не охватывают случай, когда граница ∂D связна, но не является связным многообразием в $\mathbb{C}P^n \supset \mathbb{C}^n$.

Исследуем этот случай и покажем, что и он легко описывается с помощью теоремы 7.4. Если граница ∂D связна, но не является связным $(2n-1)$-многообразием в $\mathbb{C}P^n$, то существуют бесконечно удаленные точки границы D, находящиеся на бесконечно удаленной гиперплоскости, которые не достижимы по последовательности конечных точек границы. Пользуясь линейной выпуклостью D, выберем одну из гиперплоскостей l, которые не пересекают область D. Проективным преобразованием f пространства $\mathbb{C}^n$ переведем гиперплоскость l в бесконечно удаленную гиперплоскость l_1. При этом бесконечно удаленная гиперплоскость перейдет в некоторую гиперплоскость, отличную от бесконечно удаленной. А так как, по условию, некоторая точка $z \in l_1$ была недостижима по конечным точкам границы ∂D, то для точки $f(z) \in \partial f(D)$ имеем гиперплоскость $f(l_1)$, не пересекающую $f(D)$. Эта гиперплоскость не может лежать в $f(\mathbb{C}^n \backslash D) \backslash l$, иначе точка z была бы достижима по конечным точкам границы. Поэтому граница $\partial f(D)$ несвязна в $\mathbb{C}^n$ и, согласно теореме 7.4, $f(D)$ есть цилиндр вида $D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, где область D_1 получена из односвязной области выкалыванием одной точки. Возвращаясь к области D обратным проективным преобразованием, видим, что область D является проективным образом цилиндра $D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$. Следовательно, приведенная ниже теорема полностью решает вопрос квалификации линейно выпуклых областей с гладкими границами.

Теорема 7.5 (о классификации). *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклая область с гладкой границей. Тогда:*

а) D — $\mathbb{C}$-выпукла и гомеоморфна шару, если граница $\partial(D)$ связна и каждая точка бесконечно удаленной гиперплоскости достижима по конечным точкам границы D, или

б) D — цилиндр $D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, где D_1 — плоская область, если граница $\partial(D)$ несвязна, или

в) D — проективный образ цилиндра $D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, где D_1 — плоская область, полученная из некоторой односвязной области выкалыванием одной точки z_1, при проективном преобразовании пространства, переводящего гиперплоскость $z_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$ в бесконечно удаленную гиперплоскость, если граница $\partial(D)$ — связна, но есть ее точки на бесконечно удаленной гиперплоскости, недостижимые по конечным точкам $\partial(D)$.

§ 8. Ацикличные многозначные отображения многообразий Грассмана

В настоящем параграфе под Q, если нет никаких уточнений, понимаем один из следующих объектов: поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, тело кватернионов $\mathbb{H}$; под Q^n — соответствующее n-мерное пространство; под прямыми, k-плоскостями и гиперплоскостями — аффинные подмногообразия Q^n соответствующей размерности.

Обозначим $QG(n,k)$ — множество k-плоскостей пространства Q^n, проходящих через Θ. Известно, что компактное многообразие $QG(n,k)$ называется многообразием Грассмана и имеет вещественную размерность $mk(n-k)$, где $m = 1$, 2 или 4 соответственно в случаях $Q = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$. Более полную информацию об этих многообразиях можно найти в [193]. Отметим только легко проверяемые гомеоморфизмы $QG(n,k) \approx QG(n,n-k)$, $QG(n,1) \approx QP^{n-1}$, где QP^{n-1} — проективное пространство. Если T — фиксированная k-плоскость в Q^n, множество r-плоскостей, содержащих T, гомеоморфно многообразию $QG(n-k,r-k)$. Дальше под многозначным отображением понимаем многозначное полунепрерывное сверху отображение.

Теорема 8.1. *Пусть T — фиксированная k-плоскость в Q^n. Для произвольной точки $x \in QG(n-k,r-k)$ пусть $H(z)$ — r-плоскость в Q^n, содержащая T и соответствующая x. Если $F : QG(n-k,r-k) \to Q^n$ — многозначное ацикличное отображение, то существует $x \in QG(n-r,r-k)$, такое, что $H(x) \cap F(x) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать теорему для $r = k+1$. В общем случае можно выбрать $(r-1)$-плоскость T_0, содержащую T, и тогда многообразия Грассмана всех

r-плоскостей, содержащих T_0, есть подмножество $QG(n-k, r-k)$. Следовательно, в дальнейших рассуждениях можем считать, что

$$QG(n-k, r-k) = QG(n-k, 1) = QP^{n-k-1}.$$

Пусть S — $(mn-1)$-сфера в Q^n с центром O в T, которая содержит множество $F(QG(n-k,1))$ внутри. Очевидно, что такая сфера существует, так как $F(QG(n-k,1))$ — компакт.

Обозначим $F_1(x) = H(x) \cap S$ для произвольной точки $x \in QP^{n-k-1}$. Следовательно, $F_1(x)$ будет $(mk+1)$-сферой и легко проверить, что $F_1 : QP^{n-k-1} \to Q^n$ есть непрерывное многозначное отображение.

Пусть множество $J \subset QP^{n-k-1} \times Q^n \times I \times Q^n$, где $I = [0,1]$, представляет собой объединение множеств вида

$$(x) \times F(x) \times I \times F_1(x), \quad x \in QP^{n-k-1},$$

т.е. точка $(x, y, t, y_1) \in J$ тогда и только тогда, когда $y \in F(x)$, $y_1 \in F_1(x)$, $t \in [0,1]$. Построим из J новое пространство.

Отождествим в J точку $(x, y, 1, y_1)$ с точкой $(x', y', 0, y_1')$, если $x = x'$, $y = y'$, и точку $(x, y, 0, y_1)$ с точкой $(x', y', 0, y_1')$, если $x = x'$, $y_1 = y_1'$. Обозначим через M множество (фактор-пространство), которое получено из J отождествлением. Легко видеть, что M — компакт.

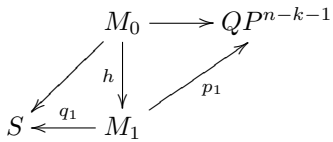
Пусть подмножество $M_0 \subset M$ состоит из точек, для которых $t = 0$, точнее M_0 — образ при отображении отождествления $J \to M$ подмножества J, которое составлено из точек вида $(x, y, 0, y_1)$. Определим проекции $q : M_0 \to S$ и $p : M_0 \to QP^{n-k-1}$ по следующему правилу: $q(x, y, 0, y_1) = y_1$, $p(x, y, 0, y_1) = x$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

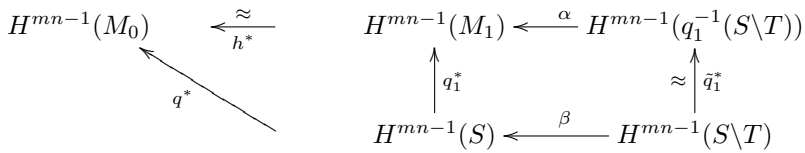
Лемма 8.1. *При введенных выше обозначениях M_0 есть $(mn-1)$-мерное многообразие, а q — отображение степени 1. Если $k = 0$, то p — накрывающее отображение. В частности, для произвольного $k \geq 0$ имеем $p^*(H^{mn-1}(QP^{n-k-1})) = 0$ и $q^*(H^{mn-1}(S)) = H^{mn-1}(M_0)$.*

Доказательство. Пусть $M_1 = \Gamma(F_1)$ — график отображения F_1, $p_1 : M_1 \to QP^{n-k-1}$, $q_1 : M_1 \to S$ — проекции графика, а отображение $h : M_0 \to M_1$ определено равенством $h(x, y, 0, y_1) = (x, y_1)$.

Тогда диаграмма



коммутативна. Более того, из построения M_0 видно, что h — гомеоморфизм. Теперь легко видеть, что M_1 — расслоенное пространство над QP^{n-k-1} со слоем S^{mk+1} и p_1 — расслаивающее отображение. Поскольку $F_1(x) \cap F_1(x_1) \subset I \cap S$, если $x \neq x_1$, то отсюда следует, что q_1 отображает $q_1^{-1}(S\backslash T)$ гомеоморфно на $S\backslash T$. Это позволяет показать, что q имеет степень 1. Используем следующую цепочку рассуждений. Так как в коммутативной диаграмме



$\tilde{q}_1^*$ — изоморфизм, а α, β — эпиморфизмы в силу того, что S и M_1 — $(mn-1)$-мерные многообразия, то из коммутативности диаграммы следует, что q_1^* — эпиморфизм. Тогда и q^* — эпиморфизм группы $H^{mn-1}(S) \approx \mathbb{Z}$ на группу $H^{mn-1}(M_0) \approx \mathbb{Z}$. Но эпиморфизм группы целых чисел всегда изоморфизм. Таким образом, $\deg q = 1$. Если $k = 0$, тогда q_1 — гомеоморфизм и p_1 — двукратное накрывающее отображение.

Равенство $p^* H^{mn-1}(QP^{n-k-1}) = 0$ следует из размерностных соображений. Если $m \neq 1$, а $k \neq 0$, то $H^{mn-1}(QP^{n-k-1}) = 0$, так как $mn-1 > \dim(QP^{n-k-1}) = m(n-k-1)$. Если же $m = 1$ и $k = 0$, то имеем $H^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) = \mathbb{Z}_2$, а $M_0 \approx M_1 \approx S^{n-1}$. Поэтому $H^{n-1}(M_0) \approx \mathbb{Z}$. Очевидно, что гомоморфизм

$$p^* : \ H^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) = \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} = H^{n-1}(M_0)$$

всегда тривиален.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} M_0 & \xrightarrow{\tau} & M & \xrightarrow{\bar{p}} & QP^{n-k-1} \\ \downarrow q & & \downarrow g & & \\ S & \xrightarrow{j} & G, & & \end{array}$$

где τ, j — отображения вложения; $\bar{p} : M \to QP^{n-k-1}$ определено как $\bar{p}(x, y, t, y_1) = x$; $g(x, y, t, y_1)$ — точка Q^n, делящая отрезок $\overline{yy_1}$ в соотношении $t/(1-t)$, $G = g(M)$. Так как $g(x, y, 0, y_1) = y_1 = q(x, y, 0, y_1)$, то диаграмма коммутативна. Покажем, что множество $\bar{p}^{-1}(x)$ ациклично и непусто для всех $x \in QP^{n-k-1}$. Заметим, что $\bar{p}^{-1}(x)$ гомеоморфно фактор-пространству произведения $F(x) \times F_1(x) \times I$ по разбиению, элементами которого служат множества $x_1 \times F_1(x) \times 0$ (с $x_1 \in F(x)$) и $F(x) \times x_2 \times 1$ (с $x_2 \in F_1(x)$) и точки множества $(F(x) \times F_1(x) \times I) \setminus [(F(x) \times F_1(x) \times 0) \cup (F(x) \times F_1(x) \times 1)]$. Полученное множество называется джойном пространств $F(x)$ и $F_1(x)$ и обозначается $F(x) * F_1(x)$. Легко проверить, что джойн ацикличного множества с компактным множеством ацикличен. Теперь из теоремы Вьеториса–Бегла следует, что в коммутативной диаграмме групп когомологий

$$\begin{array}{ccccc} H^{mn-1}(M_0) & \xleftarrow{i^*} & H^{mn-1}(M) & \xleftarrow{\bar{p}^*} & H^{mn-1}(QP^{n-k-1}) \\ \approx \uparrow q^* & & \uparrow g^* & & \\ H^{mn-1}(S) & \xleftarrow{j^*} & H^{mn-1}(G) & & \end{array}$$

$\bar{p}^*$ — изоморфизм. Но $\bar{p}i = p$ и из леммы 8.1 следует, что гомоморфизм p^* тривиален для всех $k \geq 0$. Следовательно, i^* — тривиальный гомоморфизм. В силу леммы 8.1, q^* — изоморфизм. Поэтому из коммутативности диаграммы j^* – тривиальный гомоморфизм. Следовательно, G должно содержать шар, ограниченный сферой S, т.е. центр O сферы S лежит в G. Из этого следует, что для точки $x \in QP^{n-k-1}$ существуют точки $y \in F(x)$ и $y_1 \in F_1(x)$, такие, что отрезок, соединяющий y и y_1, содержит O. Но так как $y_1 \in H(x)$ и $O \in H(x)$, то и $y \in H(x)$, т.е. $y \in F(x) \cap H(x)$. Теорема доказана.

Следствие 8.1. Пусть $QG(n-k, n-r)$ — многообразие Грассмана, состоящее из $(n-r)$-плоскостей, лежащих в $(n-k)$-плоскости $T \subset Q^n$. Для произвольной точки $x \in QG(n-k, n-r)$ пусть $H^*(x)$ —

ортогональное в метрике пространства Q^n дополнение в Q^n к плоскости, представляющей x. Пусть $F : QG(n-k, n-r) \to Q^n$ — многозначное ацикличное отображение. Тогда существует точка $x \in QG(n-k, n-r)$, такая, что $F(x) \cap H^*(x) \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть T^* — ортогональное дополнение к T в Q^n и $QG(n-k, r-k)$ — многообразие Грассмана всех r-плоскостей в Q^n, которые содержат T^*. Для всех $u \in QG(n-k, r-k)$ пусть $G(u)$ — плоскость, представляющая u, и $G^*(u)$ — ее ортогональное дополнение. Тогда $G^*(u) \cap T$ представляет элемент $x = f(u) \in Q(n-k, n-r)$. Более того, легко видеть, что

$$G(u) = H^*(f(u)). \tag{8.1}$$

Пусть $F_1(u) = F(f(u))$. Тогда F_1 — многозначное ацикличное отображение и, согласно теореме 8.1, существует точка $u \in QG(n-k, r-k)$, такая, что $F(f(u)) \cap G(u) \neq \varnothing$. Сравнивая с (8.1), получим $F(x) \cap H^*(x) \neq \varnothing$, что и требовалось доказать.

Следствие 8.2. Пусть $F : QG(n,k) \to Q^n$ — многозначное ацикличное отображение. Тогда для некоторой точки $x_0 \in QG(n,k)$ $F(x_0) \cap H(x_0) \neq \varnothing$ и для некоторой точки $x_1 \in QG(n,k)$ $F(x_1) \cap H^*(x_1) \neq \varnothing$.

Доказательство. Существование точки x_0 следует из теоремы 8.1 при $k = 0$, а точки x_1 — из следствия 8.1 при $r = n - k$.

Следствие 8.3. Пусть $F : QG(n,k) \to Q^n$ — ацикличное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $F(x) \subset H(x)$, где $H(x)$ — k-плоскость, проходящая через точку p, представляющая точку x. Тогда для некоторого x $p \in F(x)$.

Доказательство. Согласно следствию 8.2, для некоторого x $F(x) \cap H^*(x) \neq \varnothing$. Так как $F(x) \subset H(x)$, то это влечет $F(x) \cap H(x) \cap H^*(x) \neq \varnothing$ и вследствие того, что $p = H(x) \cap H^*(x)$, получаем доказательство теоремы.

Замечание 8.1. Пусть $A \subset Q^n$ — компактное подмножество и k — фиксированное целое число, $1 \leq k \leq n-1$. Пусть A_k — множество точек $p \in Q^n$, таких, что каждая k-плоскость H, проходящая через p, пересекает A по непустому ацикличному множеству. Используя следствие 8.3 для отображения $F : QG(n,k) \to Q^n, F(x) = H(x) \cap A$, видим, что $p \in A$, т.е. $A_k \subset A$.

Упражнение 8.1. Доказать гомеоморфность $QG(n,k) \simeq QG(n, n-k)$.

Упражнение 8.2. Доказать, что джойн ацикличного множества с компактным множеством ацикличен.

§ 9. Геометрические свойства сильно линейно выпуклых множеств

Определение 9.1. Множество $E \subset \mathbb{C}^n$ называется сильно линейно выпуклым, если для всякой прямой γ множества $\gamma \cap E$ и $\overset{o}{\gamma} \setminus \gamma \cap E$ связны ($\overset{o}{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$).

В дальнейшем мы сосредоточим наше внимание на сильно линейно выпуклых областях и компактах. Для них в терминах групп когомологий определение сильной линейной выпуклости сводится к требованию ацикличности их пересечений с прямыми (т.е. связности и односвязность сечений).

Легко видеть, что это определение естественно обобщает на комплексный случай понятие выпуклости в вещественном случае, которое можно сформулировать так: множество $E \subset \mathbb{R}^n$ выпукло, если его пересечение со всякой вещественной прямой связно. Следовательно, это одно из обобщений понятия выпуклости. Другое обобщение выпуклости мы уже рассмотрели в первой главе. Там упор делался на внешнем свойстве выпуклых множеств, основанном на существовании гиперплоскости, не пересекающей исходное множество. Данное определение использует внутренние свойства множества.

Приведем простейшие примеры сильно линейно выпуклых множеств.

П р и м е р 9.1. Произвольное выпуклое множество в $\mathbb{C}^n$.

П р и м е р 9.2. Произвольное связное и односвязное множество, лежащее на прямой $\lambda \subset \mathbb{C}^n$.

П р и м е р 9.3. Линейно выпуклая область со связной гладкой границей.

Ее сильно линейная выпуклость следует из леммы 7.3.

Отметим теперь важное свойство сильно линейно выпуклых компактов. Из теоремы 4.2 следует, что сечения сильно линейно выпуклого компакта гиперплоскостями ациклични. Тогда из замечания 8.1 получаем, что сильно линейно выпуклые компакты всегда линейно выпуклы.

Лемма 9.1. *Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ и $\Theta \in K$ — такой компакт, что сечения его гиперплоскостями ацикличны. Тогда:*

а) K — линейно выпуклый компакт;

б) сечения каждой компоненты множества K^* произвольной прямой связны и односвязны;

в) K^* связно;

г) проекции K^* на прямые ацикличны;

д) сечения $K = K^{**}$ прямыми ацикличны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункт а) очевидным образом следует из замечания 8.1. Докажем б). В силу теоремы 3.2,

$$H^1(K) \approx \tilde{H}_0(K^*) \tag{9.1}$$

и $H^j(K) = 0$ при $j > 1$.

Пусть l — произвольная прямая, пересекающая K^*. Тогда, согласно предложениям 2.18 и 2.19,

$$\overset{o}{l}\setminus K \approx \begin{cases} \pi_L(K), & \text{если } \Theta \in l, \\ \pi_T(K), & \text{если } \Theta \notin l. \end{cases}$$

Но тогда

$$H^1(\overset{o}{l}\setminus K) \approx \begin{cases} H^1(\pi_L(K)), & \text{если } \Theta \in l, \\ H^1(\pi_T(K)), & \text{если } \Theta \notin l. \end{cases} \tag{9.2}$$

В силу теоремы двойственности Александера,

$$H^1(\overset{o}{l}\setminus K^*) \approx \widetilde{H}_0(l \cap K^*). \tag{9.3}$$

Согласно условиям леммы, сечения K гиперплоскостями ацикличны, поэтому, по теореме Вьеториса–Бегла, π_L и π_T индуцируют изоморфизмы

$$H^1(\pi_L(K)) \approx H^1(K) \approx H^1(\pi_T(K)). \tag{9.4}$$

Следовательно, из соотношений (9.2)–(9.4) $H_0(l \cap K^*) \approx H^1(K)$. Теперь из изоморфизма (9.1) следует, что

$$\tilde{H}_0(l \cap K^*) \approx \tilde{H}_0(K^*) \quad \text{при } l \cap K^* \neq \varnothing. \tag{9.5}$$

Этот изоморфизм означает, что при сечении K^* прямой l каждая компонента множества K^* пересекается по связному множеству.

Отсюда и из предложения 2.21 следует, что сечения произвольной компоненты из K^* прямыми связны и односвязны.

Докажем в). Согласно б), предложению 2.4 и определению 9.1, каждая компонента из K^* — сильно линейно выпуклая область.

Если компонента K^* не единственна, пусть K_1^* и K_2^* — две различные компоненты K^*. Выберем точку $z \in K_2^*$. Из (9.5) видно, что произвольная прямая через точку z обязана пересекать K_1^*. Рассмотрим компакт $B = \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n \setminus K_1^*$ и проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ — множество прямых через точку $z \in K_2^*$. Все прямые через точку z имеют в $\overset{o}{\mathbb{C}}{}^n$ две точки пересечения z и ∞.

Имеем два многозначных отображения

$$F:\ \mathbb{C}P^{n-1} \to B, \quad F(l) = l \cap B,$$
$$F_1:\ \mathbb{C}P^{n-1} \to z \cup \infty, \quad F_1(l) = z \cup \infty.$$

Пусть $\Gamma(F), \Gamma(F_1)$ — графики этих отображений соответственно. Тогда $H^j(\Gamma(F)) \approx H^j(\mathbb{C}P^{n-1})$ и, согласно теореме Вьеториса–Бегла,

$$H^j[(\mathbb{C}P^{n-1}) \times (z \cup \infty)] = H^j(\mathbb{C}P^{n-1}) \oplus H^j(\mathbb{C}P^{n-1}).$$

Согласно теореме 4.3, $\tilde{H}^j(B) = 0\ \forall\, j < 2n$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F_1) & \subset & \Gamma(F) \\ {\scriptstyle q_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle q}\big\downarrow \\ z \cup \infty & \subset & B. \end{array}$$

Ей соответствует коммутативная диаграмма групп когомологий

$$\begin{array}{ccccc} H^j(\Gamma(F), \Gamma(F_1)) & \longrightarrow & H^j(\Gamma(F)) & \longrightarrow & \\ {\scriptstyle q_0^*}\big\uparrow \approx & & \big\uparrow & & \\ H^j(B, z \cup \infty) & \longrightarrow & H^j(B) & \longrightarrow & \\ & & \| & & \\ & & 0 & & \\ \to H^j(\Gamma(F_1)) & \longrightarrow & H^{j+1}(\Gamma(F), \Gamma(F_1)) & & \\ \big\uparrow & & {\scriptstyle q_0^*}\big\uparrow \approx & & \\ \to H^j(z \cup \infty) & \longrightarrow & H^{j+1}(B, z \cup \infty) \to 0, & & \end{array}$$

$q_0 : \Gamma(F)\backslash\Gamma(F_1) \to B\backslash(z\cup\infty)$ — гомеоморфизм, поэтому q_0^* — изоморфизм. Из точности нижней строки получаем $H^{j+1}(\Gamma(F),\ \Gamma(F_1)) \approx H^j(z\cup\infty) = 0$ при $0 < j < 2n-1$. Тогда в верхней строке диаграммы при $j = 2$ получим

$$0 \to H^2(\Gamma(F)) \to H^2(\Gamma(F_1)) \to 0.$$

Из точности приведенной последовательности следует изоморфизм групп, но $H^2(\Gamma(F)) \approx H^2(\mathbb{C}P^{n-1}) \approx \mathbb{Z}$, а $H^2(\Gamma(F_1)) \approx H^2(\mathbb{C}P^{n-1}) \oplus H^2(\mathbb{C}P^{n-1}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Полученное противоречие показывает связность K^*.

Докажем г). Пусть $\pi_L(K^*)$ — некоторая проекция K^* на прямую λ. В силу связности K^*, $\tilde{H}_0(\pi_L(K^*)) = 0$. Пусть $H_1(\pi_L(K^*)) \neq 0$. Выберем в области $\pi_L(K^*)$ некоторый носитель c ненулевого цикла так, чтобы он был одномерным связным полиэдром (хотя полиэдральность для доказательства несущественна). Если для $x \in c$ выберем точку $z \in \pi_L^{-1}(x) \cap K^*$, $z = (x, y)$, где $x \in \lambda$, $y \in L$ и y лежит в ортогональном в метрике $\mathbb{C}^n$ дополнении к λ, то для достаточно малой окрестности $U(x) \subset c$ точки x можно выбрать точку $z' = (x', y') \in \pi_L^{-1}(x') \cap K^*$, где $x' \in \overline{U(x)}$ так, чтобы вторая координата была постоянной $y' = y$ (это возможно в силу открытости K^*). Выберем такие вторые координаты y и окрестности $U(x)$ для каждой точки $x \in c$. В силу компактности c, можно выбрать конечный набор окрестностей $\{u(x_j)\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, покрывающий c, $z_j = (x_j, y_j)$, а, в силу полиэдральности, его можно выбрать так, чтобы попарно пересекались только те $u(x_j)$, которые имеют соседние индексы. Построим теперь некоторый компакт $c_1 \in K^*$, который проектируется на c и будет графиком некоторого ацикличного многозначного отображения $F : c \to K^*$. Над окрестностью $u(x_1)$ положим $\Gamma(F)$ совпадающим с графиком постоянного отображения $u(x_1) \to y_1$; на окрестности $u(x_2)$ зададим $\Gamma(F)$ на $u(x_2)\backslash\overline{u(x_1)}$ совпадающим с графиком постоянного отображения $u(x_2)\backslash u(x_1) \to y_2$. В точке $x = \partial u(x_1) \cap u(x_2)$ положим $F(x)$ равным объединению точек (x, y_1), (x, y_2) с некоторой жордановой дугой $\sigma \subset \pi_L^{-1}(x) \cap K^*$, соединяющей точки (x, y_1) и (x, y_2). Такая дуга существует в силу связности $\pi_L^{-1}(x) \cap K^*$. Аналогично продолжим построение $\Gamma(F)$ для всех окрестностей $u(x_j)$, $j < k$, и, наконец, в окрестности $u(x_k)\backslash(\overline{u(x_{k-1})} \cup \overline{u(x_1)})$ положим $F(x) = y_k$, а в точках $x' = \partial u(x_{k-1}) \cup u(x_k)$ и $x'' = \partial u(x_1) \cap u(x_k)$ примем $F(x') = \sigma'$, $F(x'') = \sigma''$, где σ' и σ'' — жордановы дуги, соеди-

няющие пары точек (x', y_{k-1}), (x', y_k) и (x'', y_k), (x'', y_1) в множествах $\pi_L^{-1}(x') \cap K^*$ и $\pi_L^{-1}(x'') \cap K^*$ соответственно. Очевидно, что $c_1 = \Gamma(F)$ — компакт в K^*, который ациклично проектируется на c. По теореме Вьеториса–Бегла, $H_1(c_1) \neq 0$. Пусть z_0 — точка, принадлежащая ограниченной компоненте множества $\lambda \backslash \pi_L(K^*)$. Рассмотрим множество $\pi_L^{-1}(z_0) \cup (\infty) \subset \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n \setminus K^*$, гомеоморфное сфере S^{2n-2}. Тогда очевидно, что циклы S^{2n-2} и c_1 зацеплены в $\overset{o}{\mathbb{C}}{}^n = \mathbb{C}^n \cup (\infty)$. Следовательно, $H_1(K^*) \neq 0$, что противоречит ацикличности K^*. Значит все проекции K^* на прямые ациклични.

Аналогично доказывается, что все проекции K^* на произвольное проективное пространство $\mathbb{C}P^1$, которое задается семейством гиперплоскостей, проходящих через некоторую $(n-2)$-плоскость, не пересекающую K^*, ациклични.

Докажем д). Из г) и из предложений 2.19, 2.20 и 2.22 следует, что все сечения K^{**} прямыми ациклични. Но, в силу линейной выпуклости, $K\ K^{**} = K$. Лемма доказана.

Лемма 9.2. *Многозначное отображение области $D \subset \mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$ с ацикличными некомпактными прообразами точек, каждый из которых есть сечение области D k-плоскостью, $1 \leq k \leq n-1$, индуцирует изоморфизм групп гомологий для размерностей, меньших $2n$, графика многозначного отображения и образа проекции $q : \Gamma(F) \to F(D)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область, $F : D \to \mathbb{C}^n$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение, такое, что прообраз каждой точки $y \in F(D)$ — ациклично сечение области D k-плоскостями. Покажем, что тогда

$$H_j(\Gamma(F)) \overset{q_*}{\approx} H_j(F(D)) \quad \forall\, j < 2n,$$

где q — проекция графика на $F(D)$.

1. Эпиморфность отображения q_* показывается аналогично п. 2 леммы 9.1. Если c — некоторый компактный цикл в $F(D)$, гомологичный нулю, тогда, как и в п. 2), строим его ациклично поднятие в $\Gamma(F)$ (в предыдущей лемме построение ограничивалось только размерностью 1). Выберем конечную совокупность окрестностей $\{u(x_m)\}$, покрывающую c. Сначала над окрестностью $u(x_1)$ определим многозначное отображение Φ константой y_1, а на $u(x_2) \backslash \overline{u(x_1)}$ — константой y_2 и т.д. Остается описать Φ на множествах вида

$u(x_m)\bigcap\limits_{k=1}^{m-1}\partial u(x_k)$. Если нам известно задание Φ на множествах вида $u(x_m)\bigcap\limits_{k=1}^{j}\partial u(x_k)$, покажем, как задать Φ на множествах вида $M = u(x_m)\bigcap\limits_{k=1}^{j+1}\partial u(x_k)$. Для точек $F^{-1}(x) \approx \Gamma(F)\cap q^{-1}(x)$ можно ввести, как и в п. 2, локальные координаты (x, y), где $x \in u(x_m)$, $y \in F^{-1}(x_m)$. Предположим, что A — множество вторых координат для точек $\Gamma(\Phi)$ над $u(x_m)\bigcap\limits_{k=1}^{j-1}\partial(x_k)\cap\partial u(x_{j+1})$, $A, B \subset F^{-1}(x_m)$. В силу ацикличности $F^{-1}(x_m)$, существует ацикличный компакт $\Sigma \supset A\cup B$, $\Sigma \subset F^{-1}(x_m)$. Положим $\Phi(x) = \Sigma$ в точках $x \in M$. Получим ацикличное многозначное отображение $\Phi : c \to D$. По теореме Вьеториса–Бегла, цикл $\Gamma(\Phi)$ гомологичен нулю.

2. Покажем мономорфность q_*. Пусть $c \in H_j(\Gamma(F))$, $j < 2n$, $c \nsim 0$, а $s = qc$ — гомологичный нулю цикл в $F(D)$. Пусть $\tau \subset F(D)$ — цепь, границей которой является $s, \partial\tau = s$. Для каждой точки $x \in s$ рассмотрим $q^{-1}(x)\cap c$. Такие же пересечения рассмотрим для всех точек $x' \in u(x)$ в достаточно малой окрестности точки x. Проекции множеств $q^{-1}(x')\cap c$ на плоскость $q^{-1}(x)$ лежат в пересечении $q^{-1}(x)\cap D$ для близких точек x', а поскольку это множество ациклично, то существует ацикличный компакт $k(x) \subset q^{-1}(x)\cap D$, который содержит множество $\bigcup\limits_{x'\in u(x)}\pi(q^{-1}(x')\cap c)$, где π — проекция на плоскость $q^{-1}(x)$. Теперь, аналогично п. 1, построим ацикличное многозначное отображение $\Phi : \tau \to D$ со свойством: ограничение Φ на s должно удовлетворять включениям $k(x) \subset \Phi(x)$ при $x \in s$. Легко видеть, что это достижимо. По теореме Вьеториса–Бегла, ограничение графика $\Gamma_s(\Phi) \subset \Gamma(\Phi) \subset \Gamma(F)$ задает цикл, гомологичный нулю в $\Gamma(\Phi)$. Но с другой стороны, цикл c лежит в $\Gamma_s(\Phi)$ и негомологичен нулю в $\Gamma(F)$. Полученное противоречие доказывает мономорфность q_*. Следовательно,

$$H_j(\Gamma(F)) \approx H_j(F(D)) \quad \forall\, j < 2n.$$

Лемма 9.3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — такая область, что сечения ее произвольными гиперплоскостями ацикличны. Тогда ациклично ее сечение произвольными прямыми.*

Доказательство. Рассмотрим проекцию D на произвольную прямую. Из соображений размерности очевидно, что $H_j(\pi_L(D)) = 0$ для всех $j > 1$ (так как прообразы точек при проекции — ацикличные сечения D гиперплоскостями). Покажем, что сечение области D про-

извольной $(n-2)$-плоскостью T, такой, что $T \cap D \neq \varnothing$, ациклично. Пусть $\mathbb{C}P^1$ — проективное пространство, образованное гиперплоскостями, содержащими T. Рассмотрим два, естественно возникающих многозначных отображения

$$F:\ D \to \mathbb{C}P^1, \quad F^{-1}(L) = L \cap D,$$
$$F_1:\ T \cap D \to \mathbb{C}P^1, \quad F_1^{-1}(L) = T \cap D.$$

Пусть $\Gamma(F)$ и $\Gamma(F_1)$ — графики этих отображений, а q, q_1 — соответственные их проекции на $\mathbb{C}P^1$. Согласно предыдущей лемме, $H_j(\Gamma(F)) \approx H_j(\mathbb{C}P^1)$ для всех $j < 2n$. Кроме того, по формуле Кюннета,

$$H_j(\Gamma(F_1)) = H_j(\mathbb{C}P^1 \times (T \cap D)) =$$
$$= H_0(\mathbb{C}P^1) \otimes H_j(T \cap D) \oplus H_2(\mathbb{C}P^1) \otimes H_{j-2}(T \cap D) =$$
$$= H_j(T \cap D) \oplus H_{j-2}(T \cap D).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F) & \supset & \Gamma(F_1) \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & {\scriptstyle p_1}\big\downarrow \\ D & \supset & T \cap D \end{array}$$

Ограничение $\bar{p} = p|_{(\Gamma(F)\setminus\Gamma(F_1))}$ — гомеоморфизм на $D\setminus(T \cap D)$, поэтому получаем коммутативную диаграмму групп когомологий

$$\begin{array}{ccccc} H_{j+1}(\Gamma(F)) & \longrightarrow & H_{j+1}(\Gamma(F), \Gamma(F_1)) & \longrightarrow & \\ {\scriptstyle p^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle \bar{p}^*}\big\downarrow\approx & & \\ H_{j+1}(D) & \longrightarrow & H_{j+1}(D, T \cap D) & \longrightarrow & \\ \to H_j(\Gamma(F_1)) & \longrightarrow & H_j(\Gamma(F)) & & \\ {\scriptstyle p_1^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle p^*}\big\downarrow & & \\ \to H_j(T \cap D) & \longrightarrow & H_j(D). & & \end{array}$$

Но $H_j(D) = 0$ при $j > 1$, а $\bar{p}^*$ задает изоморфизм относительных групп. Кроме того,

$$H_j(\Gamma(F)) = H_j(\mathbb{C}P^1) = 0 \quad \text{при } j > 2.$$

Поэтому из точности строк диаграммы

$$H_j(T\cap D)\approx H_{j+1}(D,T\cap D)\approx H_{j+1}(\Gamma(F),\Gamma(F_1))\approx$$
$$\approx H_j(\Gamma(F_1))=H_j(T\cap D)\oplus H_{j-2}(T\cap D).$$

Следовательно, $H_{j-2}(T\cap D)=0$ при $j>2$, т.е. $H_j(T\cap D)=0$ при $j>0$.

Поэтому $H_j(\Gamma(F),\Gamma(F_1))\approx H_j(D,T\cap D)=0$ при $j>1$.

Теперь

$$H_2(\Gamma(F))\approx H_2(\mathbb{C}P^1)\approx\mathbb{Z}\approx H_2(\Gamma(F_1))\approx$$
$$\approx H_2(T\cap D)=H_0(T\cap D)\oplus H_2(T\cap D)=H_0(T\cap D),$$

т.е. $\tilde{H}_0(T\cap D)=0$. Таким образом, сечение области D плоскостью T ациклично. В силу произвольности выбора T, лемма доказана для $(n-2)$-плоскостей. Продолжая последовательно понижать размерность, переходя к сечениям, получим ацикличность сечений для произвольных k-плоскостей, $1\le k<n-1$.

Теорема 9.1. *Для сильно линейной выпуклости области (компакта) необходимо и достаточно чтобы все сечения этой области (компакта) k-плоскостями для фиксированного k, $1\le k\le n-1$, были ацикличны.*

Необходимость теоремы следует из определения 9.1 и теорем 4.2 и 4.3. Достаточность ее для областей следует из леммы 9.3, а для компактов — из леммы 9.1.

Следствие 9.1. Сопряженное множество к сильно линейной выпуклой области (компакту), содержащей начало координат, будет сильно линейно выпуклым компактом (областью).

Это следствие для компактов вытекает из леммы 9.1, так как образы проекций сильно линейно выпуклого компакта на прямые ациклични, а они, в силу предложения 2.19, гомеоморфны дополнениям к сечению сопряженной области $D=K^*$ прямыми, проходящими через начало координат. Чтобы исчерпать все прямые, пересекающие D, необходимо доказать аналог леммы 9.1 для проекции K на проективное пространство $\mathbb{C}P^1$, который доказывается аналогично.

Для областей следствие вытекает из леммы 9.2, которая дает ацикличность образа проекций области на прямые; дальше продолжим те же рассуждения, что и для компактов.

Следствие 9.2. Образы при проекции сильно линейно выпуклых областей (компактов) также сильно линейно выпуклы.

Очевидным образом оно следует из предложений 2.19, 2.20.

Теорема 9.2. *Сильно линейно выпуклая область $D \subset \mathbb{C}^n$ линейно выпукла.*

Доказательство проведем по индукции. Покажем сначала, что если произвольная гиперплоскость, содержащая точку z^0, пересекает D по ацикличному множеству, то и произвольная $(n-2)$-плоскость, содержащая точку z^0, также пересекает D. Пусть T — $(n-2)$-плоскость через точку z^0, не пересекающая D. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{C}P^1$ гиперплоскостей, содержащих T. Отсюда, как и в предыдущих результатах, используя теорему Вьеториса–Бегла, получаем изоморфизм

$$H_2(D) \approx H_2(\mathbb{C}P^1) \neq 0,$$

который противоречит ацикличности D. Продолжая по индукции понижать размерность, получаем на $(n-2)$-м шагу, что каждая прямая через точку z^0 пересекает D, и, аналогично предыдущему, имеем для проективного пространства $\mathbb{C}P^1$ (множества прямых через точку z^0) изоморфизм

$$H_j(D) \approx H_j(\mathbb{C}P^{n-1}),$$

что также противоречит ацикличности D. Следовательно, если $z^0 \notin D$, то существует гиперплоскость $L \ni z^0$, $L \cap D = \varnothing$. Теорема доказана.

Из предложения 2.18 легко следует утверждение.

Предложение 9.1. *Пусть $\{D_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — расширяющее семейство линейно упорядоченных по включению сильно линейно выпуклых областей $D_\alpha \subset \mathbb{C}^n$. Тогда $D = \bigcup\limits_{\alpha\in A} D_\alpha$ — сильно линейно выпуклая область.*

Из определения 9.1 также легко следует предложение.

Предложение 9.2. *Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство линейно упорядоченных по включению сильно линейно выпуклых множеств $E_\alpha \subset \mathbb{C}^n$. Тогда множества $E = \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ и $E' = \bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ также сильно линейно выпуклы.*

Упражнение 9.1. Доказать, что если $K \subset \mathbb{C}^n$ — такой компакт, что пересечение его с гиперплоскостями ациклично, за исключением некоторого нульмерного множества гиперплоскостей, то имеет место один из случаев:

1) K — сильно линейно выпуклый компакт;

2) $n = 2$ и а) K состоит из нульмерного множества точек или б) K — подмножество прямой.

Дальше изучим, как ситуация, разобранная в начале параграфа, реализуется в вещественном случае.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Оболочкой E_1 множества E назовем множество всех точек отрезков $[a, b]$, где $a, b \in E$. Оболочку E_m определим по индукции $E_m = (E_{m-1})_1$. Согласно известной теореме Каратеодори [137], выпуклая оболочка множества $E \subset R^n$ включается в E_n. В § 24 мы рассмотрим некоторые варианты этой теоремы.

Лемма 9.4. *Если некоторая вещественная k-плоскость L пересекает оболочку K_1 по несвязному множеству, то существует вещественная k-плоскость, пересекающая компакт K по несвязному множеству.*

Доказательство. Пусть точки a, b принадлежат разным компонентам сечения $L \cap K_1$. Предположим, что одна из точек $a \notin K$, иначе лемма доказана. Тогда $a = \alpha c + \beta d$, где $c, d \in K$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Зафиксируем вещественную $(k-1)$-плоскость $L' \subset L$, $b \in L'$, $a \in L'$. Проведем вещественную k-плоскость L_1 через плоскость L' и точку c. Легко убедиться, что сечение $K_1 \cap L_1$ несвязно и точки a и c лежат в разных компонентах сечения. Повторяя, если нужно, процедуру для точки b, получим искомую k-плоскость.

Лемма 9.5. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и предположим, что некоторая вещественная k-плоскость пересекает оболочку K_1, при $k \geq 1$, но не пересекает K. Тогда существует вещественная k-плоскость T, такая, что $K \cap T$ несвязно.*

Доказательство. Пусть точки $a, b \in K$, точка c принадлежит отрезку $[a, b]$ и существует вещественная k-плоскость Λ, такая, что $\Lambda \cap [a, b] = c$ и $\Lambda \cap K = \varnothing$. Пусть Λ_1 — вещественная $(k+1)$-плоскость, $\Lambda_1 \supset \Lambda \cup [a, b]$. Тогда Λ разделяет в Λ_1 точки a и b. Теперь пусть T — вещественная k-плоскость в Λ_1, содержащая точки a и b, тогда, очевидно, $T \cap K$ несвязно.

Следствие 9.3. Если некоторая вещественная k-плоскость пересекает выпуклую оболочку K и не пересекает K, то существует вещественная k-плоскость, пересекающая K по несвязному множеству.

Доказательство. Если вещественная k-плоскость L не пересекает K и пересекает его выпуклую оболочку, то найдем число m, $1 \leq m < n$, такое, что L не пересекает оболочку K_m, но пересекает оболочку K_{m+1}. Последовательно применяя к оболочке

K_{m+1} лемму 9.5, а потом лемму 9.4 (последнюю можно несколько раз), убеждаемся в справедливости следствия.

Теорема 9.3. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, и предположим, что для некоторого $k \geq 1$ пересечение каждой вещественной k-плоскости с K пусто или ациклично. Тогда K — выпуклый компакт.*

Доказательство. Пусть компакт K удовлетворяет условиям теоремы и $\operatorname{conv} K$ — его выпуклая оболочка. Пусть точка $x \in \operatorname{conv} K$. Согласно следствию 9.3, каждая вещественная k-плоскость через точку x пересекает K. Следовательно, такое пересечение ациклично и из замечения 8.1 следует, что $x \in K$, т.е. $K = \operatorname{conv} K$. Это доказывает теорему.

Теорема 9.4. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество и точка $p \in \operatorname{int} E$. Тогда существует последовательность плоскостей $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$, таких, что H_i — вещественная i-плоскость, $H_i \subset H_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-2$, и p есть центром тяжести множества $E \cap H_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.*

Доказательство. Для каждой вещественной k-плоскости H обозначим $x(H)$ — центр тяжести множества $H \cap E$. Тогда $x(H) : \mathbb{R}G(n,k) \to \mathbb{R}^n$ — однозначное сечение многозначного отображения $H : \mathbb{R}G(n,k) \to \mathbb{R}^n$, ставящего в соответствие точке x k-плоскость, проходящую через точки x и p. Тогда из следствия 8.3 следует, что для некоторой плоскости H $x(H) = p$, так как выполнены включения $x(H) = H(x)$. Чтобы доказать теорему, начнем с $k = n-1$ и выделим гиперплоскость H_{n-1}, такую, что $x(H_{(n-1)}) = p$. Теперь в выпуклом множестве $E \cap H_{n-1}$ ($p \in \operatorname{int}(E \cap H_{n-1})$) найдем плоскость H_{n-2} и т.д., пока не выделим всю последовательность плоскостей.

Упражнение 9.2. Обобщить следствие 4.3 на случай сечений вещественно k-мерными плоскостями. А именно, если сечение компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ вещественно k-мерными плоскостями, $1 \leq k \leq n-1$, проходящими через точку $a \in K$, ацикличны, то K – звездный относительно точки a компакт.

Теорема 9.5. *Пусть M — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$:*

а) $H^{n-1}(M) = \mathbb{Z}$ и M есть неприводимый носитель ненулевого элемента α из $H^{n-1}(M)$;

б) существует целое число k, $0 < k < n-1$, такое, что для каждой вещественной k-плоскости T, пересекающей M,

$$H^i(T \cap M) = \begin{cases} 0 & \text{для } i < k-1, \\ 0 \text{ или } \mathbb{Z} & \text{для } i = k-1. \end{cases}$$

Тогда M есть выпуклая сфера S^{n-1}.

Доказательство. Хорошо известно, что из а) следует, что M разбивает $\mathbb{R}^n$ на две компоненты и является границей каждой из них. Пусть G будет ограниченной компонентой $\mathbb{R}^n \backslash M$ и $M^* = M \cup G$. Отсюда получаем: α) M^* — компакт и $M = \partial M^*$.

Пусть $p \in G$ и T — вещественная k-плоскость, проходящая через p. Докажем, что β) $T \cap M^*$ ациклично.

Поскольку $T \cap M^* = (T \cap M) \cup (T \cap G)$ и $T \cap G \neq \varnothing$, отсюда следует, что $T \cap M$ разбивает T. Теперь согласно б)

$$H^i(T \cap M) = \begin{cases} 0 & \text{для } i < k-1, \\ \mathbb{Z} & \text{для } i = k-1. \end{cases} \tag{9.6}$$

Следовательно, $T \backslash M$ имеет в точности две компоненты; через H обозначим ограниченную компоненту. Тогда $p \in H$ и $T \cap G = H$. Таким образом, мы доказали

γ) $T \cap M^*$ есть объединение $T \cap M$ и ограниченной компоненты H множества $T \backslash T \cap M$. Теперь из этого следует, что $\partial(T \cap M^*) \subset T \cap M$, и можно рассмотреть последовательность

$$H^m(T \cap M^*) \xrightarrow{j^*} H^m(T \cap M) \xrightarrow{i^*} H^m(\partial(T \cap M^*)),$$

где гомоморфизмы j^* и i^* индуцированы вложениями. Ниже (лемма 10.3) докажем, что $i^* j^*$ — мономорфизм, а теперь воспользуемся этим фактом. Из мономорфности $i^* j^*$ следует мономорфность j^*. В свою очередь, из этого и (9.6) получаем

$$H^m(T \cap M^*) = 0 \quad \text{для } m < k-1.$$

Поскольку из γ) следует, что $T \cap M^*$ не разбивает T, то $H^{k-1}(T \cap M^*) = 0$, что завершает доказательство β).

Из упражнения 9.2 следует, что M^* — звездный относительно каждой точки G компакт. Пусть $p \in M$ и $x \in M^*$. Пусть $\{p_n\} \subset G$ —

последовательность точек, сходящихся к p. Согласно сказанному, отрезки $p_n x$ лежат в M^*. А поскольку $p_n x$ сходятся к отрезку px, то $p^* \subset M^*$ и, следовательно, M^* — звездный относительно всех точек компакт. Это вместе с α) доказывает теорему.

§ 10. Множества, для которых все компоненты сопряженного множества сильно линейно выпуклы

Пусть $z^0 \in \mathbb{C}^n \backslash E$, $\Theta \in E$. Обозначим $\Gamma(z^0)$ — множество точек $w, w \in \mathbb{C}^n$, таких, что гиперплоскость $\{z|\langle w, z\rangle = 1\}$ проходит через z^0 и не пересекает E. В [2] была высказана гипотеза, что ограниченная линейно выпуклая область D, $\Theta \in D$, тогда и только тогда будет сильно линейно выпуклой, когда множества $\Gamma(z)$ связны для всех $z \in \partial D$. Скажем, что гиперплоскость L касается множества E, если $L \cap \bar{E} \subset \partial E$, $L \cap \bar{E} \neq \varnothing$.

В настоящем параграфе будет доказана теорема о компонентах сопряженного множества для компакта K, все касательные гиперплоскости к которому пересекают K по связному множеству. Из этой теоремы будет получено положительное решение приведенной выше гипотезы.

Доказательству основных результатов параграфа предпошлем доказательства ряда вспомогательных лемм при более общих предположениях, чем нам нужно для доказательства теорем. Это вызвано тем, что леммы представляют самостоятельный интерес и характеризуют свойства компактов в евклидовых пространствах и их отображений.

Лемма 10.1. *Если K — несвязный линейно выпуклый компакт, то для произвольной его компоненты K_0 найдется гиперплоскость, касающаяся одновременно K_0 и $K\backslash K_0$.*

Доказательство. 1. Покажем сначала, что для произвольной компоненты $K_0 \subset K$ найдется проекция на прямую, такая, что $\pi(\partial K_0) \cap \partial\pi(K) \neq \varnothing$ ($\pi(A)$ — образ множества A при проекции). Точнее, для произвольной точки $x \in \partial K_0$ существует проекция на некоторую прямую, такая, что $\pi(x) \in \partial\pi(K)$.

Так как K — линейно выпуклый компакт, то в произвольной окрестности точки x можно найти гиперплоскость L, не пересека-

ющуюся с K. Спроектируем K на прямую, ортогональную в метрике $\mathbb{C}^n$ к L. Очевидно, что $\pi(L) \notin \pi(K)$.

Множество всех проекций на прямые компактно и задает проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$. Следовательно, последовательности гиперплоскостей в окрестности точки x соответствует последовательность точек $\mathbb{C}P^{n-1}$ (проекций вдоль этих гиперплоскостей). Выберем из нее сходящуюся подпоследовательность. Очевидно, что предельной точке соответствует направление проекции, при которой $\pi(x) \in \partial\pi(K)$.

2. Если для некоторой проекции $\mathbb{C}^n$ на прямую $\pi(K\backslash K_0) \cap \pi(K_0) = \varnothing$, то очевидно, что существует проекция π_1, на другую прямую, такая, что $\pi_1(K\backslash K_0) \cap \pi_1(K_0) \neq \varnothing$. Соединим в множестве проекций $\mathbb{C}P^{n-1}$ точки, соответствующие проекциям π и π_1, произвольным непрерывным путем. Очевидно, что существует точка, принадлежащая этому пути и задающая проекцию π_2, для которой $\pi_2(K\backslash K_0) \cap \pi_2(K_0) \neq \varnothing$ и кроме того,

$$\operatorname{int} \pi_2(K\backslash K_0) \not\supset \pi_2(K_0) \tag{10.1}$$

и

$$\operatorname{int} \pi_2(K_0) \not\supset \pi_2(K\backslash K_0), \tag{10.2}$$

т.е. существует точка $y \in \partial\pi_2(K\backslash K_0) \cap \partial\pi_2(K_0)$. Поэтому гиперплоскость $\pi_2^{-1}(y)$ касается K_0 и $K\backslash K_0$.

3. Пусть для всех проекций на аналитические прямые

$$\pi(K\backslash K_0) \cap \pi(K_0) \neq \varnothing. \tag{10.3}$$

Если для некоторой проекции выполнены одновременно условия (10.1) и (10.2), то, как мы уже видели в п. 2, лемма справедлива.

Пусть теперь условие (10.3) имеет место, но ни для какой проекции не выполняется одновременно (10.1) и (10.2). Согласно доказанному в п. 1, существует проекция π_1 для которой выполнено условие (10.1) и аналогичным образом существует проекция π_2, для которой выполнено условие (10.2). Проекциям π_1 и π_2 соответствуют две точки в $\mathbb{C}P^{n-1}$. По предположению, для проекции π_1 справедливо включение

$$\operatorname{int} \pi_1(K_0) \not\supset \pi_1(K\backslash K_0). \tag{10.4}$$

Множество проекций, удовлетворяющих условию (10.4), открыто в $\mathbb{C}P^{n-1}$. Аналогично для проекции π_2

$$\operatorname{int} \pi_2(K\backslash K_0) \not\supset \pi_2(K_0). \tag{10.5}$$

Множество проекций, удовлетворяющих условию (10.5), тоже открыто в $\mathbb{C}P^{n-1}$. Согласно предположениям, сделанным в этом пункте, для каждой точки из $\mathbb{C}P^{n-1}$ выполняется одно из условий (10.4) и (10.5), но очевидно, что для произвольной точки может выполняться только одно из условий (10.4) или (10.5) в силу компактности K_0 и $K\backslash K_0$. Следовательно, связное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ представлено как объединение двух открытых непересекающихся непустых множеств. Из полученного противоречия следует, что найдется проекция π, для которой выполнены одновременно оба условия (10.1) и (10.2). Но тогда согласно п. 2 существует гиперплоскость, касающаяся как K_0 так и $K\backslash K_0$. Лемма доказана.

Следствие 10.1. Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — произвольный компакт и существует проекция K на прямую, такая, что образ K при этой проекции несвязен, то найдется гиперплоскость, касающаяся по меньшей мере двух компонент из K.

Доказательство аналогично п. 2 леммы 10.1.

Определение 10.1. Отображение называется монотонным, если прообраз каждой точки, принадлежащей образу, связен.

Лемма 10.2. *Если f — монотонное отображение компакта K, то индуцированный гомоморфизм групп когомологий*

$$f^* : \ H^1(f(K)) \to H^1(K)$$

является мономорфизмом.

Лемма представляет собой частный случай теоремы Скляренко (см. [200], теорема 1).

Лемма 10.3. *Пусть D — ограниченная область в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда для произвольного $j \geq 0$ в точной последовательности групп когомологий*

$$H^j(\bar{D}, \partial D) \to H^j(\bar{D}) \xrightarrow{\tau^*} H^j(\partial D) \to H^{j+1}(\bar{D}, \partial D)$$

τ^* — мономорфизм.

Доказательство. Из теоремы двойственности Александера имеем изоморфизмы

$$D^* : \ H^j(\bar{D}) \approx \tilde{H}_{n-j-1}(\mathbb{R}^n\backslash\bar{D}),$$
$$D^* : \ H^j(\partial D) \approx \tilde{H}_{n-j-1}(\mathbb{R}^n\backslash\partial D) \approx \tilde{H}_{n-j-1}(\mathbb{R}^n\backslash\bar{D}) \oplus \tilde{H}_{n-j-1}(\bar{D}, \partial D)$$

и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^j(\bar{D}) & \xrightarrow{\tau^*} & H^j(\partial D) \\ {\scriptstyle D^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D^*} \\ H_{n-j-1}(\mathbb{R}^n\backslash\bar{D}) & \xrightarrow{\tau^1_*} & \tilde{H}_{n-j-1}(\mathbb{R}^n\backslash\partial D) \end{array}$$

коммутативна в силу компактности пары $(\bar{D}, \partial D)$.

Вложение $\tau : \partial D \to \bar{D}$ задает вложение дополнений $\tau^1 : \mathbb{R}^n\backslash\bar{D} \to \mathbb{R}^n\backslash\partial D$. Следовательно, индуцированный гомоморфизм $\tau^1_* = D^*\tau^* D^{*-1}$ задает вложение

$$\tau^1_* : \tilde{H}_{n-j-1}(\mathbb{R}^n\backslash\bar{D}) \to \tilde{H}_{n-j-1}(\mathbb{R}^n\backslash\partial D)$$

и является мономорфизмом. Но тогда и $\tau^* = D^{*-1}\tau^1_* D^*$ — мономорфизм.

Теорема 10.1. *Если K, $\Theta \in K$, такой компакт, что все сечения K касательными гиперплоскостями связны, то каждая связная компонента множества K^* будет сильно линейно выпуклой областью.*

Доказательство. Для проекции K на прямую прообразом произвольной точки $y \in \pi(K)$ будет сечение K гиперплоскостью $\pi^{-1}(y)$, которая при проектировании $\mathbb{C}^n$ переходит в точку y. Согласно наложенным условиям прообразы точек из $\partial\pi(K)$ связны. Кроме этого, следствие 10.1 обеспечивает связность $\pi(K)$. Предположим, что $H^1(\pi(K)) \neq 0$. Тогда по лемме 10.2 $\tau^* : H^1(\pi(K)) \to H^1(\partial\pi(K))$ — мономорфизм, а согласно лемме 10.3 $\pi_1^* : H^1(\partial\pi(K)) \to H^1(\pi^{-1}(\partial\pi(K) \cap K))$ — мономорфизм в силу связности прообразов точек из $\partial\pi(K)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\partial\pi(K) \cap K) & \subset & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial\pi(K) & \overset{\tau}{\subset} & \pi(K). \end{array}$$

Ей соответствует коммутативная диаграмма групп когомологий

$$\begin{array}{ccc} H^1(\pi(K)) & \xrightarrow{\tau^*} & H^1(\partial\pi(K)) \\ {\scriptstyle \pi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1^*} \\ H^1(K) & \longrightarrow & H^1(\pi^{-1}(\partial\pi(K)\cap K)). \end{array}$$

В силу коммутативности диаграммы и мономорфности суперпозиции $\pi_1^*\tau^*$, π^* — мономорфизм.

Каждому коциклу $c \in H^1(\pi(K))$ в силу двойственности Александера соответствует двойственный цикл в $\tilde{H}_0(\overset{o}{\mathbb{C}}\setminus\pi(K))$, где $\overset{o}{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\infty$. Соответственно паре точек (x,∞) (x лежит в некоторой ограниченной компоненте множества $\overset{o}{\mathbb{C}}\setminus\pi(K)$) — циклу в $\tilde{H}_0(\overset{o}{\mathbb{C}}\setminus\pi(K))$ взаимнооднозначно соответствует двойственный коцикл в $H^1(\pi(K))$. Для произвольной точки $x \in \overset{o}{\mathbb{C}}\setminus\pi(K)$ рассмотрим гиперплоскость $\pi^{-1}(x)$ и $(2n-2)$-мерный цикл $\pi^{-1}(x)\cup\infty = S^{2n-2}$ (гомеоморфный $(2n-2)$-мерной сфере).

Пусть (x,∞) и (x_1,∞) — два цикла, двойственные не когомологичным между собой на $\pi(K)$ коциклам c и c_1. Тогда в силу мономорфности π^* циклы S^{2n-2} и S_1^{2n-2}, двойственные не когомологичным между собой на K коциклам $\pi^*(c)$ и $\pi^*(c_1)$ соответственно, не гомологичны между собой в $\overset{o}{\mathbb{C}}{}^n\setminus K$, где $\overset{o}{\mathbb{C}}{}^n = \mathbb{C}^n \cup \infty$. Во-первых, это значит, что множество K^* несвязно, так как точки в K, задающие гиперплоскости $\pi^{-1}(x)$ и $\pi^{-1}(x_1)$, согласно замечанию 3.2 должны лежать в различных компонентах связности K^*. Во-вторых, проекции π на прямую согласно предложению 2.19 соответствует некоторое сечение открытого множества K^* прямой l, проходящей через начало координат, и имеет место гомеоморфизм $\overset{o}{\mathbb{C}}\setminus\pi(K) \approx l \cap K^*$. Поскольку, как было видно выше, точки в разных ограниченных компонентах $\overset{o}{\mathbb{C}}\setminus\pi(K)$ задают негомологичные друг другу в $\overset{o}{\mathbb{C}}{}^n\setminus K$ циклы S^{2n-2} и S_1^{2n-2}, то это значит, что разные компоненты сечения $l \cap K^*$ принадлежат разным компонентам множества K^*. Если l — прямая, не проходящая через начало координат, то согласно предложению 2.20 $l\cap K^*$ гомеоморфно соответствует множество $\mathbb{C}P^1\setminus\pi_1(K)$, где $\mathbb{C}P^1$ — проективное пространство, образованное множеством гиперплоскостей $A = \{w \,|\, \langle w,z\rangle = 1,\ z \in l\}$ и гиперплоскостью L, со-

держащей начало координат и общую для семейства A $(n-2)$-плоскость T, π_1 — проекция на это пространство. Другими словами, $\mathbb{C}P^1$ — множество гиперплоскостей, содержащих $(n-2)$-плоскость T, $T \cap K = \varnothing$.

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что π_1 индуцирует мономорфизм $\pi_1^* : H^1(\pi_1(K)) \to H^1(K)$ и что разные компоненты сечения $l \cap K^*$ принадлежат разным компонентам множества K^*. Это значит, что сечения произвольной компоненты множества K^* прямыми связны. В силу связности K, из предложения 2.21, следует, что все сечения множества K^* прямыми односвязны. Поэтому для произвольной компоненты множества K^* сечения ее прямыми связны и односвязны. Но тогда согласно определению 9.1 каждая компонента множества K^* есть сильно линейно выпуклая область.

Следствие 10.2. Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — связный компакт, лежащий на прямой, то:

1) $H^1(K) \approx \tilde{H}_0(K^*)$;

2) каждая компонента множества K^* есть сильно линейно выпуклая область.

Первое утверждение показано в 3.1. Второе следует из теоремы 10.1, так как произвольная прямая, не совпадающая с содержащей K, может пересекать K не более чем по одной точке. Это следствие уточняет утверждение 3.11 тем, что показывает структуру сопряженного множества.

Перейдем к рассмотрению гипотезы, процитированной в начале параграфа. Сначала найдем описание множества $\Gamma(z^0)$ с помощью сопряженного множества D^{**}. Очевидно, что для того чтобы гиперплоскость $\{z \,|\, \langle w^0, z\rangle = 1\}$ проходила через точку z^0, необходимо и достаточно, чтобы $\langle w^0, z^0\rangle = 1$. Следовательно, множество точек, задающих гиперплоскости, содержащие точку w, заполняет гиперплоскость $\{w \,|\, \langle w, z^0\rangle = 1\}$. С другой стороны, из предложения 2.23 известно, что для ограниченной области D, точка $\Theta \in D$, принадлежит границе ∂D^* компакта D^* тогда и только тогда, когда гиперплоскость $\{z|\langle w^0, z\rangle = 1\}$ проходит через какую-нибудь точку границы D^*, но не пересекает области D. Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Предложение 10.1. *Множество $\Gamma(z^0)$, $z^0 \in \partial D$, в точности совпадает с пересечением гиперплоскости $\{w \,|\, \langle w, z^0\rangle = 1\}$ с границей ∂D^*.*

Предложение 10.2. *Пересечение компакта D^* с касательной плоскостью будет множеством $\Gamma(z^0)$ для некоторой точки $z^0 \in \partial D$.*

Заметим, что множества $\Gamma(z^0)$ и $\Gamma(z^1)$ для пары разных точек могут, вообще говоря, совпадать.

Теорема 10.2. *Ограниченная область D, $\Theta \in D$, является сильно линейно выпуклой тогда и только тогда, когда множества $\Gamma(z)$ непусты и связны для всех точек $z \in \partial D$.*

Доказательство. Необходимость теоремы очевидна в силу предложения 10.1 и сильной линейной выпуклости компакта D^*. Покажем ее достаточность. Рассмотрим компакт D^*. Согласно следствию 2.1, он линейно выпуклый. Следовательно, множество $\mathbb{C}^n \backslash D^*$ связно. Легко видеть, что для компакта $K = D^*$ выполнены все условия теоремы 10.1, потому что сечения K касательными гиперплоскостями связны ввиду предложения 10.2. Согласно теореме 10.1, каждая компонента множества D^* есть сильно линейно выпуклая область.

Легко проверить, что если множество $\Gamma(z)$ непусто для каждой точки $z \in \partial D$, то область D будет одной из компонент линейно выпуклого множества D^{**}. Но тогда, согласно следствию 9.1, $K = D^*$ — сильно линейно выпуклый компакт и $D^{**} = D$.

Теорема доказана.

Эта теорема дает нам еще один геометрический критерий сильной линейной выпуклости области.

Следствие 10.3. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклая область, $n > 1$, такая, что каждая точка $z \in \partial D$ принадлежит только одной касательной гиперплоскости. Тогда D есть сильно линейно выпуклая область.

Похожие на теоремы 10.1 и 10.2 результаты можно установить и в случае областей.

Теорема 10.3. *Если $D \subset \mathbb{C}^n$, $\Theta \in D$, — область, для которой все сечения D гиперплоскостями связны, то каждая компонента множества D^* есть сильно линейно выпуклый компакт.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 10.1. Также аналогично лемме 10.1 можно доказать следующее утверждение.

Предложение 10.3. *Если E — несвязное линейно выпуклое открытое множество, то для произвольной его компоненты D_0 найдется гиперплоскость, касающаяся D_0 и $E\backslash D_0$ одновременно.*

Теорема 10.4. *Компакт K, $\Theta \in K$, является сильно линейно выпуклым тогда и только тогда, когда множества $\Gamma(z)$ непусты и связны для произвольной точки $z \in \mathbb{C}^n \backslash K$.*

Доказательство аналогично теореме 10.2.

Предложение 10.4. *Если D — сильно линейно выпуклая область, то сечения $\bar{D}$ прямыми связны.*

Доказательство. Если $\gamma \cap \bar{D}$ — некоторое сечение области $\bar{D}$ прямой γ несвязно, то выберем пару точек a, b в разных компонентах сечения $\gamma \cap \bar{D}$. Пусть $\{\alpha_m\}$, $\{\beta_m\} \subset D$ — последовательности точек, сходящиеся к a, b соответственно. Через каждую пару точек α_m, β_m проведем прямую γ_m, которая пересекает D по ацикличному открытому множеству $D \cap \gamma_m$ в силу сильной линейной выпуклости D. Соединим внутри множества $D \cap \gamma_m$ точки α_m и β_m континуумами σ_m. Из последовательности $\{\sigma_m\}$ континуумов выделим сходящуюся подпоследовательность $\{\sigma_j\}$, которая в пределе даст континуум σ, лежащий в $\gamma \cap \bar{D}$ и соединяющий точки a, b.

Предложение 10.5. *Если K — сильно линейно выпуклый компакт, то* $\operatorname{int} K$ *состоит из сильно линейно выпуклых областей.*

Доказательство. Согласно следствию 9.1 $D = K^*$ — сильно линейно выпуклая область. Из предложения 10.4 следует, что произвольное сечение $\bar{D}$ прямой, в том числе и касательной, связно. Тогда из теоремы 10.1 следует, что $(\bar{D})^*$ состоит из сильно линейно выпуклых компонент. Но в силу непрерывности отображения Φ в конечных точках (см. § 2) $\Phi(\bar{D}) = \overline{\Phi(D)}$, при $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, $\Theta \in \operatorname{int} K$ (последнего легко добиться линейным сдвигом) и поэтому

$$(\bar{D})^* = \mathbb{C}^n \backslash \Phi(\bar{D}) = \mathbb{C}^n \backslash \overline{\Phi(D)} = \mathbb{C}^n \backslash (\overline{\mathbb{C}^n \backslash \bar{D}^*}) =$$
$$= \mathbb{C}^n \backslash (\overline{\mathbb{C}^n \backslash K^{**}}) = \mathbb{C}^n \backslash (\overline{\mathbb{C}^n \backslash K}) = \operatorname{int} K.$$

Если же $\operatorname{int} K = \varnothing$, утверждение тривиально.

Пример 10.1. Пусть K — объединение двух кругов, $K = \{z \,|\, (|z - i| \leq 1) \vee (|z + i| \leq 1)\} \subset \mathbb{C}$. Очевидно, что K — сильно линейно выпуклый компакт. Кроме того, имеем, что $\operatorname{int} K$ несвязно (рис. 3).

Пример 10.2. Пусть $A = \{z = (z_1, z_2) \,|\, |z| \leq 1,\ \operatorname{Im} z_2 \geq 0\}$ — полушар, а $B = \{z = (z_1, z_2) \,|\, |z_2 - i| \leq 1\}$ — открытый неограниченный цилиндр в $\mathbb{C}^2$. Рассмотрим компакт $K = A \backslash B$. Любое сечение компакта K прямой, отличной от $z_2 = \text{const}$, имеет вид пересечения двух множеств: 1) полупрямой $\operatorname{Im} z_2 \geq 0$ с выброшенным шаром



Рис. 3.

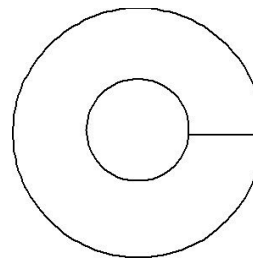


Рис. 4.

$|z_2 - i| < 1$ и 2) шара радиуса не больше 1; причем, если шар полностью лежит в полуплоскости $\operatorname{Im} z_2 \geq 0$, то радиус его меньше 1. Такие сечения ацикличны. Сечения компакта K прямыми $z_2 = \text{const}$ есть круги или пустые множества. Поэтому K — сильно линейно выпуклый компакт. Очевидно, что $\operatorname{int} K$ состоит из двух компонент.

Замечание 10.1. Заметим, что равенство $(\bar{D})^* = \operatorname{int} D^*$, использованное в доказательстве предложения 10.5, справедливо для любых ограниченных (не только сильно линейно выпуклых) областей, но для неограниченных областей оно может нарушаться.

Пусть $D = D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, $n > 1$, где D_1 — плоская область. Тогда $D^* \approx \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus D_1 \subset \mathbb{C}$, а $(\bar{D})^* \approx \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}_1 \subset \mathbb{C}$ и, следовательно, $(\bar{D})^* \neq \operatorname{int} D^* = \varnothing$.

П р и м е р 10.3. Пусть $D = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, 1 < |z_1| < 2,\ z_1 \notin [1, 2]\}$. Легко проверить, что D — сильно линейно выпуклая область, а $\bar{D} = \{z \,|\, 1 \leq |z_1| \leq 2\}$ — уже не сильно линейно выпуклая область (рис. 4).

Пусть K_1 и K_2 — компакты, полученные из приведенных в примерах 10.1 и 10.2 соответственно таким сдвигом, чтобы начало координат лежало во внутренностях K_1 и K_2. Сопряженные области к

компактам K_1 и K_2 дают такие примеры сильно линейно выпуклых областей, замыкания которых будут сопряженными множествами к несвязным линейно выпуклым открытым множествам. Следовательно, согласно следствиям 2.1 и 9.1, они будут линейно выпуклыми, но не сильно линейно выпуклыми замкнутыми множествами. Отметим, что $(\operatorname{int} K_2)^*$ будет компактом.

Неизвестно, всегда ли замыкание сильно линейно выпуклой области будет линейно выпуклым множеством?

По аналогии с кругом

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

радиуса r с центром в точке a будем для вектора $w \in \mathbb{C}^n$ обозначать через

$$U_w(a) = \{tw + a : t \in B_1(0)\} \in \mathbb{C}^n$$

диск вдоль w с центром в точке a.

П р и м е р 10.4. Обозначим

$$A = U_1(0) \setminus \left(\bigcup_{w^4=-1} U_{1/2}(w) \right) \setminus \{x + iy : |x| < 1/2, y \neq 0\} \in \mathbb{C},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq 1\}, \quad K = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in B : z_1 \in A\}.$$

Сечение компакта K произвольной прямой изоморфно пересечению A с замкнутым кругом, который полностью лежит в единичном круге. Легко видеть, что такое пересечение всегда ациклично, поэтому K — сильно линейно выпуклый компакт. Точки $(\pm 0, 9; 0)$ лежат в различных связных компонентах замыкания внутренности K. Это пример сильно линейно выпуклого компакта, замыкание внутренности которого несвязно.

П р и м е р 10.5. Рассмотрим сопряженное множество $D = K^*$ к компакту из примера 10.4. Получим сильно линейно выпуклую область, проекция которой на первую координату совпадает с дополнением к образу инверсии — $1/z$, примененной к компакту A в $\mathbb{C}$. Внутренность замыкания этой области содержит окружность

$$\{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1 - 10| = 10\},$$

но не пересекает гиперплоскости $\{z : z_1 = 1\}$, зацепленной с этой окружностью. Это пример сильно линейно выпуклой области, внутренность замыкания которой неодносвязна.

Упражнение 10.1. Доказать, если компакт K аппроксимируется извне последовательностью сильно линейно выпуклых областей или компактов, то K — сильно линейно выпуклый компакт.

Упражнение 10.2. Доказать, если D аппроксимируется изнутри последовательностью сильно линейно выпуклых компактов или областей то D — сильно линейно выпуклая область.

Резюмируем некоторые результаты работ [126, 221] и геометрические критерии сильной линейной выпуклости, полученные в § 9, 10 в виде следующих утверждений.

Теорема 10.5. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — ограниченная область. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) сечение области D каждой k-плоскостью, где k — фиксированное число, $1 \le k \le n-1$, ациклично;

(б) множества $\Gamma(z)$ непусты и связны для всех точек $z \in \partial D$;

(в) D — область голоморфности и при фиксированном j, $1 < j \le n$, для произвольной j-плоскости γ $\gamma \cap D$ связно и любой ненулевой оператор дифференцирования по фиксированному направлению

$$P(\gamma \cap D) = \sum_{\nu=1}^{j} p_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu}$$

сюръективен в пространстве $H(\gamma \cap D)$, где ξ_ν, $\nu = 1, \dots, j$, — координаты точек в γ, а $H(\gamma \cap D)$ — пространство функций, голоморфных в области $\gamma \cap D$;

(г) D — область голоморфности и при фиксированном j, $1 < j \le n$, для произвольной j-плоскости γ $\gamma \cap D$ связно и любой ненулевой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$P(\gamma \cap D) = \sum_{|k|} a_k \frac{\partial^{|k|}}{\partial \xi_1^{k_1} \cdots \partial \xi_j^{k_j}}$$

сюръективен в пространстве $H(\gamma \cap D)$ (здесь k-мультииндекс с неотрицательными целочисленными компонентами $|k| = k_1 + \cdots + k_j$, а ξ_ν, $\nu = 1, \dots, j$, — координаты точки в γ).

Доказательство. Эквивалентность условий (а) при разных k показана в теореме 9.1. Теорема 10.2 дает эквивалентность (а) и (б). Из теоремы 1 [221] следует эквивалентность (а) при $k = 1$ условиям (в) и (г) при $j = n$, т.е. $\gamma = \mathbb{C}^n$. Если теперь $j < n$, то, с одной стороны, из (а) следует сильная линейная выпуклость сечений

$\gamma \cap D$, и поэтому на них справедлива теорема 1 [221], т.е. выполняются условия (в) и (г). Если выполнено одно из условий (в) или (г), то, в силу того, что связное сечение $\gamma \cap D$ области голоморфности образует область голоморфности в плоскости γ, применение той же теоремы 1 дает сильную линейную выпуклость $\gamma \cap D$. Отсюда следует ацикличность сечения $\gamma \cap D$ для произвольной плоскости, что эквивалентно условию (а).

Определение 10.2. Компакт K назовем нормальным, если существует такая последовательность областей D_k, $k = 1, 2, \ldots$, аппроксимирующая K извне, что каждая область D_k имеет однолистную оболочку голоморфности $N(D_k)$. Оболочка голоморфности нормального компакта определяется как пересечение $\bigcap\limits_k N(D_k) = N(K)$.

Из предложения 2.31 легко следует, что каждый линейно выпуклый компакт есть компакт голоморфности, т.е. $N(K) = K$.

Теорема 10.6. *Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ есть компакт голоморфности. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) сечение K каждой k-плоскостью, где k — фиксированное число, $1 \le k \le n-1$, ациклично;

(б) множества $\Gamma(z)$ непусты и связны для произвольной точки $z \in \mathbb{C}^n \backslash K$;

(в) при фиксированном m, $1 \le m \le n$, для произвольной m-плоскости γ $\gamma \cap k$ связно и всякая голоморфная в $\gamma \cap K$ функция f представляется в некоторой окрестности $\gamma \cap K$ равномерно сходящимся рядом

$$f(\xi) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_p}{(b_{p_1}\xi_1 + \cdots + b_{pm}\xi_m + b_p)^m},$$

где ξ_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, — координаты точек в γ, $\sum\limits_{k=1}^{m} |b_{pk}|^2 = 1$ и $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |B_p| < \infty$.

Доказательство. Эквивалентность условий (а) при разных k показана в теореме 9.1. Теорема 10.4 устанавливает эквивалентность (а) и (б). В теореме 1 [126] показана эквивалентность условия (в) сильной линейной выпуклости при $m = n$, т.е. $\gamma = \mathbb{C}^n$. Если теперь $m < n$, то из (а) следует сильная линейная выпуклость сечения $\gamma \cap K$ и, следовательно, выполнение условия (в) на $\gamma \cap K$. Если же на каждом сечении $\gamma \cap K$ выполнено условие (в) (заметим,

что связное сечение компакта голоморфности будет компактом голоморфности), то из [126] следует сильная линейная выпуклость $\gamma \cap K$, а, в силу произвольности выбора γ, это эквивалентно условию (а).

§ 11. Случаи совпадения с выпуклостью

Из определения сильно линейно выпуклых множеств поначалу может показаться, что декартово произведение связных и односвязных множеств является сильно линейно выпуклым. Однако ниже будет показано, что в случае невырожденного декартового произведения областей и компактов сильная линейная выпуклость эквивалентна выпуклости.

В теореме 11.1 рассматриваются области и компакты, являющиеся декартовыми произведениями областей или компактов соответственно, т.е. $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$, где $E_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$, $j = 1, \ldots, k$, $\sum\limits_1^k n_j = n$, $\mathbb{C}^{n_j}$ — n_j-мерные плоскости, совокупность которых порождает $\mathbb{C}^n$, попарная ортогональность их не предполагается. Считаем также, что хотя бы два из множеств E_j не заполняют все $\mathbb{C}^{n_j}$, если E — область и хотя бы два из них отличны от точки, если E — компакт.

Теорема 11.1. *Область или компакт, являющиеся декартовыми произведениями, сильно линейно выпуклы тогда и только тогда, когда они выпуклы.*

П р и м е р 11.1. Пусть $E = E_1 \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$, где $E_1 \subset \mathbb{C}$ — произвольное (не обязательно выпуклое) ацикличное множество. Легко убедиться, что если E_1 — область, то E — сильно выпуклая область.

Аналогично, будут сильно линейно выпуклыми области вида $E = E_1 \times \mathbb{C}^m \subset \mathbb{C}^n$, где $E_1 \subset \mathbb{C}^{n-m}$ — сильно линейно выпуклая область.

Достаточность теоремы сразу следует из определения сильной линейной выпуклости. Для доказательства необходимости воспользуемся простыми леммами.

Лемма 11.1. *Для того чтобы множество $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ было выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы все сомножители E_j были выпуклыми.*

Необходимость леммы очевидна, а достаточность следует из того, что E будет пересечением k выпуклых множеств $\pi_j^{-1}(E_j) = E_j \times \mathbb{C}^{n-n_j}$, $E = \bigcap\limits_{j=1}^k \pi_j^{-1}(E_j)$, где π_j — проекции $\mathbb{C}^n$ на $\mathbb{C}^{n_j}$.

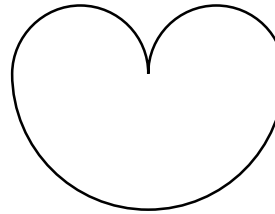


Рис. 5.

Определение 11.1. Точка z_0 границы ∂D области $D \subset \mathbb{C}$ называется правильной точкой невыпуклости, если для любой ее окрестности U пересечение $U \cap D$ содержит некоторую дугу $\{z \,|\, |z - z_0| = r, \varphi \leq \arg(z - z_0) \leq \varphi + \Theta\}$ с углом $\Theta > \pi$.

Лемма 11.2 [33]. *Невыпуклая плоская область $D \subset \mathbb{C}$ имеет, по крайней мере, одну правильную точку невыпуклости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как D невыпукла, то найдутся точки $z^1, z^2 \in D$, такие, что не все точки отрезка $[z^1, z^2] = \{z \,|\, z = tz^1 + (1-t)z^2,\ 0 \leq t \leq 1\}$ принадлежат D. Соединим точки z^1, z^2 ломаной L, лежащей в D. Можно предполагать, что L не пересекает отрезок $[z^1, z^2]$, иначе вместо z^1, z^2 можно выбрать другие точки из $[z^1, z^2] \cap L$, которые удовлетворяют этим условиям.

В непустом множестве $\partial D \cap \bar{G}$, где G — область, ограниченная ломаной L и отрезком $[z^1, z^2]$, возьмем точку, наиболее удаленную от вещественной прямой $l = \{z \,|\, z = tz^1 + (1-t)z^2, -\infty \leq t < +\infty\}$ (такая точка существует, так как $\partial D \cap \bar{G}$ — компакт), и проведем вещественную прямую l_1, параллельную l. Если $\partial D \cap G = \varnothing$, то $l_1 = l$. Концевая точка z_0 наименьшего отрезка прямой l_1, содержащего замкнутое ограниченное линейное множество $l_1 \cap \partial D \cap \bar{G}$ ($z_0 \in \partial D$), является правильной точкой невыпуклости области D. В самом деле, опишем из точки z_0 окружность радиуса r, $0 < r \leq \rho(z_0, L)$. Все точки по крайней мере одной из полуокружностей, на которые эта окружность разбивается прямой l_1, а также одна из ее точек, лежащая на l_1, являются внутренними точками области D. Следовательно, дуга этой окружности с центральным углом $\alpha > \pi$ лежит внутри D. Лемма доказана.

Заметим, что достаточно одной правильной точки невыпуклости, чтобы область на плоскости не была выпуклой (рис. 5). В пространственном случае для выпуклости области достаточно знать локаль-

ную выпуклость в подавляющем большинстве точек границы. Более точные формулировки можно найти в обзоре [33].

Доказательство необходимости теоремы разделим на две части.

А. Пусть E — область. Предположим, что сильно линейно выпуклая область E не является выпуклой. Из леммы 11.1 следует, что существует такой номер τ (не нарушая общности, $\tau = 1$), что E_1 — невыпуклая область. В силу наложенного на E условия, существует еще один номер j (пусть $j = 2$), такой, что $E_2 \neq \mathbb{C}^{n_2}$.

Заметим, что всюду в дальнейшем, если возникнет необходимость, то переходим к сечениям прямыми и можно всегда считать, что множества E_j принадлежат прямым, а $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{C}^2$.

Если E_1 — невыпуклая область, то существует точка $\eta_1 \in \partial E_1$, являющаяся правильной точкой невыпуклости.

Рассмотрим область E_2.

А1. Если E_2 — невыпуклая область, то, аналогично предыдущему, существует точка $\eta_2 \in \partial E_2$, являющаяся правильной точкой невыпуклости. В плоскостях изменения переменных z_1 и z_2 аффинное преобразование системы координат можем выбрать так, чтобы $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, а дуги γ_1 и γ_2, существующие в E_1 и E_2, согласно определению точек правильной невыпуклости, имели вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left\{ z_1 \,|\, |z_1| = r_1 - \varphi_1 \leq \arg z_1 \leq \pi + \varphi_1,\ 0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} \right\}, \\ \gamma_2 &= \left\{ z_2 \,|\, |z_2| = r_2 - \varphi_2 \leq \arg z_2 \leq \pi + \varphi_2,\ 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Проведем через начало координат прямую

$$\lambda = \left\{ z \,|\, z_1 = k z_2,\ z_3 = \cdots = z_n = 0,\ k = -\frac{r_1}{r_2} \right\}. \tag{11.2}$$

Так как в прямой λ координаты z_1 и z_2 связаны соотношением $z_1 = kz_2$, а множества E_j и $E'_j = \lambda \cap \pi_j^{-1}(E_j)$, $j = 1, 2$, гомеоморфны между собой, то пересечение $\lambda \cap E$ совпадает с $E_1 \cap kE_2$.

Замечание. Здесь и в дальнейшем для упрощения обозначений для подмножеств $E'_1, E'_2 \cap \lambda$ сохраним обозначения E_1, E_2 ввиду гомеоморфности этих множеств.

Рассмотрим объединение множеств E_1 и kE_2. С одной стороны, оно не содержит начала координат, а с другой — содержит окружность $|z_1| = r_1$, отделяющую начало координат от бесконечно удаленной точки. Но так как, в силу сильной линейной выпуклости E мно-

жества E_1 и kE_2 (как линейное преобразование области E_2) ацикличны, то это возможно лишь тогда, когда пересечение $E_1 \cap kE_2 = \lambda \cap E$ несвязно. Но это противоречит сильной линейной выпуклости E.

А2. Если E_2 — выпуклая область, то ее граница — жорданова кривая, обладающая на множестве полной линейной меры касательными вещественными прямыми [213]. Выберем точку $\eta_2 \in \partial E_2$, такую, что кривая ∂E_2 имеет в η_2 касательную. Выберем в плоскостях изменения переменных z_1 и z_2 системы координат так, чтобы $\eta_1 = \eta_2 = 0$, дуга γ_1 определялась формулой (11.1), а касательная к точке η_2 являлась осью абсцисс и множество E_2 лежало бы в верхней полуплоскости. Тогда в достаточно малой окрестности точки η_2 область E_2 содержит дугу $\gamma_2 = \{z_2 \,|\, |z_2| = r_2,\ \varphi_1 \le \arg z_2 \le \pi - \varphi_1\}$ (φ_1 — то же, что и в формуле (11.1)). Дальнейшие рассуждения для прямой λ, заданной формулой (11.2), аналогичны п. А1.

Полученные противоречия доказывают теорему, если E — область.

Б. Пусть E — сильно линейно выпуклый компакт. Предположим, что компакт E_1 невыпуклый. В силу ацикличности E_1, найдется вещественная прямая l в z_1-плоскости, пересекающая E_1 по несвязному множеству и такая, что E_1 лежит по одну сторону от этой прямой. Выберем систему координат в z_1-плоскости так, чтобы прямая l была осью абсцисс, компакт E_1 лежал в верхней полуплоскости, а начало координат было центром одного из интервалов смежности $(-\alpha, \alpha)$, на которые E_1 разбивает прямую l.

Рассмотрим компакт E_2.

Б1. Если E_2 — невыпуклый компакт, то, аналогично проделанному для компакта E_1, выберем систему координат в z_2-плоскости так, чтобы E_2 лежал в верхней полуплоскости и начало координат делило бы пополам один из интервалов смежности $(-\beta, \beta)$ к пересечению E_2 с осью абсцисс.

Рассмотрим сечение E прямой

$$\lambda = \left\{ z \,|\, z_1 = kz_2,\ z_3 = z_4 = \cdots = z_n = 0,\ k = -\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \right\}.$$

Очевидно, что множество $\lambda \cap E = E_1 \cap kE_2$ представляет собой подмножество оси абсцисс, содержащее точки α и $-\alpha$, но не содержащее начало координат. Следовательно, $\lambda \cap E$ несвязно, что противоречит сильной линейной выпуклости E.

Б2. Если E_2 — выпуклый компакт, то возможны случаи:

a') $\operatorname{int} E_2 = \varnothing$, здесь E_2 — отрезок вещественной прямой; тогда можно выбрать систему координат в z_2-плоскости, чтобы он лежал на оси абсцисс и заполнял симметричный отрезок $[-\beta, \beta]$;

б′) внутренность $\operatorname{int} E_2 \neq \varnothing$ и представляет собой выпуклую область.

Аналогично рассуждениям п. А2, граница E_2 — жорданова кривая, имеющая на множестве полной меры касательные. Пусть $\eta \in \partial E_2$ — точка, в которой E_2 имеет касательную вещественную прямую l_1. Рассмотрим в z_1-плоскости компоненту A множества $\{\operatorname{Im} z_1 \geq 0\} \backslash E_1$, содержащую начало координат. Пусть отрезок $[0, \delta]$ есть компонента пересечения оси координат с множеством A, содержащая начало координат, тогда $\delta \neq 0$ в силу компактности E_1. Положим $\tau = \left|\frac{\delta}{\alpha}\right|$. В силу того, что компакт E_2 имеет в точке η вещественную касательную l_1, существует вещественная прямая l_2, параллельная l_1, пересекающая E_2 по некоторому отрезку $[c, d]$, а ее расстояние p от прямой l_1 удовлетворяет неравенству $p < \frac{\tau \|d-c\|}{2}$, где $\|d - c\|$ — длина отрезка $[c, d]$. Тогда в z_2-плоскости выберем систему координат так, чтобы прямая l_2 стала осью абсцисс, прямая l_1 лежала в верхней полуплоскости, а начало координат совпадало со срединой отрезка $[c, d]$. Следовательно, пересечение E_2 с осью абсцисс — отрезок $[-\beta, \beta]$, где $\beta = \frac{\|d-c\|}{2}$.

Рассмотрим пересечение E с прямой λ, заданной уравнением (11.1). Как и выше, множество $\lambda \cap E$ гомеоморфно множеству $E_1 \cap kE_2$. Очевидно, что множество $E_1 \cup kE_2$ связно, так как оба слагаемые связны и содержат точки $(\alpha, 0)$ и $(-\alpha, 0)$. Дополнение к множеству $E_1 \cup kE_2$ несвязно, так как в силу выбора p множество $kE_2 \cap \{\operatorname{Im} z_1 \geq 0\}$ не может покрывать ограниченную компоненту A, так как

$$|kp| < \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \frac{\tau \|d-c\|}{2} = \frac{\alpha}{\frac{\|d-c\|}{2}} \left|\frac{\delta}{\alpha}\right| \frac{\|d-c\|}{2} = \delta.$$

Рассмотрим точную когомологическую последовательность Майера–Вьеториса для пары (E_1, kE_2)

$$\tilde{H}^0(E_1) \oplus \tilde{H}^0(kE_2) \to \tilde{H}^0(E_1 \cap kE_2) \to H^1(E_1 \cup kE_2) \to \\ \to H^1(E_1) \oplus H^1(kE_2)$$

($\tilde{H}^0(E)$ — приведенная группа, равная нулю на связных множествах). В силу ацикличности множеств E_1 и E_2 и точности последо-

вательности, получаем изоморфизм

$$\tilde{H}^0(E_1 \cap kE_2) \approx H^1(E_1 \cup kE_2).$$

Но группа $H^1(E_1 \cup kE_2)$ не равна нулю, так как множество $E_1 \cup kE_2$ разбивает плоскость (дополнение к нему содержит кроме бесконечной компоненты часть ограниченной компоненты A). Следовательно, группа $\tilde{H}^0(E_1 \cap kE_2) \neq 0$, а это эквивалентно несвязности множества $E_1 \cap kE_2 = \lambda \cap E$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 11.1. Если все сомножители E_j, $j = 1, \ldots, n$, ацикличны, то произвольное сечение множества $E = E_1 \times \cdots \times E_n \subset \mathbb{C}^n$ односвязно.

Доказательство. Из точной последовательности Майера–Вьеториса

$$H^1(E_1) \oplus H^1(kE_2) \to H^1(E_1 \cap kE_2) \to H^2(E_1 \cup kE_2)$$

видно, что для неодносвязности сечения нужна неодносвязность хотя бы одного сомножителя, так как $H^2(E_1 \cup kE_2) = 0$.

Следствие 11.2. Пересечение сильно линейно выпуклых множеств может не быть сильно линейно выпуклым множеством.

Доказательство. Достаточно рассмотреть сильно линейно выпуклые области $D^1 = D_1 \times \mathbb{C}$ и $D^2 = \mathbb{C} \times D_2$ в $\mathbb{C}^2$, где D_1 и D_2 — плоские невыпуклые односвязные области. Тогда область

$$D = D^1 \cap D^2 = D_1 \times D_2,$$

согласно теореме 11.1, не сильно линейно выпукла. Заметим, что D будет связной компонентой пересечения $D^1 \cap D^2$, т.е. нельзя говорить даже о сильной линейной выпуклости связных компонент.

Заметим, что здесь D^1 и D^2 — неограниченные области. В случае плоских невыпуклых областей их пересечение тоже, очевидно, может быть несвязным. Но здесь компоненты, как отмечено в следствии 11.2, уже будут ациклични. Что происходит в случае, когда берется пересечение ограниченных областей, отличных от плоских, ясно не до конца. Очевидно, что в случае невыпуклых областей просто устроить несвязное пересечение, но неясно, что можно сказать о сильной линейной выпуклости связных компонент пересечения.

Сравнивая полученное в этом следствии с предложением 2.17, видим, что сильная линейная выпуклость уже не удовлетворяет аксиоме выпуклости.

Следствие 11.3. Сумма сильно линейно выпуклых компактов $K_1+K_2 = \{z^1+z^2 \,|\, z^1 \in K_1,\ z^2 \in K_2\}$ может не быть сильно линейно выпуклой.

Доказательство. Достаточно в качестве слагаемых взять невыпуклые ацикличные компакты в координатных плоскостях.

Определение 11.2. Линейно аналитическим полиэдром называется множество вида $E = \{z \,|\, f_j(z) \in E_j,\ j \in J = \{1, 2, \ldots, N\}\}$, где множества $E_j \subset \mathbb{C}^1$, $f_j(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} z_k$, причем всякие две функции f_k, f_j, $k \neq j$, являются линейно независимыми, а каждая из функций f_j отображает E в плоское множество E_j. Множества E_j назовем образующими полиэдра E.

Ряд примеров линейных аналитических полиэдров, которые уже встречались или будут построены ниже (примеры 3.1, 3.2, 15.1, 15.3), иллюстрирует сложности строения этих полиэдров и их существенные отличия от вещественных многогранников, по аналогии с которыми они построены.

Упражнение 11.1. Показать, что образ выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ при проектировании $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^1$, осуществляемом линейной функцией $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j z_j + b$, есть тоже выпуклая область.

Легко убедиться, что, вообще говоря, обратное утверждение неверно.

Пример 11.2. Пусть $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1,\ z_1 \neq z_2^2\}$.

Тогда всякая проекция отображает D в выпуклую область.

Лемма 11.3. *Если линейно выпуклая область $D \subset \mathbb{C}^n$ всякой проекцией на $\mathbb{C}^1$ отображается в выпуклую плоскую область, то D выпукла.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 11.1, только множество индексов в пересечении $D = \bigcap\limits_{\alpha} \pi_\alpha^{-1}(D_\alpha)$ бесконечно, $\alpha \in \mathbb{C}P^{n-1}$.

Следствие 11.4. Если линейный аналитический полиэдр

$$\Delta = \{z \,|\, f_j(z) \in D_j,\ j = 1, 2, \ldots, N\},$$

такой, что все области D_j выпуклы, то и полиэдр Δ является выпуклым.

Определение 11.3. Гранью Γ_j линейного аналитического полиэдра E называется множество

$$\Gamma_j = \{z \in \partial E \,|\, f_j(z) \in \partial E_j,\ \text{а}\ f_k(z) \in \operatorname{int} E_k,\\ k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N\}.$$

Определение 11.4. Множество E называется локально выпуклым в точке $z \in \partial E$, если существует открытая окрестность $U(z)$ точки z, такая, что $U(z) \cap E$ — выпуклое множество.

Лемма 11.4 ([8]). *Для того чтобы линейный аналитический полиэдр $D = \{z \,|\, f_j(z) \in D_j,\ j = 1, \dots, N\}$ был выпуклым, достаточно, чтобы области D_j, $j = 1, \dots, N$, были локально выпуклы в точках $S_j = f_j(\Gamma_j)$.*

Доказательство. Впишем в линию S_j ломаную L_j и исследуем область G_j, ограниченную контуром $(\partial D_j \backslash S_j) \cup L_j$, $j = 1, \dots, N$. Линии S_j и L_j рассматриваются без концов. Получим линейный аналитический полиэдр

$$G = \{z \,|\, f_j(z) \in G_j,\ j = 1, 2, \dots, N\}.$$

Покажем, что область G является выпуклой.

Пусть ξ — произвольная граничная точка области G. Могут представиться два случая:

1) существует проекция f_k, такая, что $w_0 = f_k(\xi) \in L_k$;

2) $f_j(z) \in \bar{G}_j \backslash L_j$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Покажем, что в обоих случаях область G является выпуклой в точке ξ.

1. Так как область G_k является локально выпуклой в каждой точке дуги L_k, то существует окрестность $V(w^0)$ точки $w_0 = f_k(\xi)$ и вещественная прямая $\{w \,|\, w = \alpha t + \beta\}$ (где t — действительный параметр, $-\infty < t < +\infty$, α, β — комплексные постоянные), которая проходит через точку w_0 и не пересекает множество $G_k \cap V(w_0)$. Рассмотрим окрестность $U(\xi)$ точки ξ, которая проекцией f_k отображается в окрестность $V(w_0)$. Вещественная гиперплоскость $\{z \,|\, f_k(z) = \alpha t + \beta\}$ проходит через точку ξ и не содержит точек пересечения $D \cap U(\xi)$. Следовательно, в точке ξ область G является локально выпуклой.

2. В этом случае точка ξ принадлежит m ($m \geq 2$) граням (пусть эти грани есть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$) и проекциями $f_1, \dots f_m$ отображается в концевые точки ломаных $L_1, \dots, L_m$.

В точке ξ пересекаются m вещественных гиперплоскостей $T_j = \{z \mid f_j(z) = \alpha_j t + \beta_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, где $w_j = \alpha_j t + \beta_j$ — уравнение вещественной прямой в плоскости значений проекции f_j, которая содержит точку $f_j(\xi)$ вместе со звеном ломаной L_j, которому она принадлежит. Предположим, что в точке ξ область G не является локально выпуклой. Это значит, что среди вещественных гиперплоскостей T_j, $j = 1, \ldots, m$, найдутся такие (пусть они будут T_1, T_2), которые в любой окрестности точки ξ содержат внутренние точки области G и $T_1 \cap T_2 \cap \partial G$ представляет собой $(2n-2)$-мерное множество.

Легко видеть, что в любой окрестности произвольной точки множества $T_1 \cap T_2 \cap \partial G$ вещественные гиперплоскости T_1, T_2 содержат внутренние точки области G. Пусть η — граничная точка области G, принадлежащая только вещественным гиперплоскостям T_1, T_2. Существует окрестность $V(\eta)$ точки η, которая также не содержит точек, принадлежащих другим вещественным гиперплоскостям, ограничивающим область G. Гиперплоскости T_1, T_2 разбивают окрестность $V(\eta)$ на четыре части. Так как T_1, T_2 заходят внутрь области G, то три части из четырех принадлежат области G, а так как G область голоморфности, то по теореме Кнезера о вложенном ребре [241] вещественные гиперплоскости T_1 и T_2 должны пересекаться по комплексной гиперплоскости, что невозможно, в силу независимости этих гиперплоскостей. Значит, область G является локально выпуклой во всех своих граничных точках, а следовательно, и выпуклой.

Так как линейный аналитический полиэдр D аппроксимируется изнутри полиэдрами типа G, то D также является выпуклой.

Очевидно, что декартово произведение является частным случаем линейно аналитического полиэдра и, естественно, хотелось бы получить теорему 11.1 или опровергнуть ее для линейно аналитических полиэдров. Однако в полном объеме такой результат автору неизвестен. Известны только аналогичные утверждения при дополнительных ограничениях на множества E_j [154].

Приведем один из таких результатов.

Теорема 11.2 ([154]). *Пусть область D — линейный аналитический полиэдр, причем D_j — области с дважды гладкой границей. Область D является сильно линейно выпуклой тогда и только тогда, когда она выпукла.*

Доказательство. Предположим, что сильно линейно выпуклая область D, определенная выше, не является выпуклой. Из леммы 11.4 следует, что существует такой номер j_0 (можно считать, что

$j_0 = 1$), что на кривой S_1 найдется правильная точка невыпуклости η_0. А так как D_1 — область с гладкой границей, то существует окрестность $U(\eta_1^0)$, такая, что для каждой точки $\eta_1 \in U(\eta_1^0) \cap S_1 = l_1$ касательная к ∂D_1 в некоторой окрестности точки η_1 лежит внутри D_1.

Рассмотрим множество $A = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, (f_1(z) \in l_1) \cap (\bigcup\limits_j \Gamma_j)\}$. Размерность этого множества равна $2n-2$. В силу условия попарной линейной независимости проекций f_j существует точка z_0 и номер k_0 (можем считать $k_0 = 2$), такие, что $z_0 \in \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 \setminus \bigcup\limits_{j=3}^{N} \bar{\Gamma}_j$. Так как функции f_1 и f_2 линейно независимы, то с помощью линейного преобразования можем добиться, чтобы $f_1(z) = z_1$, $f_2(z) = z_2$, $z_0 = \Theta$.

В плоскостях изменения переменных z_1 и z_2 системы координат x_1, y_1 и x_2, y_2 можем выбрать так, что

$$D_1 \cap U_1(0) = \{z_1 \in U_1(0) \,|\, y_1 + p_1 x_1^2 + \cdots > 0,\ p_1 > 0\},$$
$$D_2 \cap U_2(0) = \{z_2 \in U_2(0) \,|\, y_2 - p_2 x_2^2 + \cdots > 0\}.$$

Могут быть три случая: 1) $p_2 > 0$; 2) $p_2 < 0$; 3) $y_2''(x_2) = 0$ в $U_2(0)$.

Рассмотрим каждый из этих случаев. Проведем через точку z_0 прямую $\gamma = \{z \,|\, z_2 = kz_1,\ z_3 = \cdots = z_n = 0,\ k < 0\}$. Пусть

$$g = D \cap \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, z_3 = \cdots = z_n = 0\},\ g \cap \gamma \cap (U_1 \times U_2) =$$
$$= \{(z_1, z_2) \in U_1 \times U_2 \,|\, z_2 = kz_1,\ y_1 + p_1 x_1^2 + \cdots > 0,$$
$$ky_1 - p_2 k^2 x_1^2 + \cdots > 0\}.$$

1. Если $p_2 > 0$, то берем $|k| < \frac{p_1}{p_2}$; тогда

$$g \cap \gamma \cap (U_1 \times U_2) = \{(z_1, z_2) \in U_1 \times U_2 \,|\, z_2 = kz_1,$$
$$y_1 + p_1 x_1^2 + \cdots > 0,\ y_1 + |k| p_2 x_1^2 + \cdots < 0\}.$$

2. Если $p_2 < 0$, то

$$g \cap \gamma \cap (U_1 \times U_2) = \{(z_1, z_2) \in U_1 \times U_2 \,|\, z_2 = kz_1,$$
$$y_1 + p_1 x_1^2 + \cdots > 0,\ y_1 - |p_2||k| x_1^2 + \cdots < 0\}.$$

3. Если $y_2''(x) = 0$ в $U_2(0)$, то

$$g \cap \gamma \cap (U_1 \times U_2) = \{(z_1, z_2) \in U_1 \times U_2 \,|\, z_2 = kz_1,$$
$$y_1 + p_1 x_1^2 + \cdots > 0,\ y_1 < 0\}.$$

Замечаем, что во всех трех случаях множество $g \cap \gamma \cap (U_1 \times U_2)$ является несвязным, причем $(0,0)$ принадлежит границам обеих компонент. Покажем, что это невозможно, если область D удовлетворяет условиям теоремы и сильно линейно выпукла.

Пусть z', z'' принадлежат различным связным компонентам множества $g \cap \gamma \cap (U_1 \times U_2)$, для которых точка $z^o = \Theta$ является граничной. Так как множество $D \cap \gamma$, вследствие сильной линейной выпуклости D, является связным, то точки z', z'' можно соединить кривой L_0, принадлежащей множеству $D \cap \gamma$. Точки z' и z'' соединим кривыми L', L'', лежащими в $D \cap \gamma \cap (U_1 \times U_2)$, с точкой z^0. Все точки замкнутой кривой $L = L_0 \cup L' \cup L''$, за исключением точки z^0, принадлежат области D, причем кривая L_0 принадлежит D вместе с некоторой окрестностью $U(L_0)$.

Рассмотрим случай, когда $p_2 > 0$, остальные случаи аналогичны. Пусть $\gamma_\varepsilon = \{z \,|\, z_2 = k(z_1 - \varepsilon i),\ z_3 = \cdots = z_n = 0\}$ – прямая. Пересечение

$$\gamma_\varepsilon \cap g \cap (U_1 \times U_2) = \{(z_1, z_2) \,|\, z_1 \in U_1(0),\ z_2 = k(z_1 - \varepsilon i),$$
$$y_1 + p_1 x_1^2 + \cdots > 0,\ y_1 - \varepsilon + p_2 |k| x^2 + \cdots < 0\}$$

является связным множеством. Точки $z'_\varepsilon = (z'_1, z'_2 = k(z'_1 - \varepsilon i))$, $z''_\varepsilon = (z''_1, z''_2 = k(z''_1 - \varepsilon i))$ принадлежат этому множеству, следовательно, их можно соединить кривой L'_ε, принадлежащей $\gamma_\varepsilon \cap g \cap (U_1 \times U_2)$.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ множество $\gamma_\varepsilon \cap U(L_0)$ содержит точки z'_ε и z''_ε в одной связной компоненте и поэтому их можно соединить кривой $L''_\varepsilon = U(L_0) \cap \gamma_\varepsilon$. Кривая $L'_\varepsilon \cup L''_\varepsilon$ является замкнутой, принадлежащей $\gamma_\varepsilon \cap D$, и не стягивается в точку в $\gamma_\varepsilon \cap D$, что противоречит сильной линейной выпуклости D. Теорема доказана.

Читатель может самостоятельно подумать над доказательством аналога теоремы 11.2 в случае, если образующие D_j — многогранники, или ознакомиться с доказательством в [124].

Было бы интересно получить теорему 11.2 без всяких дополнительных ограничений на образующие.

Теорема 11.3. *Если $E \subset \mathbb{C}^n$ — сильно линейно выпуклое замкнутое множество, содержащееся в какой-нибудь вещественной гиперплоскости, то либо E содержится в одной из комплексных гиперплоскостей, либо является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть T — вещественная гиперплоскость, содержащая E, и пусть E не лежит ни в одной из комплексных гиперплоскостей, лежащих в T. Если E — невыпуклое множество, то

существует вещественная прямая l, пересекающая E по несвязному множеству. Прямая l однозначно задает комплексную прямую $\lambda \subset T$, содержащую ее. Заметим, что вследствие сильной линейной выпуклости, пересечение $\lambda \cap E$ ациклично, поэтому λ лежит в T, иначе $\lambda \cap T = l$ и $\lambda \cap E = \lambda \cap (T \cap E) = (\lambda \cap T) \cap E = l \cap E$, а последнее множество несвязно.

Проведем через λ комплексную гиперплоскость $\mathcal{L}$, лежащую в T (она определяется однозначно). Теперь выберем произвольную точку $a \in (E \cap \mathcal{L}) \backslash \lambda$ и проведем двумерную комплексную плоскость Q через прямую λ и точку a. По построению Q — комплексно двумерное евклидово пространство, содержащее сильно линейно выпуклое множество $E \cap Q$ в вещественной гиперплоскости $Q \cap T$, но $E \cap Q$ — невыпуклое множество, так как $l \cap E = l \cap E \cap Q$ — несвязное множество. По определению сильной линейной выпуклости, пересечение множества $Q \cap E$ с произвольной прямой ациклично.

Но, в силу расположения этого множества, сечения его произвольными прямыми, отличными от λ, совпадают с сечениями его вещественными прямыми. Поэтому сечения множества $E \cap Q$ произвольными вещественными прямыми, не лежащими в λ, связны. Выберем две точки z_1, z_2 в разных компонентах множества $l \cap E \cap Q$. Согласно выбору точки a, она лежит в λ, и поэтому прямолинейные отрезки $[a, z_1]$ и $[a, z_2]$ принадлежат множеству $E \cap Q$. По тем же рассуждениям произвольный прямолинейный отрезок $[z_1, x]$, где x лежит в полуинтервале $[a, z_2]$, тоже принадлежит $E \cap Q$. Но тогда, в силу замкнутости $E \cap Q$, ему принадлежит и прямолинейный отрезок $[z_1, z_2]$, что противоречит возможности выбора точек z_1, z_2 в различных компонентах множества $l \cap E \cap Q = l \cap E$, если пересечение $l \cap E$ несвязно. Следовательно, E — выпуклое множество.

Теорема доказана.

Следствие 11.5. Любое замкнутое множество F в $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$ — существенно вещественное подмножество, не содержащее никакой комплексной плоскости) сильно линейно выпукло в том и только том случае, когда оно выпукло.

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ — минимальное по размерности вещественное пространство, содержащее F. Тогда пространство $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^m + i\mathbb{R}^m$ — минимальное по размерности комплексное пространство, содержащее F (иначе F содержалось бы в $\mathbb{R}^{m-l} = \mathbb{C}^{m-1} \cap \mathbb{R}^m$). Теперь достаточно применить к $\mathbb{C}^m$ теорему 11.3.

Рассмотрим случай существования особенностей на границе, которые нарушают условия гладкости в некотором множестве точек A, которое не разбивает границу ∂D.

Используя теорему 11.1, построим пример, для которого множество особенностей границу не разбивает и множество точек гладкости всюду плотно на границе, но полученная область уже не будет сильно линейно выпуклой, поскольку существует несвязное сечение ее комплексной прямой.

П р и м е р 11.3. Зададим поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ уравнением $F(x, y, z) = 0$,

$$F = \begin{cases} \sqrt{1-z^4} - \max(|x|, |y|) = 0, \quad \text{если } |x| \text{ и } |y| \geq \sqrt{1-z^2}; \\ (|x| - \sqrt{1-z^2})^2 + (|y| - \sqrt{1-z^2})^2 - (\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2})^2 = 0, \\ \text{если } |x| \text{ или } |y| < \sqrt{1-z^2}. \end{cases}$$

Заданная поверхность симметрична относительно гиперплоскостей $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, поэтому достаточно исследовать ее гладкость при ограничениях $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq y$. При таких ограничениях первое уравнение принимает вид $\sqrt{1-z^4} - x = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{4z^3}{2\sqrt{1-z^4}} = -\frac{2z^3}{\sqrt{1-z^4}}, \quad \text{если } x > y,\ z > 0.$$

Если $z = 0$, то в точке $z = 0$, $x = y = 1$ границы производных справа и слева от точки $(1, 1, 0)$ не совпадают, а именно:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{при } z = 0,\ x > y \quad \text{и}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1 \quad \text{при } z = 0,\ x < y.$$

Для второго уравнения получим:

$$\left(x - \sqrt{1-z^2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{1-z^2}\right)^2 - \left(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}\right)^2 = 0,$$

если $x \geq \sqrt{1-z^2}$ и $y \geq \sqrt{1-z^2}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\left(x - \sqrt{1-z^2}\right); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\left(y - \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2\big(x-\sqrt{1-z^2}\big)\left[\frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}} + 2\big(y-\sqrt{1-z^2}\big)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}} - 2\big(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}\big)\left(\frac{-4z^3}{2\sqrt{1-z^4}} + \frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}}\right)\right] =$$
$$= \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\left(x+y-\sqrt{1-z^2}-\sqrt{1-z^4}+2z^2\sqrt{1-z^2}-\frac{2z^2\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

$\frac{\partial F}{\partial z}$ существует для произвольного значения $z \neq \pm 1$, если $z = \pm 1$, то $x = y = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ также существует из геометрических соображений, потому что к поверхности существует единственная горизонтальная касательная плоскость.

Из вычисления градиента видим, что он существует и отличен от нуля для всех точек поверхностей, которые задаются двумя уравнениями, при $x > y$. Итак, гладкость может нарушаться только по линии A склеивания поверхностей. А именно при $x = \sqrt{1-z^4}$, $y = \sqrt{1-z^2}$. Понятно, что гладкость в этих точках будет сохраняться, если градиенты обеих поверхностей, определяемых уравнениями, в точках склейки будут коллинеарными.

Для второго уравнения в точках склеивания A имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x,y,z)\in A} = 2(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}), \quad \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x,y,z)\in A} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x,y,z)\in A} = \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\left(\sqrt{1-z^4}+\sqrt{1-z^2}-\sqrt{1-z^2}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{1-z^4}+2z^2\sqrt{1-z^2}-2z^2\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1+z^2}}\right) = \frac{4z^3\sqrt{1+z^2}-1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Проверим коллинеарность градиентов

$$z_1 = \left(-1, 0, \frac{-2z^3}{\sqrt{1-z^4}}\right) \quad \text{и}$$
$$z_2 = \left(2\big(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}\big),\ 0,\ \frac{4z^3(\sqrt{1+z^2}-1)}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

Равенство

$$-2\big(\sqrt{1-z^4}-\sqrt{1-z^2}\big) = \frac{4z^3(\sqrt{1+z^2}-1)\sqrt{1-z^4}}{2z^3\sqrt{1+z^2}}$$

очевидно, поэтому поверхность S гладкая для всех точек, кроме четырех $|x| = |y| = 1, \quad z = 0$.

Сделав в уравнении поверхности $F(x, y, z) = 0$ замену переменной y на $\sqrt{y^2 + u^2}$, получим поверхность вращения Q, которая также будет гладкой для всех точек за исключением двух кругов $|x| = \sqrt{y^2 + u^2} = 1$.

П р и м е р 11.4.

$$F(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{1-z^4} - \max\left(|x|, |\sqrt{y^2+u^2}|\right) = 0, \\ \text{если } |x| < \sqrt{1-z^2} \text{ или } \sqrt{y^2+u^2} < \sqrt{1-z^2}, \\ \left(|x| - \sqrt{1-z^2}\right)^2 + \left(\sqrt{y^2+u^2} - \sqrt{1-z^2}\right)^2 - \\ - \left(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}\right)^2 = 0, \\ \text{если } |x| \geq \sqrt{1-z^2} \text{ и } \sqrt{y^2+u^2} \geq \sqrt{1-z^2}. \end{cases}$$

П р и м е р 11.5. Пусть $D_1 \subset \mathbb{C}$ — область, ограниченная полуокружностью $\{(x, z) \,|\, x^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ и дугами $\{(x, z) \,|\, (x + \frac{1}{3})^2 + z^2 = \frac{4}{9},\ z \leq 0,\ x \leq 0\}$ и $\{(x, z) \,|\, (x - \frac{1}{3})^2 + z^2 = \frac{4}{9},\ z \leq 0,\ x \geq 0\}$.

Легко видеть, что область D_1 — локально выпукла во всех точках границы за исключением точки $a = (0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Пусть $G = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{C}^2$, где $D_2 = \{(y, u) \,|\, y^2 + u \leq 1\}$.

Согласно теореме 11.1, область G не будет сильно линейно выпуклой. Легко проверить, что точками негладкости границы ∂G будут точки множества $A = (\partial D_1 \times \partial D_2) \cup (a \times D_2) \subset \partial G$.

Теперь рассмотрим линейно выпуклую область D с особенностями на границе, которую построим, используя предыдущие примеры.

П р и м е р 11.6. Пусть $D \subset \mathbb{C}^2$ — область, граница которой состоит из двух частей: из поверхности Q, построенной в примере 11.4, и части границы области G из примера 11.5, а именно ее части заданной при $z \leq 0$. Точками негладкости границы ∂D будет подмножество множества A, $A \supset A_1 = \{(x, y, z, u) \,|\, (x, y, z, u) \in A,\ z \leq 0\}$.

Это подмножество:

1) связно,

2) не разбивает ∂G,

3) дополнение $\partial D \backslash A_1$ — всюду плотное в ∂D множество.

Этот пример иллюстрирует, какие препятствия возникают на пути усиления леммы 7.5, где для установления сильной линейной выпуклости области требовалось, чтобы множество особенностей ло-

кально не разбивало границу. Было неясно, можно ли вместо локального условия ограничиться глобальной связностью $\partial D \backslash A$. Приведенный пример показывает, что связности $\partial D \backslash A$ недостаточно для сильной линейной выпуклости области. Если бы область D была сильно линейно выпуклой, то такой же была бы и область G, ведь мы изменили только ее выпуклую часть. Отметим также, что все построенные в примерах 11.3–11.6 области являются линейно выпуклыми.

Упражнение 11.2. Доказать, что невыпуклые полицилиндры $D = D_1 \times \cdots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, где по крайней мере два сомножителя отличны от $\mathbb{C}$, невозможно аппроксимировать изнутри линейно выпуклыми областями с гладкими границами.

Упражнение 11.3. Доказать, что невыпуклые компакты $K = K_1 \times K_2$, где сомножители отличны от точки, невозможно аппроксимировать извне линейно выпуклыми областями с гладкими границами.

§ 12. Проекции сильно линейно выпуклых компактов

Теорема 12.1. *Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — сильно линейно выпуклый компакт, не лежащий ни в какой вещественной гиперплоскости, то для проекций K на произвольную прямую (за исключением, может быть, одной прямой)* $\operatorname{int} \pi(K) \neq \varnothing$, *где $\pi(K)$ — образ компакта при проекции π.*

Доказательство. 1. Пусть теорема несправедлива и для двух проекций на различные прямые $\operatorname{int} \pi_j(K) = \varnothing$, $j = 1, 2$. Следовательно, размерность $\dim \pi_j(K) \leq 1$.

Дальше, не нарушая общности, можем считать, что $K \subset \mathbb{C}^2$ (этого легко добиться, рассматривая проекцию компакта K на 2-плоскость, образованную декартовым произведением двух прямых, проекция K на которые имеет пустую внутренность). Заметим, что, согласно следствию 9.2, эта проекция тоже будет сильно линейно выпуклым компактом.

В силу сильной линейной выпуклости K, все его проекции на прямые ацикличны. Очевидно также, что произвольная проекция на прямую содержит более одной точки, иначе K содержался бы в гиперплоскости, что не допускается по условию. Поэтому, в силу

связности K, произвольная его проекция содержит невырожденный континуум. Следовательно, мы установили, что все проекции K есть ацикличные множества размерности не меньше 1. Таким образом, $\dim \pi_j(K) \geq 1$ при $j = 1, 2$.

Легко установить, что ни одна из проекций π_j, $j = 1, 2$, не может быть гомеоморфизмом на K. В самом деле, не нарушая общности, пусть $\pi_1 : K \to \pi_1(K)$ — гомеоморфизм. Покажем тогда, что K лежит в некоторой прямой, а это недопустимо по условию.

Пусть точки $z_1, z_2 \in K$. Проведем через z_1 и z_2 прямую λ. Пусть существует точка $z \in K$, не лежащая на λ. Рассмотрим точки $u_1 = \pi_1(z_1)$ и $u_2 = \pi_1(z_2)$. В силу связности $\pi_1(K)$, существует неприводимый континуум K_1, содержащий эти точки [147] (неприводимым континуумом называется связный компакт, содержащий эту пару точек, никакое связное компактное подмножество которого уже этим свойством не обладает), а, в силу условий $\operatorname{int} \pi_1(K) \neq \varnothing$ и ацикличности образа проекций, он — единственный.

В силу сильной линейной выпуклости K, пересечение $\lambda \cap K$ связно. Образ $\lambda \cap K$ при проекции π_1 непременно содержит компакт K_1 в силу единственности. Проведем прямые λ_1, λ_2 через пары точек z, z_1 и z, z_2 соответственно. Аналогичным образом пересечения $\lambda_1 \cap K$ и $\lambda_2 \cap K$ связны. Множество $A = (\lambda_1 \cap K) \cup (\lambda_2 \cap K)$ также связно и пересекается с множеством $\lambda \cap K$ только по точкам z_1 и z_2. Следовательно, его проекция $\pi_1(A)$ — связный компакт, содержащий точки u_1 и u_2, но, в силу гомеоморфности π_1 на K, нигде больше не пересекающий компакт K_1, что противоречит единственности K_1. Поэтому $\pi_1(A) \supset K_1$. Отсюда, в частности, следует, что для произвольной точки a из K_1, за исключением, быть может, точек u_1 и u_2, множество $\pi_1^{-1}(a) \cap K$ содержит две различные точки, а поэтому, и невырожденный ацикличный континуум.

Впрочем, из доказательства видно, что это свойство справедливо для произвольной точки $a \in \pi_1(K)$, индекс которой больше 1 (точное определение индекса точки на одномерном континууме см. [225], а интуитивно — это точки локальной не жордановости, которые локально разбивают континуум более чем на две компоненты). Заметим также, что множество $\pi_1^{-1}(a) \cap K$ проектируется гомеоморфно при любой проекции, отличной от π_1.

2. Возьмем точку $w \in \pi_2(K)$, для которой $\pi_2^{-1}(w) \cap K$ есть невырожденный континуум. Будем считать, что в п. 1 точки z_1 и z_2 принадлежат $\pi_2^{-1}(w) \cap K$, и пусть K_1 — неприводимый компакт, содер-

жащий $u_1 = \pi_1(z_1)$ и $u_2 = \pi_1(z_2)$. Рассмотрим произвольную точку $u \in K_1$, не совпадающую ни с u_1, ни с u_2. В множестве $\pi_2(\pi_1^{-1}(u) \cap K)$ выберем точку w_1, отличную от w. Аналогично п. 1, существует единственный неприводимый континуум K_2, содержащий точки w и w_1.

Кроме того, для произвольной точки $b \in K_2$ (исключая, быть может, точку w_1) $\pi_2^{-1}(b) \cap \pi_1^{-1}(K_1)$ есть невырожденный континуум, образ которого при проекции π_1 покрывает часть K_1. Выберем неприводимый континуум Σ, содержащий точку u и точку $u_0 \in \pi_1(\pi_2^{-1}(b) \cap \pi_1^{-1}(K_1))$, отличную от u, а в K_2 — неприводимый континуум σ, содержащий точки w и b. Очевидно, что компакт K содержит прямое произведение $\Sigma \times \sigma$, так как для любой точки $\xi \in \Sigma$ ее образ при многозначном отображении $\pi_2(\pi_1^{-1}(\xi) \cap K)$ покрывает как точку w, так и b, а следовательно, в силу связности $\pi_1^{-1}(\xi) \cap K$, и неприводимый континуум σ.

3. Если Σ и σ — невыпуклые компакты, то как и в теореме 11.1, легко найти прямую Γ, пересекающую $\Sigma \times \sigma$ по несвязному множеству. Покажем теперь, что эта же прямая будет пересекать K по несвязному множеству.

Как и в теореме 11.1, систему координат можно выбрать так, чтобы прямая Γ задавалась уравнением $z_2 = kz_1$, а пересечение $\Gamma \cap (\Sigma \times \sigma)$ было бы гомеоморфно пересечению $\sigma \cap k\Sigma$. Справедлива цепочка включений $\sigma \cap k\Sigma \subset \Gamma \cap K \subset \pi_2(K) \cap k(\pi_1(K))$. Вложение $\tau : \sigma \cup k\Sigma \to \pi_2(K) \cup k(\pi_1(K))$ индуцирует следующее отображение последовательностей Майера–Вьеториса:

$$\begin{array}{ccccc}
\overbrace{\tilde{H}^0(\sigma) \oplus \tilde{H}^0(k\Sigma)}^{0} & \longrightarrow & \tilde{H}^0(\sigma \cap k\Sigma) & \xrightarrow{\approx} & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle j^*} & & \\
 & & \tilde{H}^0(\Gamma \cap K) & & \\
 & & \uparrow & & \\
\underbrace{\tilde{H}^0(\pi_2(K)) \oplus \tilde{H}^0(k\pi_1(K))}_{0} & \longrightarrow & \tilde{H}^0(\pi_2(K) \cap k\pi(K)) & \xrightarrow{\approx} &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H^2(\pi_2(K)\cup k\pi_1(K),\sigma\cup k\Sigma)=0 & & \\
 & & \uparrow & & \\
\longrightarrow & \overset{\approx}{\longrightarrow} & H^1(\sigma\cup k\Sigma) & \longrightarrow & H^1(\sigma)\oplus H^1(k\Sigma)=0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \tau^*} & & \\
\longrightarrow & & H^1(\pi_2(K)\cup k\pi_1(K)) & \longrightarrow & \underbrace{H^1(\pi_2(K))\oplus H^1(k\pi_1(K))}_{0}
\end{array}
$$

В силу одномерности объединения $\pi_2(K)\cup k\pi_1(K)$, вложение τ индуцирует эпиморфизм τ^*. Следовательно, из коммутативности диаграммы вытекает, что j^* — эпиморфизм. Поэтому группа $\tilde{H}^0(\Gamma\cap K)$ отлична от нуля (так как группа $\tilde{H}^0(\sigma\cap k\Sigma)\neq 0$ из-за несвязности пересечения $\sigma\cap k\Sigma$) и множество $\Gamma\cap K$ несвязно, что противоречит сильной линейной выпуклости компакта K.

4. Отметим теперь, что если проекция $\pi_1(K)$ невыпукла, то из построения компакта Σ видно, что его тоже можно выбрать невыпуклым. Приведенные выше рассуждения привели этот случай к противоречию. Если же $\pi_1(K)$ — выпуклый компакт, то из размерностного ограничения он есть подмножество некоторой вещественной прямой l. Но тогда $K\subset\pi_1^{-1}(l)$, а последнее множество представвляет собой вещественную трехмерную плоскость в $\mathbb{C}^2$, что исключено условием. Теорема доказана.

П р и м е р 12.1. Возьмем в $\mathbb{R}^3=\{x_1,x_2,y_1\}$ куб $K=\{x\,|\,|x_1|\leq 1,\ |x_2|\leq 1,\ |y_1|\leq 1\}$. Вложим $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{C}^2$ как вещественную гиперплоскость $y_2=0$, где $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ — координаты в $\mathbb{C}^2$. При линейной проекции $\mathbb{C}^2$ на прямую $z_1=0$ этот куб проектируется в отрезок $[-1,1]$. Применим к $\mathbb{C}^2$ проективное преобразование

$$z_1'=\frac{z_1}{iz_2+1},\quad z_2'=\frac{z_2+i}{iz_2+1}.$$

Это преобразование инвариантно на прямых и переводит сильно линейно выпуклый компакт K в сильно линейно выпуклый компакт K_1, не лежащий ни в какой вещественной гиперплоскости. Легко проверить, что проекция K_1 на прямую $z_1=0$ будет полуокружностью $\{x_2^2+y_2^2=1,\ y_2\geq 0\}$, т.е. образ K_1 при этой проекции имеет пустую внутренность. Из этого примера видна неулучшаемость теоремы 12.1, т.е. сильно линейно выпуклый компакт, не лежащий ни в

какой вещественной гиперплоскости, может иметь пустую внутренность и проектироваться только в одном направлении на компакт с пустой внутренностью.

§ 13. Локальная линейная выпуклость

В данном параграфе исследуем понятие локальной линейной выпуклости и вопрос, когда из локальной линейной выпуклости множества следуют глобальные оценки.

Как известно, в вещественном случае из локальной выпуклости области во всех точках границы следует ее выпуклость. Естественно предположить существование комплексного аналога этого результата.

Определение 13.1. Область $D \subset \mathbb{C}^2$ называется локально линейно выпуклой, если в каждой точке $z^0 \in \partial D$ существует гиперплоскость, проходящая через z^0 и не пересекающая D в некоторой окрестности точки z^0.

П р и м е р 13.1. Пусть область $D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{C}^2$, где $D_1 = \{z_1 \,|\, 0,9 < |z_1| < 1\}$, $D_2 = \{z_2 \,||\operatorname{Re} z_2| < 1,\ |\operatorname{Im} z_2| < 0,1\}$. Выберем прямую $\gamma = \{z \,|\, z_1 = z_2\}$. Пересечение

$$D \cap \gamma = \{z \,|\, z_1 = z_2,\ 0,9 < |z_1| < 1,\ |\operatorname{Im} z_1| < 0,1\}$$

состоит из двух связных компонент. Обозначим их $B_1 = \{z \in D \cap \gamma \,|\, \operatorname{Re} z_1 > 0\}$ и $B_2 = \{z \in D \cap \gamma \,|\, \operatorname{Re} z_1 < 0\}$. Очевидно, что области D и $D\backslash\gamma$ линейно выпуклы. Область $D\backslash B_1$ будет локально линейно выпуклой, но не линейно выпуклой. В самом деле, через произвольную точку $z \in B_1 \subset \partial(D\backslash B_1)$ проходит единственная прямая γ, не пересекающая $D\backslash B_1$ в окрестности точки z, но $\gamma \cap (D\backslash B_1) = B_2 \neq \varnothing$.

Приведенный пример показывает, что без каких-либо требований регулярности границы нельзя ожидать хороших глобальных свойств. Поэтому в дальнейшем, как и в § 7, предполагаем гладкость границы ∂D, более того, в теореме 13.1 полагаем функцию Φ, где $D = \{z \,|\, \Phi(z, \bar{z}) < 0\}$, дважды непрерывно дифференцируемой и $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$ в точках ∂D.

Для начала приведем достаточные и необходимые условия локальной линейной выпуклости регулярной области в терминах знакоопределенности гессиана, следуя [123].

Теорема 13.1. *Для того чтобы регулярная область*

$$D = \{z \,|\, \Phi(z, \bar{z}) < 0\} \subset \mathbb{C}^n$$

была локально линейно выпуклой, достаточно, чтобы всюду на ∂D

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 \Phi(z^0)}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k > 0 \tag{13.1}$$

для всех комплексных векторов $w = (w_1, \dots w_n)$, $|w| = 1$, *удовлетворяющих условию*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi(z^0)}{\partial z_j} = 0, \tag{13.2}$$

где $z_{n+j} = z_j$, $w_{n+1} = \bar{w}_j$, $j = 1, \dots, n$, *и необходимо, чтобы всюду на* ∂D

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 \Phi(z^0)}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k \geq 0 \tag{13.3}$$

для тех же векторов w.

Доказательство. Достаточность. Обозначим через L_{z^0} касательную гиперплоскость к области D в точке $z^0 \in \partial D$, т.е.

$$L_{z^0} = \left\{ z \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi(z^0)}{\partial z_j} \big(z_j - z_j^0\big) = 0 \right\}.$$

Эта гиперплоскость единственная, и любая локальная опорная гиперплоскость необходимо совпадает с ней.

Разложим функцию Φ в окрестности $U(z^0)$ точки $z^0 \in \partial D$ в ряд Тейлора

$$\Phi(z) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi(z^0)}{\partial z_j} \big(z_j - z_j^0\big) + \mathrm{Re} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(z^0)}{\partial z_j \partial z_k} \big(z_j - z_j^0\big)\big(z_k - z_k^0\big) +$$
$$+ \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(z^0)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \big(z_j - z_j^0\big)\big(\bar{z}_k - \bar{z}_k^0\big) + o\big(|z - z^0|^2\big).$$

Отсюда для точек $z \in U(z^0) \cap L_{z^0}$ имеем

$$\Phi(z) = \left(\mathrm{Re} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(z^0)}{\partial z_j \partial z_k} \frac{(z_j - z_j^0)(z_k - z_k^0)}{|z - z^0|^2} + \right.$$

$$+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(z^0)}{\partial z_j\partial\bar z_k}\frac{(z_j-z_j^0)(\bar z_k-\bar z_k^0)}{|z-z^0|^2}\Bigg)\big|z-z^0\big|^2+o\big(|z-z^0|^2\big). \quad (13.4)$$

Из этого разложения функции Φ и тождества

$$\operatorname{Re}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_j\partial z_k}w_jw_k+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_j\partial\bar z_k}w_jw_k=$$
$$=\frac12\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_j\partial z_k}w_jw_k \quad (13.5)$$

для любых векторов w, где $z_{n+1}=\bar z_j$, $w_{n+1}=\bar w_j$, получаем для точек $z\in U(z^0)\cap L_{z^0}$ неравенство $\Phi(z)\ge 0$, которое и означает локальную выпуклость области D.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть регулярная область D локально линейно выпукла, но для некоторой точки $z^0\in\partial D$ и некоторого вектора $w'\in L_{z^0}$, $|w'|=1$,

$$\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{\partial^2\Phi(z^0)}{\partial z_j\partial z_k}w'_jw'_k<0. \quad (13.6)$$

С другой стороны, для точек $z\in U(z^0)\cap L_{z^0}$ имеет место разложение (13.4). Из этого разложения следует, что для точки $z'\in U(z^0)\cap L_{z^0}$, отвечающей касательному вектору w', где соответствие устанавливается формулами

$$w'_j=\big(z'_j-z_j^0\big)/\big|z'-z^0\big|,\quad j=1,\dots,n,$$

в силу предложения (13.6) и тождества (13.5), $\Phi(z',\bar z')<0$, что противоречит локальной линейной выпуклости области.

Лемма 13.1. *В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ двумерная плоскость γ, проходящая через точку x^0 гладкой гиперповерхности $M=\{x=(x_1,\dots,x_n)|f(x)=0\}$ и не касательная к M в точке x^0, пересекается с M в некоторой окрестности $U(x^0)$ точки x^0 по простой гладкой дуге. При этом $U(x^0)$ можно выбрать так, чтобы множество $\{x\,|\,f(x)<0\}\cap\gamma\cap U(x^0)$ было связно, а его замыкание содержало множество $M\cap\gamma\cap U(x^0)$.*

Лемма становится очевидной, если выбрать систему координат так, чтобы $\gamma=\{x|x_3=\dots=x_n=0\}$, и взять

$$U(x^0)=\{x\,|\,f^2(x)+x_j^2+x_3^2+\dots+x_n^2<\varepsilon,\ j=1,2\}.$$

Подробнее с этим вопросом можно ознакомиться в теории Морса [176].

Следующая лемма похожа на лемму 7.3, в ней ослаблено требование линейной выпуклости области на локальную линейную выпуклость, однако добавлено требование ограниченности области.

Лемма 13.2. *Ограниченная локально линейно выпуклая область D с гладкой границей пересекается с произвольной прямой не более чем по одной связной компоненте.*

Доказательство. Пусть область $D = \{z \,|\, \Phi(z, \bar{z}) < 0\}$ локально линейно выпукла. Предположим, что существует прямая γ, для которой множество $D \cap \gamma$ несвязно. Возьмем точки z^0, z^1, принадлежащие различным компонентам $D \cap \gamma$, и соединим их в D непрерывным путем $z = z(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, $z(0) = z^0$, $z(1) = z^1$. Рассмотрим семейство прямых, определяемых парами точек $z(\tau), z^0$, положив для простоты $z^0 = \Theta : \gamma(\tau) = \{z \,|\, z = a(\tau)t,\ t \in \mathbb{C}^1,\ a(\tau) = z(\tau)/|z(t)|\}$, $0 < \tau \le 1$, $\gamma(1) = \gamma$. Сечение $D \cap \gamma(\tau)$ изометрично открытому множеству $D_\tau = \{t \,|\, F(t, \tau) = \Phi(a(\tau)t, \overline{a(\tau)t}) \le 0\} \subset \mathbb{C}^1_t$, так как $z = a(\tau)t$ гомеоморфно отображает $\mathbb{C}^1_t$ на $\gamma(\tau) \subset \mathbb{C}^n$ и $|a(\tau)t - a(\tau)t'| = |a(\tau)||t - t'| = |t - t'|$. Точкам $z(\tau)$, $z^0 \in D \cap \gamma(\tau)$ соответствуют точки $t(\tau) = |z(\tau)|$, $\Theta \in D_\tau$. В силу непрерывности пути $z(\tau)$, для достаточно малых τ точки $z(\tau)$ и z^0 лежат в одной компоненте $D \cap \gamma(\tau)$. Положим $\tau_0 = \inf\{\tau \,|\, 0 < \tau \le 1$, для которых $z(\tau)$ и z^0 не лежат в одной компоненте $D \cap \gamma(\tau)\}$, $0 < \tau_0 \le 1$; z^0 и $z(\tau_0)$ лежат в различных компонентах $D \cap \gamma(\tau_0)$, так как, очевидно, множество значений τ, для которых z^0 и $z(\tau)$ лежат в одной компоненте, открыто. Обозначим эти компоненты B_0, B_1 (соответственно B'_0, B'_1 — компоненты D_{τ_0}, содержащие $0, t(\tau_0)$). Именно $B'_j \subset D_{\tau_0} \subset \Delta_{\tau_0} (j = 1, 2)$, где $\Delta_\tau = \{t : \Phi(t, \tau) \le 0\}$. Так как область D ограничена, то найдется круг V_R, такой, что $\Delta_\tau \subset V_R$ для $0 < \tau \le 1$.

Случай 1. $\Delta_{\tau_0} \backslash \bar{B}'_1$ замкнуто (Δ_{τ_0} несвязно). Тогда в $\mathbb{C}^1_t$ существуют открытые множества U и V, такие, что $\bar{B}'_1 \subset U$, $\Delta_{\tau_0} \backslash \bar{B}'_1 \subset V$, $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V \subset V_R$. Имеем $F(t, \tau_0) > 0$ на компакте $\bar{V}_R \backslash (U \cup V)$, так как $D_{\tau_0} = \{t \,|\, F(t, \tau_0) \le 0\} \subset U \cup V$. Функция $F(t, \tau) = \Phi(a(\tau), t, \overline{a(\tau)t})$ непрерывна при $t \in \mathbb{C}^1$, $0 < \tau \le 1$. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что при всех τ с $|\tau - \tau_0| < \delta$ и $t \in \bar{V}_R \backslash (U \cup V)$ будет $F(t, \tau) > 0$, т.е. $D_\tau \subset U \cup V$. При этом $0 \in B'_0 \subset \Delta_{\tau_0} \backslash \bar{B}'_1 \subset V$, а при δ, достаточно малых, $t(\tau) \subset B'_1 \subset U$. Таким образом, для $\tau_0 - \delta < \tau \le \tau_0$ z^0 и $z(t)$ принадлежат различным компонентам D_τ. Но это противоречит определению τ_0.

С л у ч а й 2. Множество $\Delta_{\tau_0}\backslash\bar{B}_1'$ (соответственно $\bar{D}\cap\gamma(\tau_0)\backslash\bar{B}_1$, где $\bar{D}=\{z\,|\,\Phi(z,\bar{z})\le 0\}$) незамкнуто. Тогда, так как $\bar{D}\cap\gamma(\tau_0)$ замкнуто, существует $\xi\in\partial B_1\subset\partial D\cap\gamma(\tau_0)$, в любой окрестности которой лежат точки $\bar{D}\cap\gamma(\tau_0)$, т.е. либо точки компонент $D\cap\gamma(\tau_0)$, отличных от B_1, либо точки $\partial D\cap\gamma(\tau_0)$, не являющиеся предельными для B_1. Согласно лемме 13.1, $\gamma(\tau_0)$ лежит в вещественной касательной гиперплоскости к ∂D в точке ξ. Так как D локально линейно выпукла, то существует гиперплоскость L, проходящая через точку ξ и такая, что $L\cap D\cap U(\xi)=\varnothing$, где $U(\xi)$ — некоторая окрестность точки ξ. В силу гладкости ∂D, эта гиперплоскость и лежит в вещественной касательной гиперплоскости (лемма 7.2). Прямая $\gamma(\tau_0)$ и гиперплоскость L (вещественные размерности соответственно 2 и $2n-2$), лежащие в одной вещественной гиперплоскости и имеющие общую точку, пересекаются по прямой. Следовательно, $\gamma(\tau_0)\subset L$. Но, так как $\xi\in\partial B_1$, то $B_1\cap U(\xi)\subset D\cap\gamma(\tau)\subset D\cap L\cap U(\xi)\ne\varnothing$ для любой окрестности $U(\xi)$ точки ξ; получено противоречие. Лемма доказана.

Лемма 13.3. *Если $D\cap\gamma\ne\varnothing$, где D — ограниченная локально линейно выпуклая область с гладкой границей, а γ — прямая, то $\overline{D\cap\gamma}=\bar{D}\cap\gamma$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 13.2, $D\cap\gamma$ связно. Имеем $\overline{D\cap\gamma}\subset\bar{D}\cap\gamma$. Пусть $\bar{D}\cap\gamma\backslash\overline{D\cap\gamma}\ne\varnothing$. Случай, когда $\bar{D}\cap\gamma\backslash\overline{D\cap\gamma}$ незамкнуто, невозможен (см. доказательство леммы 13.2, случай 2). Таким образом, $\bar{D}\cap\gamma\backslash\overline{D\cap\gamma}$ замкнуто, т.е. $\bar{D}\cap\gamma$ несвязно. Возьмем точки $z^0\in D\cap\gamma$, $z^1\in\bar{D}\cap\gamma\backslash\overline{D\cap\gamma}\subset\partial D$. Так как ∂D — гладкая гиперповерхность, то существует путь $z=z(\tau)$, $0\le\tau\le 1$, $z(1)=z^1$, $z(\tau)\in D$ для $0\le\tau<1$. Рассмотрим семейство прямых $\gamma(\tau)$, проходящих через точки z^0, $z(\tau)$, $0\le\tau\le 1$. Так как для $\tau=1$ z^0 и z^1 принадлежат различным компонентам $\bar{D}\cap\gamma(1)=\bar{D}\cap\gamma$, то и для τ, достаточно близких к 1, z^0 и $z(\tau)$ принадлежат различным компонентам $\bar{D}\cap\gamma(\tau)$ (см. доказательство леммы 13.2, случай 1), а следовательно, различным компонентам $D\cap\gamma(\tau)$. Но это противоречит лемме 13.2. Значит, $\bar{D}\cap\gamma=\overline{D\cap\gamma}$.

Теорема 13.2. *Пусть область $D\subset\mathbb{C}^n$ ограничена и имеет гладкую границу. Если D локально линейно выпукла, то она линейно выпукла.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть область, удовлетворяющая условиям теоремы, не является линейно выпуклой. Тогда найдется точка $\xi\in\partial D$ и гиперплоскость L (касательная к ∂D в точке ξ),

проходящая через ξ, не пересекающая D в некоторой окрестности $U(\xi)$ точки ξ и такая, что $D \cap L \neq \varnothing$. Возьмем точку $z^0 \in D \cap L$ и проведем через точки ξ, z^0 комплексную прямую $\gamma, \gamma \subset L$, $z^0 \in \gamma \cap D \neq \varnothing$, $\xi \in \bar{D} \cap \gamma$. При этом $\xi \notin \overline{\gamma \cap D}$, так как $U(\xi) \cap D \cap \gamma \subset U(\xi) \cap D \cap L = \varnothing$. По лемме 13.3, это невозможно.

Теорема доказана.

Результаты данного параграфа доказаны в предположении ограниченности области. Ниже будет показано, что для неограниченных областей с гладкой границей это неверно. Если бы такой результат был верен, это позволило бы в § 7 заменить требование линейной выпуклости области на локальную линейную выпуклость.

П р и м е р 13.2. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z|^2 + (\operatorname{Re} z_1^2)^2 < 1\}$. Покажем, что область D ограничена, с гладкой границей и линейно выпукла, но невыпукла.

А. D ограничена, так как лежит в шаре $\{z \,|\, |z| < 1\}$.

Б. D имеет гладкую границу. Действительно, функция $\Phi(z, \bar{z}) = |z|^2 - (\operatorname{Re} z_1^2)^2 - 1$ как полином от переменных $(z_1, \ldots, z_n), (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ бесконечное число раз дифференцируема

$$\Phi(z, \bar{z}) = z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n + \frac{(z_1^2 + \bar{z}_1^2)^2}{4} - 1,$$

а

$$\operatorname{grad} \Phi = \big\{\bar{z}_1 + z_1\big(z_1^2 + \bar{z}_1^2\big),\ \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n\big\}$$

равен нулю тогда и только тогда, когда $z = 0$. Следовательно, $\Phi(z, \bar{z}) \neq 0$ при $z \in \partial D$.

В. Покажем, что выполнено условие (13.1). Имеем (13.3)

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k = 2 \left\{ \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k + \right.$$

$$\left. + \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k \right\} \geq 2 \left[\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial z_k} w_j \bar{w}_k - \right.$$

$$\left. - \Big| \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k \Big| \right] = 2\big[|\tilde{w}|^2 + |w_1|^2\big(1 + 2|z_1|^2\big) -$$

$$- |w_1|^2 |3z_1^2 + \bar{z}_1^2|\big] \geq 2\big[|\tilde{w}|^2 + |w_1|^2\big(1 - 2|z_1|^2\big)\big], \qquad (13.7)$$

где $\tilde{w} = (w_2, \dots, w_n)$.

Если $z_1 = 0$, из (13.7) получаем оценку (13.1), так как $|w| \neq 0$.

Если $z_1 \neq 0$, то условие $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial z_j} w_j = 0$ можно переписать в виде $w_1 = -\langle \bar{\tilde{z}}, \tilde{w} \rangle [\bar{z} + z_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2)]$, где $\bar{\tilde{z}} = (\bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)$, $\langle \tilde{z}, \tilde{w} \rangle = \sum\limits_{j=2}^{n} z_j w_j$, откуда

$$|w_1|^2 \leq \frac{|\tilde{z}|^2 |\tilde{w}|^2}{|\bar{z}_1 + z_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2)|^2} \leq \frac{|\tilde{z}|^2 |\tilde{w}|^2}{|z_1|^2} \leq |\tilde{w}|^2 \frac{1 - |z_1|^2}{|z_1|^2}.$$

Последнее неравенство справедливо в окрестности границы ∂D. Учитывая оценку

$$|w_1|^2 |z_1|^2 \leq |\tilde{w}|^2 \big(1 - |z_1|^2\big),$$

неравенство (13.7) продолжим в

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k \geq 2\big[|w_1|^2 + |\tilde{w}|^2 \big(2|z_1|^2 - 1\big)\big] \tag{13.8}$$

при $z_1 \neq 0$.

Из чисел $(1 - 2|z_1|^2)$, $(2|z_1|^2 - 1)$ по крайней мере одно неотрицательно. Поэтому из неравенств (13.7), (13.8) следует оценка (13.1) при $z_1 \neq 0$. Этим, согласно теоремам 13.1 и 13.2, устанавливается линейная выпуклость D.

Г. D невыпукла, так как невыпукло ее сечение прямой $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \tilde{z} = 0,\ z_1 \in \mathbb{C}^1\}$, ограниченное кривой

$$x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2 = 1, \quad \tilde{z} = 0, \quad \text{где } x = \operatorname{Re} z_1, \quad y = \operatorname{Im} z_1.$$

Наглядный пример ограниченной невыпуклой сильно линейно выпуклой области легко получить, применяя автоморфизм пространства к выпуклой области.

В работе [163] для локально линейно выпуклых областей с гладкой границей в проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ доказана линейная выпуклость и сильная линейная выпуклость.

Отметим, что:

1) изучение локальной линейной выпуклости достаточно проводить для областей со связной границей, поскольку область с несвязной границей можно представить как пересечение областей со связными границами;

2) случай неограниченной области не сводится к случаю областей, вложенных в проективное пространство. Мы ничего не знаем о гладкости части границы, которая находится на бесконечно удаленной гиперплоскости. Естественно, что локальная выпуклость там есть, так как бесконечно удаленная гиперплоскость в область не входит. Если добавить требование гладкости границы в точках этой гиперплоскости, то задача сведется к изученному проективному случаю. Но нам априори это неизвестно и, как мы увидим дальше, вызывает дополнительные эффекты.

Дальнейшей целью является построение примера локально линейно выпуклой, но не линейно выпуклой области.

Перейдем к последовательному построению примера. Начнем с вещественного случая.

П р и м е р 13.3. Пусть D_1 — плоская область в $\mathbb{R}^2$,

$$D_1 = \big\{(x,y) \mid \big[\big(x^2+y^2<4\big) \wedge (x<0)\big] \vee \big[x^2+(y-1)^2<1\big] \vee \\ \vee \big[x^2+(y+1)^2<1\big]\big\}.$$

Очевидно, что эта область локально выпукла и гладкая во всех точках границы, за исключением начала координат $(0,0)$. Пусть теперь $D_2 = D_1 \times I \subset \mathbb{R}^3$, где I — отрезок $[-1,1]$. Эта область локально выпукла во всех точках границы, за исключением отрезка $J = (0,0)\times I$, и гладкая во всех точках границы, за исключением отрезка J и остова $T = \partial D_1 \times \{-1 \cup 1\}$.

Приблизим эту область изнутри последовательностью областей D_ε, гладких во всех точках границы, за исключением отрезка J. Заметим, что точки остова T однозначно задаются цилиндрическими координатами (ρ,φ,z), где $-\pi<\varphi<\pi$, $z=-1$ или 1, а ρ однозначно определяется каждой парой координат (φ,z). Для каждого ε, $0<\varepsilon<1/2$, рассмотрим в области D_2 пару замкнутых кривых

$$C_1 = \left(\rho - \frac{|\varphi|\varepsilon}{\pi}, \varphi, 1 - \frac{|\varphi|\varepsilon}{\pi}\right), \quad C_2 = \left(\rho - \frac{|\varphi|\varepsilon}{\pi}, \varphi, -1 + \frac{|\varphi|\varepsilon}{\pi}\right).$$

Каждое сечение полуплоскостью, проходящей через отрезок J в направлении угла φ, вырезает из области D_2 прямоугольник $D(\varphi)$, который пересекает каждую из кривых C_1 и C_2 в одной точке. Проведем операцию округления двух углов каждого прямоугольника. Заменим пару отрезков $([\rho - |\varphi|\varepsilon/\pi, \rho], \varphi, 1)$ и $(\rho, \varphi, [1 - |\varphi|\varepsilon/\pi, 1])$ на четверть окружности с центром на кривой C_1, а пару отрезков

$([\rho - |\varphi|\varepsilon/\pi, \rho], \varphi, -1)$ и $(\rho, \varphi, [-1 + |\varphi|\varepsilon/\pi, -1])$ на четверть окружности с центром на кривой C_2. Сглаженный прямоугольник $D(\varphi)$ обозначим $D_\varepsilon(\varphi)$. Полученная таким образом область $D_\varepsilon = \cup_\varphi D_\varepsilon(\varphi)$ будет гладкой и локально выпуклой во всех точках границы, за исключением отрезка J. В этой области можно уточнить один результат Паскалини [33]. Он показывает, что множество точек невыпуклости локально выпуклой функции (или часть границы, где локальная выпуклость нарушается) может полностью лежать в $(n-2)$-мерной плоскости.

П р и м е р 13.4. Используя построенные области D_2 и D_ε, построим похожие области и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, которое будем рассматривать как комплексное пространство $\mathbb{C}^2$. В комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ рассмотрим полупространство $\mathbb{C}\times\mathbb{R}_+$ и верхние половины областей

$$D_2^+ = \{(x, y, z) \in D_2 \,|\, z \geq 0\}, \quad D_\varepsilon^+ = \{(x, y, z) \in D_\varepsilon \,|\, z \geq 0\}$$

как изображения полных областей Гартогса [241] G, G_ε соответственно. Области G и G_ε получаются в $\mathbb{C}^2$ вращением или аналитически, заменой третьей координаты z на $\sqrt{u^2 + \nu^2}$. Систему координат выбираем так, чтобы 2-плоскость $(0, 0, u, \nu)$ была комплексной прямой.

Полученные области G и G_ε имеют следующие свойства:

а) $G = D_1 \times D$, где D — плоский круг единичного радиуса;

б) области G_ε приближают область G изнутри, они гладкие во всех точках границы, за исключением диска $D_0 = (0, 0) \times D$, и вещественно локально выпуклые в этих же точках.

Отсюда следует, что все построенные области G_ε будут локально линейно выпуклыми во всех точках границы $\partial G_\varepsilon \backslash D_0$ так как каждая вещественная гиперплоскость, проходящая через точку $z_0 \in \partial G_\varepsilon \backslash D_0$, содержит единственную комплексную гиперплоскость, проходящую через эту же точку. В точках диска D_0 области будут даже линейно выпуклыми, так как прямая $z_1 = 0$ содержит диск D_0 и не пересекает ни одной из областей G и G_ε для каждого ε. Рассмотрим проективное преобразование пространства $\mathbb{C}^2$, переводящее прямую $z_1 = 0$ в бесконечно удаленную прямую. Это проективное отображение переводит области G и G_ε соответственно в некоторые области W и W_ε. Полученные таким образом области W_ε гладкие во всех конечных точках границы и локально выпуклы в них. Кроме этого у каждой из них граница ∂W_ε связна и представляет собой трехмерное многообразие в $\mathbb{C}P^2$. Если бы эти области были линейно выпуклыми,

то, согласно лемме 7.3, они были бы и сильно линейно выпуклыми. А так как они аппроксимируют область W, то эта область также была бы сильно линейно выпуклой. Отсюда следует сильная линейная выпуклость области, так как свойство сильно линейной выпуклости инвариантно относительно проективных преобразований. Но, как показано в теореме 11.1, область G не может быть сильно линейно выпуклой, поскольку один из ее сомножителей по построению не является выпуклой областью. Отсюда следует, что существует $\varepsilon > 0$, начиная с которого построенные неограниченные области не будут линейно выпуклыми. Это завершает доказательство существования контрпримера к рассмотренной в начале гипотезе.

На следующем наглядном примере в вещественном трехмерном евклидовом пространстве покажем почему доказательство леммы 13.2 не может быть применено в неограниченном случае.

П р и м е р 13.5. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ область

$$D = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, z > \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \right\}$$

и плоскость $L = \{(x, y, z) \,|\, y = 0\}$. Очевидно, что $L \cap D$ состоит из двух компонент не имеющих общей точки границы. Выберем две точки $z(0) = (-1, 0, 1)$ и $z(1) = (1, 0, 2)$ в области D. Пусть $w_t = \{(x, y, z) \,|\, x = -\cos(\pi t),\ y = \sin(\pi t),\ z = 3t - 1\}$ — путь в D, который соединяет эту пару точек. Теперь рассмотрим непрерывное семейство двумерных плоскостей L_t, каждая из которых проходит через три точки $z(0)$, w_1, $(0, 0, 0)$. Все сечения $L_t \cap D$ состоят из одной компоненты для всех t, $0 < t < 1$, однако для последней плоскости $L_1 \cap D = L \cap D$. Кстати, все границы сечений гладкие кривые.

Определение 13.2. Параллельное множество K_ε на расстоянии ε от сильно линейно выпуклого множества K есть объединение всех шаров радиуса ε, центрами которых являются точки K.

Известно, что в выпуклом случае использование параллельных множеств позволяет из выпуклых множеств с негладкой границей получать выпуклые множества с гладкой границей. Естественно попытаться применить эту технику и в комплексном случае. Приведем примеры, которые показывают, что таким образом не всегда удается улучшить негладкую границу даже в сильно линейно выпуклом случае.

П р и м е р 13.6. Рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z \,|\, z = x + iy\}$ совокупность окружностей $S_n = \{z \,|\, (x - 1/2n)^2 + y^2 = 1/4n^2\}$

и линейно выпуклое множество $K = \cup_n S_n \subset \mathbb{C}^n$. Очевидно, что для произвольного ε, $0 < \varepsilon < 1/4$, параллельное множество K_ε содержит ненулевой одномерный цикл, причем граница K_ε связна. Отсюда и из леммы 7.3 следует, что множество $\operatorname{int} K_\varepsilon$ не может быть линейно выпуклой областью с гладкой границей, иначе оно было бы сильно линейно выпуклой областью, а ведь сечение сильно линейно выпуклой области прямой односвязное, т.е. ненулевых циклов.

П р и м е р 13.7. Превратим предыдущий компакт в сильно линейно выпуклый. Пусть $A = \{z \,|\, z = x + iy,\ |y| \geq x^4\} \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим $F = K \cap A \subset \mathbb{C}^n$, где K взято из примера 13.6.

Очевидно, что F — связный и односвязный компакт, лежащий в одномерной комплексной плоскости. Поэтому он сильно линейно выпуклый. Однако и здесь параллельные множества F_ε не будут гладкими сильно линейно выпуклыми аппроксимациями F. Максимальное расстояние между точками соседних окружностей S_n и S_{n+1} легко оценивается через $2/n - 2/(n+1) = 2/n(n+1)$. Вырез в каждой окружности S_n, входящей в F, имеет длину меньшую $2/n^4$. Поэтому при $\varepsilon = 1/n^4$ F_ε содержит ненулевой одномерный цикл (так как точка $x = 2/(n+1) + 1/n(n+1) = (2n+1)/n(n+1) \notin F_\varepsilon$) и, как в примере 13.6, не может быть сильно линейно выпуклым. Заметим, что последовательность ε_n таких, что граница F_ε не будет многообразием (а именно, ε_n, равные половине длины выреза окружности S_n, для каждого n), можно легко подобрать.

Глава 3

Комплексные оболочки

В настоящей главе исследуются более глубокие свойства преимущественно сильно линейно выпуклых множеств. Показано, что для таких множеств естественно справедлив аналог многих теорем функционального анализа, например, теорем Хана–Банаха, Крейна–Мильмана и др.

§ 14. Теорема Хана–Банаха

Пусть $\mathfrak{E}$ — топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ (комплексное ТВП).

Определение 14.1. Множество $E \subset \mathfrak{E}$ (область или компакт) назовем сильно линейно выпуклым, если:

а) все сечения E произвольными прямыми ацикличны;

б) все канонические проекции на комплексно линейные подмногообразия удовлетворяют свойству а).

Замечание 14.1. Если $\mathfrak{E}$ — конечномерное пространство $\mathbb{C}^n$, то условие б) определения следует из условия а) (см. следствие 9.2). В бесконечном случае аналогичный факт автору не известен.

Замечание 14.2. Из определения очевидно, что сечения и проекции сильно линейно выпуклых множеств будут сильно линейно выпуклы.

Теорема 14.1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — сильно линейно выпуклая область и M — комплексное линейное многообразие, непересекающее-*

ся с D. Тогда существует гиперплоскость H, содержащая M и не пересекающаяся с D.

Доказательство. Можно ограничится случаем, когда M проходит через начало координат. Пусть H — комплексное линейное многообразие максимальной размерности, содержащее M и не пересекающее D. Покажем что H — гиперплоскость или, иначе, что пространство $\mathbb{C}^n/H$ комплексно одномерно. Пусть π — каноническая проекция D на $F = \mathbb{C}^n/H$, $B = \pi(D)$, согласно следствию 9.2, есть непустая сильно линейно выпуклая область, не содержащая нулевой точки. Поэтому, если $\dim_{\mathbb{C}} F > 1$, то, согласно теореме 9.2, через начало координат можно провести гиперплоскость λ, не пересекающую B. Тогда $\pi^{-1}(\lambda) \supset H \supset M$ — гиперплоскость пространства $\mathbb{C}^n$, не пересекающая D.

Теорема доказана.

Распространим доказанную выше теорему на бесконечномерный случай.

Определение 14.2. Множество, наделенное отношением порядка по включению, называется совершенно упорядоченным, если любые два его элемента A и B связаны отношением $A \subset B$ или $A \supset B$.

Определение 14.3. Упорядоченное множество называется индуктивным, если всякое его совершенно упорядоченное подмножество обладает максимальным (минимальным) элементом.

Теорема Хана–Банаха (геометрическая форма). *Пусть $\mathfrak{E}$ — комплексное ТВП, A — непустое сильно линейно выпуклое открытое множество в $\mathfrak{E}$ и M — линейное многообразие, не пересекающееся с A. Тогда существует замкнутая гиперплоскость H, содержащая M и не пересекающая A.*

Доказательство. Можно ограничиться случаем, когда M проходит через начало координат. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех комплексных векторных подпространств, содержащих M и не пересекающихся с A. Семейство $\mathfrak{M}$ не пусто, поскольку содержит M, и, очевидно, индуктивно; кроме того, если $N \in \mathfrak{M}$, то также $\bar{N} \in \mathfrak{M}$. Пусть H — максимальный элемент в $\mathfrak{M}$, очевидно, что H — замкнуто. Остается показать, что H — гиперплоскость, или, другими словами, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{E}/H = 1$.

Пусть π — каноническая проекция $\mathfrak{E}$ на $F = \mathfrak{E}/H$; $B = \pi(A)$ есть непустое сильно линейно выпуклое открытое множество в F не содержащее нулевой точки, и, по определению H, в F нет ненулевого комплексного векторного подпространства, которое бы не пе-

ресекалось с B. Таким образом, достаточно показать, что при этих условиях F комплексно одномерно. Предположим противное; тогда $\dim_{\mathbb{C}} F \geq 2$. Проведем через начало координат двумерное комплексное линейное многообразие T, пересекающее B. Тогда $\pi^{-1}(T) \cap A$ — сильно линейно выпуклая область и $\pi(\pi^{-1}(T) \cap A) = T \cap B$. Тогда $T \cap B$ — сильно линейно выпуклая область в T, не содержащая начала координат. Согласно теореме 13.4, существует в T прямая λ через начало координат, не пересекающая $T \cap B$. Но тогда $\pi^{-1}(\lambda)$ есть замкнутое линейное многообразие, не пересекающееся с A и содержащее H как собственное подмногообразие. Противоречие с максимальностью H доказывает теорему.

Замечание 14.3. Заметим, что во всех классических руководствах по функциональному анализу комплексный вариант теоремы Хана–Банаха доказывается для выпуклых областей, когда существует и вещественная гиперплоскость, содержащая данную комплексную плоскость [34, 247]. В случае же сильно линейно выпуклых областей, даже с гладкой границей, пример 13.2 показывает, что вещественной гиперплоскости, не пересекающей область, может и не существовать.

Замечание 14.4. Отметим также, что теоремы 14.1 и 14.2 вообще говоря, неверны для линейно выпуклых областей, как это будет видно из приведенного ниже примера.

П р и м е р 14.1. Компакт $K = \{z \,|\, |z_2|^2 + |z_3|^2 \leq 2$, а $(z_1 = 0$ и $|z_2| \geq 1)$ или $(z_1 = 1$ и $|z_3| \geq 1)\}$ в $\mathbb{C}^3$ линейно выпуклый, но его каноническая проекция π на гиперплоскость $z_1 = 0$ будет шаром, из которого удален бикруг и, очевидно, что через центр этого шара нельзя провести никакой прямой, не пересекающей $\pi(K)$. Следовательно, образ $\pi(K)$ уже не является линейно выпуклым. Прообраз центра шара при проекции π задает прямую $z_2 = z_3 = 0$, не пересекающую K, но через которую нельзя провести никакой гиперплоскости, не пересекающей K. Если теперь рассмотреть линейно выпуклую область, аппроксимирующую K извне (а такая область существует в силу приложения 2.14), то она обладает теми же свойствами.

Теорема 14.3. *Пусть $\mathfrak{E}$ — комплексное ТВП, A — открытое сильно линейно выпуклое подмножество в $\mathfrak{E}$ и M — векторное комплексное подмножество в $\mathfrak{E}$, $M \cap A = \varnothing$. Тогда существует непрерывная комплексно линейная форма на $\mathfrak{E}$ такая, что*

$$f(M) = 0 \quad \text{и} \quad f(A) \neq 0, \quad \text{т.е.} \quad f(z) \begin{cases} = 0 & \text{при } z \in M, \\ \neq 0 & \text{при } z \in A. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно теореме 14.2 существует замкнутая гиперплоскость H, которая не пересекает A. Каждая замкнутая гиперплоскость определяется некоторым уравнением $f(z) = 0$, где f — непрерывная комплексно линейная форма на $\mathfrak{E}$. По построению H содержит M и, следовательно, $f(z) = 0$ при $z \in M$. С другой стороны, $H \cap A = \varnothing$. Поэтому $f(z) \neq 0$, если $z \in A$.

§ 15. Комплексные оболочки (теорема Крейна–Мильмана)

Пусть $\mathfrak{E}$ — топологическое векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Определение 15.1. c-интервалом с центром z радиуса r назовем пересечение шара радиуса r с центром в точке z с прямой, проходящей через точку z.

Определение 15.2. Скажем, что точка $z \in E \subset \mathfrak{E}$ есть c-экстремальная точка множества E, если в E нет никакого c-интервала, содержащего z.

Замечание 15.1. Если $E \subset \mathbb{C}$, то все точки границы ∂E будут c-экстремальными.

Определение 15.3. Скажем, что комлексно линейное (c-линейное) многообразие M в $\mathfrak{E}$ есть опорное многообразие множества K, если оно имеет общую точку с K и обладает следующим свойством: какова бы ни была точка $z \in K \cap M$, каждый c-интервал, содержащийся в K и содержащий z, необходимо лежит в M.

Замечание 15.2. Сказать, что c-линейное многообразие, сводящееся к точке z_0 множества K, есть опорное многообразие этого множества, — все равно, что сказать, что z_0 есть c-экстремальная точка множества K.

Теорема 15.1. *Пусть K — компактное линейно выпуклое множество в отделимом локально выпуклом пространстве $\mathfrak{E}$. Тогда каждая замкнутая опорная гиперплоскость H множества K содержит по крайней мере одну его c-экстремальную точку.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех замкнутых опорных многообразий множества K, содержащихся в H; $\mathfrak{T}$ не пусто, поскольку $H \in \mathfrak{T}$. Упорядочим $\mathfrak{T}$ по включению и покажем, что $\mathfrak{T}$ индуктивно по этому отношению порядка. Действительно, пусть G — совершенно упорядоченное подмножество в $\mathfrak{T}$. Все сводится к доказательству того, что существует минимальный элемент, т.е. $N =$

$\bigcap\limits_{M\in G} M$ будет опорным многообразием K, ибо замкнутость N очевидна. А для этого нужно только проверить, что $N\cap K=\bigcap\limits_{M\in G}(M\cap K)$ не пусто. Но, когда M пробегает G, пересечения конечных наборов множеств вида $M\cap K$ суть тоже множества этого вида, поскольку G совершенно упорядочено. Таким образом (поскольку $M\cap K$, по предположению, не пусто ни для какого $M\in G$), эти замкнутые множества образуют вложенную систему компактов в компактном пространстве K, что и доказывает, что $N\cap K$ не пусто. Поэтому в силу леммы Цорна [35] в $\mathfrak{T}$ существует минимальный элемент N_0. Покажем, что N_0 сводится к точке. Предположим противное. Тогда $N_0\cap K$ будет непустым компактным линейно выпуклым множеством в замкнутом c-линейном многообразии N_0 размерности, большей нуля, следовательно, $N_0\cap K$ будет обладать замкнутой опорной плоскостью L в N_0. Но L – опорное многообразие множества K. Действительно, если $z\in L\cap K$ и S — c-интервал, содержащий z и лежащий в K, то S содержится в N_0, поскольку $z\in N_0$ и N_0 — опорное многообразие множества K. Таким образом, $S\subset N_0\cap K$, и так как L — опорная гиперплоскость множества $N_0\cap K$ в N_0, то $S\subset L$, чем наше утверждение доказано. Но тогда, очевидно, $L\in\mathfrak{T}$, $L\subset N_0$ и $L\neq N_0$ в противоречии с минимальностью N_0, и предложение доказано.

Определение 15.4. Пусть $E\subset\mathbb{C}$ — произвольное множество. Назовем c-комбинацией точек E и обозначим $[E]$ дополнение к объединению неограниченных компонент множества $\mathbb{C}\backslash E$.

Определение 15.5. Пусть $E\subset\mathbb{C}^n$ — произвольное множество. Скажем, что точка z принадлежит c-комбинации точек из E, если существует сечение множества E прямой γ такой, что $z\in[E\cap\gamma]$. Множество таких точек из $\mathbb{C}^n$ назовем c-комбинацией точек E и тоже обозначим $[E]$; m-кратную c-комбинацию определим по индукции $[E]^m=[[E]^{m-1}]$.

Пусть $E\subset\mathfrak{E}$. Рассмотрим всевозможные линейные проекции $\mathfrak{E}$ на прямые. Если $\pi:\mathfrak{E}\to\lambda$ — линейная проекция на прямую, то для образа $\pi(E)\subset\lambda$ рассмотрим c-комбинацию $[\pi(E)]$ и ее полный прообраз $\pi^{-1}[\pi(E)]$.

Определение 15.6. c-оболочкой множества E назовем множество $\hat{E}=\bigcap\limits_{\pi}\pi^{-1}[\pi(E)]$.

Из построения очевидно, что полученное множество $\hat{E}$ будет линейно выпуклым, так как линейно выпукло каждое множество $\pi^{-1}[\pi(E)]$.

Для множества $E \subset \mathbb{C}^n$ обозначим: $\operatorname{cext} E$ — множество его c-экстремальных точек, а $\operatorname{cconv} E$ — c-оболочку E.

П р и м е р 15.1. Пусть K — компакт, лежащий в трехмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, y_1, x_2) \,|\, z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2, y_2 = 0\}$, где $K = \{(x_1, y_1, x_2) \,|\, (x_1 + |y_1| = 0,\ -1 \le x_1 \le 0) \wedge [[(x_2 = 0) \vee (x_2 = 2(x_1 + 1))$ при $y_1 \le 0] \vee [(x_1 + x_2 = 0) \vee (x_2 = x_1 + 2)$ при $y_1 > 0]]\}$. Тогда при канонической проекции $\pi_1(K)$ компакта на прямую $z_2 = 0$, $\pi(z_1, z_2) = z_1$ получим ацикличный компакт $K_1 = \{(x_1, y_1) \,|\, x_1 + |y_1| = 0,\ -1 \le x_1 \le 0\}$, а при проекции π_2 на прямую $z_1 = 0$ параллельно прямой, проходящей через пару точек $(-1-i, 0)$, $(-1+i, 0)$, получим компакт $\pi_2(K) = K_2$, состоящий также из двух отрезков, поскольку отрезки $[x_1 = y_1,\ -1 \le x_1 \le 0, x_2 = 0]$ и $[x_1 = -y_1, -1 \le x_1 \le 0,\ x_2 = -x_1]$, $[x_1 = y_1,\ -1 \le x_1 \le 0,\ x_2 = 2(x_1 + 1)]$ и $[x_1 = -y_1,\ -1 \le x_1 \le 0,\ x_2 = x_1 + 2]$ попарно отождествляются при этой проекции. При канонической проекции π_3 на прямую $z_1 = 0$, $\pi_3(z_1, z_2) = z_2$, очевидно, получим отрезок $K_3 = \{z \,|\, z_1 = 0,\ y_2 = 0,\ 0 \le x_2 \le 2\}$. Поэтому $[K_1] = K_1$, $[K_2] = K_2$ и $[K_3] = K_3$. Легко видеть, что $K = \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2) \cap \pi_3^{-1}(K_3)$. При всех других проекциях образ $\pi(K)$ будет ненулевым одномерным циклом. Поэтому $\pi(K) \ne [\pi(K)]$ при $\pi \ne \pi_1$, π_2 или π_3. Но $\hat{K} = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}[\pi(K)] \subset \pi_1^{-1}(K_1) \cap \pi_2^{-1}(K_2) \cap \pi_3^{-1}(K_3) = K$.

Следовательно, $\hat{K} = K$. Этот пример показывает, что, вообще говоря, $\pi(\hat{K}) \ne [\pi(K)]$.

Лемма 15.1. *Если множество E является c-оболочкой, то $E = [E]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $z \in [\gamma \cap E]$ для некоторой прямой γ, то $\pi(z) \in [\pi(\gamma \cap E)]$ для всех проекций π, так как ограничение π на каждую прямую или гомеоморфизм, или проекция в точку.

Изучим подробнее процедуру образования c-оболочки. Согласно предложению 2.19, $[\pi(E)]$ гомеоморфно дополнению в $\overset{o}{\mathbb{C}} = \overset{o}{\gamma}$ к связной компоненте, содержащей начало координат, некоторого сечения $\gamma \cap E^*$, где γ — прямая. Обозначим эту компоненту $]\gamma \cap E^*[$. Более того, её можно представить так: $(\pi^{-1}[\pi(E)])^*$. Но объединение $\bigcup\limits_{\gamma}]\gamma \cap E^*[$, вообще говоря, не есть линейно выпуклым множеством. Однако, согласно предложению 2.12, $(\bigcup\limits_{\pi}(\pi^{-1}[\pi(E)])^*)^* = \bigcap\limits_{\pi}(\pi^{-1}[\pi(E)])^{**} = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)] = \hat{E}$. Отсюда следует такое предложение.

Предложение 15.1. $\hat{E} = (\bigcup\limits_{\gamma}]\gamma \cap E^*[)^*$.

Доказательство следует из равенства $\hat{E} = (\bigcup\limits_{\pi}(\pi^{-1}[\pi(E)])^*)^* = \bigcup\limits_{\gamma} (]\gamma \cap E^*[)^*$.

Это предложение дает нам еще один способ построения c-оболочки. Отсюда следует такое утверждение.

Предложение 15.2. *Компакты $K \subset \mathbb{C}^n$, сечения которых касательными гиперплоскостями связны, обладают сильно линейно выпуклой c-оболочкой.*

Доказательство. Пусть $\Theta \in K$. Тогда из теоремы 10.1 следует, что K^* состоит из объединения попарно непересекающихся сильно линейно выпуклых областей. Выберем компоненту $D \subset K^*$, содержащую начало координат. Тогда $\hat{K} = \bigcup\limits_{\pi}\pi^{-1}[\pi(K)] = \bigcup\limits_{\gamma}(]\gamma \cap D[)^* = (\bigcup\limits_{\gamma}\gamma \cap D)^* = D^*$, в силу следствия 9.1, — сильно линейно выпуклый компакт.

Замечание 15.3. Отметим также, что сопряженное множество к c-оболочке, вообще говоря, не будет c-оболочкой. Это легко увидеть из примера 15.1 и предложения 15.1. Если K — компакт из примера 15.1, то $\hat{K} = K$, но, согласно предложению 15.1, $\hat{K} = (\bigcup\limits_{\gamma}]\gamma \cap K[)^* = (K_1)^*$, где $K_1 = \{(x_1, y_1, x_2) \,|\, x_1 + |y_1| = 0,\ -1 \le x_1 \le 0,\ (x_2 = 0) \vee (x_2 = 2(x_1 + 1))\}$ — часть компакта K, состоящая из двух отрезков.

Теорема 15.2. *c-оболочка линейно выпуклого компакта в $\mathbb{C}^n$ совпадает с совокупностью не более чем n-кратных c-комбинаций своих c-экстремальных точек.*

Доказательство. В силу линейной выпуклости c-оболочки произвольного компакта, не нарушая общности, можем считать, что K совпадает со своей c-оболочкой $\hat{K}$. Будем доказывать теорему индукцией по числу измерений n. Теорема очевидна при $n = 1$, так как $K = [\partial K]$, а все точки из ∂K c-экстремальны.

Предположим теперь, что теорема верна для $n \le k$, и докажем ее для $n = k+1$. Уточним (сузим) понятие касательной гиперплоскости к компакту (ср. § 10).

Определение 15.7. Скажем, что гиперплоскость $\mathfrak{L}$ касательна к компакту K, если её можно представить в виде $\mathfrak{L} = \{z \,|\, \langle w_0, z\rangle = 1\}$, где $w_0 \in \partial K^*$.

Нетрудно убедиться, что сечение c-оболочки компакта касательной плоскостью также будет c-оболочкой. Можем считать,

во-первых, что K не лежит в гиперплоскости, иначе теорема справедлива по индуктивному предположению, во-вторых, что K имеет в $\mathbb{C}^{k+1}$ непустую внутренность. В противном случае, через произвольную его точку, в силу линейной выпуклости K, можно провести касательную гиперплоскость комплексной размерности k и это только сократило бы цепочку рассуждений. Итак, $K \subset \mathbb{C}^{k+1}$, $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, $z^0 \in \operatorname{int} K$.

Рассмотрим произвольную прямую λ через точку z^0, и пусть $\partial(K \cap \lambda)$ — граница в λ множества $K \cap \lambda$. Рассмотрим произвольную точку $z^1 \in \partial(K \cap \lambda) \subset \partial K$. В силу линейной выпуклости K, существует касательная гиперплоскость L к K, проходящая через точку z^1, её комплексная размерность равна k. Поэтому, в силу предположения индукции, для множества $K \cap L$ наша теорема справедлива. Следовательно, точка z^1 принадлежит не более чем k-кратной c-комбинации c-экстремальных точек множества $K \cap L$.

Покажем теперь, что если z^2 — c-экстремальная точка множества $K \cap \mathfrak{L}$, то z^2 — c-экстремальная точка компакта K. Предположим противное: z^2 не является c-экстремальной точкой компакта K, т.е. для некоторой прямой λ (заведомо не лежащей в L и, следовательно, пересекающей её по единственной точке z) $z^2 \in [\partial U]$, где U — c-интервал в λ, $z^2 \notin \partial U$, $\partial U \subset K$. Из предложений 2.19 и 2.20 легко убедится, что точки $\xi \in U$ задают множество гиперплоскостей $L(\xi) = \{w \,|\, \langle \xi, w \rangle = 1\}$, проходящих через фиксированную $(k-1)$-плоскость T или параллельных и не пересекающих область $D = K^*$. Множество $A = \bigcup\limits_{\xi \in \operatorname{int} U} L(\xi)$ будет открытой окрестностью любой точки $w \in L(z^2) \backslash T$, $L(z^2) = L(\xi)$ при $\xi = z^2$, $A \cap D = \varnothing$. Но заметим, что z^2 лежит в касательной гиперплоскости $\mathfrak{L}$, следовательно, гиперплоскость $\mathfrak{L}$ задается уравнением $\mathfrak{L} = \{z \,|\, \langle w^0, z \rangle = 1,\ w^0 \in \partial D\}$ ($\mathfrak{L}$ можно считать не проходящей через начало координат даже в случае $\operatorname{int} K = \varnothing$, так как рассматриваем невырожденный случай, т.е. K не лежит в гиперплоскости). Точка $w^0 \in L(z^2)$, так как $\langle w^0, z^2 \rangle = 1$, кроме того, $w^0 \notin T$ поскольку, аналогично предложению 2.7, легко убедится, что точки из T задают гиперплоскости, содержащие прямую λ, а L не содержит λ. Поэтому $w^0 \in \operatorname{int} A$ и $w^0 \notin D^*$. Получим противоречие с условием $w^0 \in \partial D$. Теперь очевидно, что точка $z^0 \in [\partial(K \cap \lambda)]$ принадлежит не более чем $(k+1)$-кратной c-комбинации c-экстремальных точек множества K.

Теорема доказана.

Ясно, что никакая c-экстремальная точка не может быть получена c-комбинацией других точек компакта K, поэтому справедливы следствия.

Следствие 15.1. Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — компакт и $\hat{K}$ — его c-оболочка, совпадающая с c-комбинацией $[K]^m$. Тогда каждая c-экстремальная точка множества $\hat{K}$ принадлежит K.

Следствие 15.2. В пространстве $\mathbb{C}^n$ любую точку c-оболочки $\hat{K} = [K]^m$ можно представить в виде не более чем n-кратной c-комбинации точек из K.

Следствие 15.3. Для того чтобы c-оболочка линейно выпуклого компакта совпала с ним, необходимо, чтобы все сечения его прямыми были односвязны.

Следствие 15.4. Для того чтобы c-оболочка линейно выпуклого компакта K совпала с ним, необходимо, чтобы все проекции K^* были связны.

Последнее следствие получается из предыдущего применением предложений 2.19 и 2.20.

П р и м е р 15.2. Пусть $S^2_+ \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^2$ — полусфера в трехмерном вещественном евклидовом пространстве $S^2_+ = \{(x_1, y_1, x_2) \,|\, x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 = 1,\ y_1 \geq 0\}$, где z_1, z_2 — координаты точек в $\mathbb{C}^2$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Легко видеть, что $(S^2_+)^{**} = K_+ = \{(x_1, y_1, x_2) \,|\, x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ y_1 \geq 0\}$ и K_+ — выпуклый компакт, совпадающий со своей c-оболочкой. Но произвольное сечение S^2_+ прямой совпадает с сечением S^2_+ вещественной прямой или вещественно двухмерной плоскостью вида $x_2 = \mathrm{const}$ в $\mathbb{R}^3$. Все такие сечения односвязны. Поэтому $[S^2_+] = S^2_+ \neq K_+$. Этот пример показывает, что теорема 15.2 и её следствия, вообще говоря, неприменимы к линейно невыпуклым компактам.

Отметим также, что условие связности всех проекций линейно выпуклого множества в следствии 15.4 далеко ещё не значит связности самого множества. Как показывает следующий пример, оно может иметь даже бесконечное число компонент.

П р и м е р 15.3. Пусть, как и в примере 3.1, компакт $K \subset \mathbb{C}^2$ лежит в вещественной гиперплоскости $L = \{(z_1, z_2) \,|\, z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2,\ y_1 = y_2\}$. В L рассмотрим систему координат (x_1, x_2, y_1). Возьмём в L куб $A = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 0 \leq x_1 \leq 8,\ 0 \leq x_2 \leq 8,\ 0 \leq y_1 \leq 8\}$. На первом шаге удалим из него следующие параллелепипеды:

$$B_1 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 1 < x_1 < 2,\ 0 \leq x_2 \leq 8,\ 1 < y_1 < 6\},$$

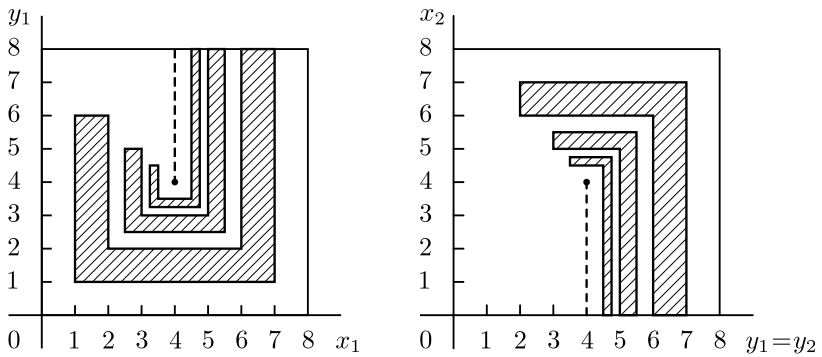


Рис. 6.

$$C_1 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 2 \le x_1 \le 6,\ 0 \le x_2 \le 8,\ 1 < y_1 < 2\},$$
$$D_1 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 6 < x_1 < 7,\ 0 \le x_2 \le 8,\ 1 < y_1 \le 8\},$$
$$E_1 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 0 \le x_1 \le 8,\ 6 < x_2 < 7,\ 2 < y_1 < 7\},$$
$$F_1 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 0 \le x_1 \le 8,\ 0 \le x_2 \le 6,\ 6 < y_1 < 7\}.$$

Легко видеть (рис. 6), что компакт $A_1 = A \backslash (B_1 \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup F_1)$ — линейно выпуклый и состоит из двух связных компонент (одна из которых — параллелепипед $\Pi_1 = \{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 2 \le x_1 \le 6,\ 0 \le x_2 \le 6,\ 2 \le y_1 \le 6\}$. Проекция A_1 на произвольную прямую связна.

Продолжим процесс удаления параллелепипедов: на n-м шаге будем удалять параллелепипеды:

$$B_n = \left\{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 4 - \frac{3}{2^{n-1}} < x_1 < 4 - \frac{1}{2^{n-2}},\ 0 \le x_2 \le 8,\ 4 - \frac{3}{2^{n-1}} < y_1 < 4 + \frac{1}{2^{n-2}}\right\},$$
$$C_n = \left\{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 4 - \frac{1}{2^{n-2}} < x_1 \le 4 + \frac{1}{2^{n-2}},\ 0 \le x_2 \le 8,\ 4 - \frac{3}{2^{n-1}} < y_1 < 4 - \frac{1}{2^{n-2}}\right\},$$
$$D_n = \left\{(x_1, x_2, y_1) \,|\, 4 + \frac{1}{2^{n-2}} < x_1 < 4 + \frac{3}{2^{n-1}},\ 0 \le x_2 \le 8,\ 4 - \frac{3}{2^{n-1}} < y_1 \le 8\right\},$$

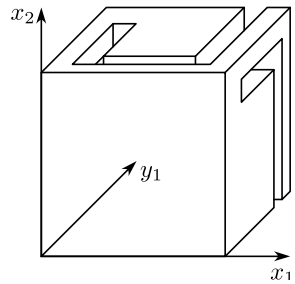


Рис. 7.

$$E_n = \Big\{(x_1, x_2, y_1)\,|\,0 \le x_1 \le 8,\ 4 + \frac{1}{2^{n-2}} < x_2 < 4 + \frac{3}{2^{n-1}},\ 4 - \frac{1}{2^{n-2}} < y_1 < 4 + \frac{3}{2^{n-1}}\Big\},$$

$$F_n = \Big\{(x_1, x_2, y_1)\,|\,0 \le x_1 \le 8,\ 0 \le x_2 \le 4 + \frac{1}{2^{n-2}},\ 4 + \frac{1}{2^{n-2}} < y_1 < 4 + \frac{3}{2^{n-2}}\Big\}.$$

После n-го шага получим линейно выпуклый компакт, состоящий из $n+1$ компонент, со связными проекциями. Продолжая этот процесс, в пределе получим линейно выпуклый компакт $K = A \setminus \bigcup\limits_n (B_n \cup C_n \cup D_n \cup E_n \cup F_n)$, имеющий бесконечное количество компонент, со связными проекциями (одна из компонент — отрезок $l = \{(x_1, x_2, y_1)\,|\,x_1 = 4,\ 0 \le x_2 \le 4,\ y_1 = 4\}$). Сечения компакта K комплексными прямыми совпадают или с сечениями его вещественными прямыми, или с сечениями в L вещественными гиперплоскостями вида $x_2 = \text{const}$. Легко убедиться в односвязности всех этих сечений. Поэтому $[K] = K$ (на рис. 6 отображены три первых шага построения K, а на рис. 7 — общий вид компакта K).

Легко также видеть, что ни одна из компонент K, кроме отрезка l, не будет линейно выпуклым множеством, а будет компонентой линейно выпуклого множества со счетным числом компонент.

Нетрудно проверить, что K — линейный аналитический полиэдр, так как его можно получить из трёх его проекций $\pi_1(z_1, z_2) = z_1,\ \pi_2(z_1, z_2) = z_2,\ \pi_3(z_1, z_2) = z_1 - z_2$. Образующие $K_1 = \pi_1(K)$ и $K_2 = \pi_2(K)$ изображены на рис. 6, образующая K_3 будет отрезком,

так как вся гиперплоскость L при π_3 проектируется в вещественную прямую.

Возьмем два экземпляра построенного выше компакта (второй зададим параллельным сдвигом вдоль оси x_1 на 10) и соединим внешнюю компоненту первого компакта с компонентой-отрезком второго некоторой ломанной, лежащей в дополнении к обоим компактам. Аналогично, соединим внешнюю компоненту второго компакта с компонентой-отрезком первого некоторой ломанной, лежащей в дополнении к обоим компактам. Добавление этих ломанных не меняет линейной выпуклости объединения. Но в полученном после такого присоединения компакте имеем бесконечное число компонент, причем ни одна из компонент в отдельности линейно выпуклой не будет.

Изучим c-экстремальные точки линейно аналитического полиэдра. Если в определении 11.2 обозначить $w^j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, то линейный аналитический полиэдр задается линейной системой включений

$$\langle w^j, z\rangle \in E_j, \quad j \in J.$$

Теорема 15.3. *Для того чтобы точка z_0 была c-экстремальной точкой линейного аналитического компактного полиэдра $E \subset \mathbb{C}^n$, заданного системой линейных включений*

$$\langle w^j, z\rangle \in E_j, \quad j \in J = \{1, 2, \ldots, N\},$$

где E_j — компакты, необходимо и достаточно, чтобы множество

$$J(z_0) = \{j \mid \langle w^j, z_0\rangle \in \partial E_j,\ j \in J\} \tag{15.1}$$

содержало подмножество j_0 мощности n и чтобы точки w^j, $j \in j_0$ были линейно независимы.

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $\{w^j \mid j \in J(z_0)\}$ содержит меньше чем n линейно независимых элементов. Тогда на основании известных теорем линейной алгебры система линейных относительно z уравнений

$$\langle w^j, z\rangle = 0, \quad j \in J(z_0)$$

имеет ненулевое решение $\bar{z}$. Из определения (15.1) множества индексов $J(z_0)$ вытекает, что

$$\langle w^j, z_0 + \varepsilon\bar{z}e^{i\varphi}\rangle \in \partial E_j, \quad j \in J(z_0),$$

$$\langle w^j, z_0 + \varepsilon \bar{z} e^{i\varphi} \rangle \in \operatorname{int} E_j, \quad j \in J \backslash J(z_0),$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $\bar{z}e^{i\varphi} = (\bar{z}_1 e^{i\varphi_1}, \bar{z}_2 e^{i\varphi_2}, \ldots, \bar{z}_n e^{i\varphi_n})$, так что $z_0 + \varepsilon \bar{z} e^{i\varphi} \in E$, т.е. z_0 принадлежит c-интервалу, лежащему в E, и не является c-экстремальной точкой множества E.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть точка $z_0 \in E$ такова, что мощность множества J_0 равна n и для $j \in J_0$ точки w^j линейно независимы. Тогда система включений, задающих точку z_0, может быть записана в следующем виде:

$$\langle w^j, z_0 \rangle = z_j \in \partial E_j, \quad j \in J_0, \tag{15.2}$$

$$\langle w^j, z_0 \rangle \in \operatorname{int} E_j, \quad j \in J \backslash J_0. \tag{15.3}$$

Допустим, что z_0 принадлежит c-интервалу $U \subset E$. Так как $\partial U \subset E$, то для точек $z \in \partial U$ справедливы включения

$$\langle w^j, z_0 \rangle \in E_j, \quad j \in J. \tag{15.4}$$

В силу условий (15.2), (15.4) включение $z_0 \in U$ выполняется только, если

$$\langle w^j, z \rangle \in \partial E_j \text{ для произвольного } j \in J_0 \text{ и для всех } z \in U, \tag{15.5}$$

но так как n совпадает с размерностью пространства, то c-интервал U по крайней мере на одну из прямых, содержащих E_j, $j \in J_0$, должен проектироваться в окрестность точки z_j, что противоречит условию (15.5). Теорема доказана.

Следствие 15.5. Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — компакт, заданный конечной системой линейных включений

$$\langle w^j, z \rangle \in E_j, \quad j \in J,$$

где E_j — ацикличные компакты.

Тогда K есть c-оболочка множества своих c-экстремальных точек, которое задается конечным набором систем линейных включений $\langle w^j, z \rangle \in \partial E_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании теорем 15.2 и 15.3 множество K есть n-кратная c-комбинация своих c-экстремальных точек, причем каждая c-экстремальная точка есть решение невырожденной системы включений с n неизвестными. Так как из конечной системы индексов J подмножества из n индексов можно выбрать лишь конечным числом способов, то число систем конечно.

Замечание 15.4. Легко видеть, что произвольное линейно выпуклое множество E есть пересечение линейно аналитических полиэдров. Ведь для проекций π, отображающих E на прямые, имеем $E = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}(\pi(E))$, а произвольное множество $\pi^{-1}(\pi(E))$ представляет собой линейно аналитический полиэдр.

Следующая теорема представляет собой комплексный аналог теоремы Крейна–Мильмана.

Теорема 15.4. *Каждое компактное сильно линейно выпуклое множество в $\mathbb{C}^n$ есть c-оболочка множества своих c-экстремальных точек*

$$K = \operatorname{cconv}(\operatorname{cext} K).$$

Доказательство. Пусть K_1 — c-оболочка множества всех c-экстремальных точек компакта K. Ясно, что $K_1 \subset K$, поскольку все проекции K ацикличны. Так как каждый сильно линейно выпуклый компакт линейно выпуклый, то через каждую точку дополнения к K проходит гиперплоскость L, не пересекающая K. Поэтому достаточно доказать, что для каждой каноничной проекции π на комплексную прямую $\pi(K) \subset \pi(K_1)$. Но $\pi(K)$ — компактное ацикличное подмножество комплексной прямой. Для любой точки $\alpha \in \partial\pi(K)$ гиперплоскость, заданная уравнением $\pi(z) = \alpha$, есть опорная гиперплоскость множества K и, следовательно (теорема 15.1), содержит его c-экстремальную точку, что по определению означает, что $\alpha \in \pi(K)$, а так как $\pi(K_1)$ ациклично, то тем самым $\pi(K) \subset \pi(K_1)$ и теорема доказана.

Следствие 15.6. Каждое компактное сильно линейное выпуклое множество в $\mathbb{C}^n$ есть не более чем n-кратная c-комбинация своих c-экстремальных точек.

Это следствие очевидно вытекает из теорем 15.2 и 15.4.

Определение 15.8. Назовем c-лучом замкнутое неограниченное ацикличное подмножество комплексной прямой с непустой границей.

Определение 15.9. Экстремальным c-лучом множества $E \subset \mathbb{C}^n$ назовем c-луч H, который лежит в E, если множество $E \backslash H$ линейно выпукло и каждая точка границы H будет c-экстремальной точкой для E. (Это эквивалентно тому, что ни одна точка луча H не будет внутренней ни для какого c-интервала, лежащего в E и имеющего хотя бы одну точку за пределами H.)

Для множества $E \subset \mathbb{C}^n$ обозначим: $\operatorname{rcext} E$ — множество точек всех c-экстремальных лучей в E.

Лемма 15.2. *Пусть $F \subset \mathbb{C}^n$ — замкнутое сильно линейно выпуклое тело (т.е. $\operatorname{int} F \neq \varnothing$) с непустой сильно линейно выпуклой границей ∂F, тогда F имеет вид $F = F_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, где F_1 — плоское односвязное подмножество прямой $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Поскольку граница ∂F — сильно линейно выпукла, то для произвольной точки $z \in \operatorname{int} F$ существует гиперплоскость, не пересекающая ∂F. Следовательно, F содержит гиперплоскость. Тогда согласно теореме 7.1 F представим в виде декартова произведения $F = F_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$.

Очевидно, что F_1 связно и односвязно потому что, в силу представления F, существуют сечения F комплексной прямой гомеоморфные F_1.

Лемма 15.3. *Если $F \subset \mathbb{C}^n$ — сильно линейно выпуклое замкнутое множество и L его касательная плоскость, то* $\operatorname{cext}(F \cap L) = (\operatorname{cext} F) \cap L$.

Доказательство. Согласно определению c-экстремальных точек и включению $F \cap L \subset F$ имеем $\operatorname{cext}(F \cap L) \supset (\operatorname{cext} F) \cap L$. Пусть теперь $z \in \operatorname{cext}(F \cap L)$, тогда не может быть $z \in [K] \backslash K$, где $K \subset F$, ибо иначе было бы $K \subset F \cap L$ (поскольку $z \in L$ и L — касательная прямая к F), а это противоречит $z \in \operatorname{cext}(F \cap L)$. Значит $\operatorname{cext}(F \cap L) \subset (\operatorname{cext} F) \cap L$ и лемма доказана.

Замечание 15.5. Равенство $\operatorname{rcext}(F \cap L) = (\operatorname{rcext} F) \cap L$ доказывается аналогично.

Теорема 15.5. *Каждое замкнутое сильно линейно выпуклое множество $F \subset \mathbb{C}^n$, которое не содержит комплексной прямой, будет c-оболочкой своих c-экстремальных точек и c-экстремальных лучей $F = \operatorname{cconv}(\operatorname{cext} F \cup \operatorname{rcext} F)$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по размерности множества F. Теорема тривиальна при $\dim_{\mathbb{C}} F = 0$ и $\dim_{\mathbb{C}} F = 1$. Пусть она верна при всех размерностях F меньших m $(1 < m \leq n)$. Докажем ее для F при $\dim_{\mathbb{C}} F = m$.

По условию F не содержит прямой, поэтому не может совпасть ни с его аффинной оболочкой, ни с декартовым произведением $F_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$. Из леммы 15.1 следует, что непустая граница ∂F не будет сильно линейно выпуклым множеством.

Согласно определению сильной линейной выпуклости сечение F произвольной прямой сильно линейно выпукло. Пусть z — произвольная точка F. Если z принадлежит какой-нибудь касательной прямой L к F, то по предположению индукции $z \in \operatorname{cconv}((\operatorname{cext} F \cap$

$L) \cup \operatorname{rcext}(F \cap L))$, если же есть точки множества F через которые не проходит никакая касательная плоскость к F, тогда существует $z \in \operatorname{int} F$.

Проведем прямую l через точку z. Примем во внимание, что $l \cap F$ — сильно линейно выпуклое множество, не совпадающее с l. Следовательно $z \notin [\partial(l \cap F)]$. Пусть точка w — произвольная точка множества $\partial(l \cap F)$. Согласно сильной линейной выпуклости, через точку w проходит некоторая касательная к F плоскость T и, по предположению индукции, имеем $w \in \operatorname{cconv}(\operatorname{cext}(F \cap T) \cup \operatorname{rcext}(F \cap T))$. Это выполняется для каждой точки $w \in \partial(l \cap F)$. Тогда, согласно лемме 15.3 и замечанию 15.5, $z \in \operatorname{cconv}(\operatorname{cext} F \cup \operatorname{rcext} F)$. Отсюда $F \subset \operatorname{cconv}(\operatorname{cext} F \cup \operatorname{rcext} F)$.

Обратное включение тривиально, поэтому теорема доказана.

Полученный результат в случае выпуклых множеств аналогичен теореме Кли, а в случае компактных сильно линейно выпуклых множеств совпадает с комплексной теоремой Крейна–Мильмана. Поэтому он распространяет теорему Кли на неограниченные сильно линейно выпуклые множества.

Сильно линейно выпуклые множества являются важным классом множеств, изучаемых в комплексном анализе и обладающих многими достоинствами выпуклых множеств. С другой стороны, этот класс обладает рядом недостатков, главным из которых есть незамкнутость класса относительно пересечений. Поэтому для него не выполняется основная аксиома выпуклости.

Дальше рассмотрим класс $\mathbb{C}$-квазивыпуклых множеств, включающих в себя сильно линейно выпуклые множества, который является замкнутым относительно пересечений.

Определение 15.10. *Линейно выпуклое множество $E \subset \mathbb{C}^n$ назовем $\mathbb{C}$-квазивыпуклым множеством, если его сечение каждой комплексной прямой λ состоит из односвязных компонент (множество $\lambda^\circ \backslash \lambda \cap E$ связно, $\lambda^\circ = \lambda \cup (\infty)$ — компактификация прямой λ).*

Очевидно, что этот класс содержит в себе сильно линейно выпуклые области и компакты.

Покажем замкнутость класса относительно пересечений в том смысле, что пересечение любого семейства компактных $\mathbb{C}$-квазивыпуклых множеств будет $\mathbb{C}$-квазивыпуклым множеством.

Лемма 15.4. *Пересечение любого множества $\mathbb{C}$-квазивыпуклых компактов будет $\mathbb{C}$-квазивыпуклым компактом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Результат достаточно доказать для пары компактов. Пусть k_1, k_2 — два произвольных квазивыпуклых компакта, λ — произвольная комплексная прямая, пересекающая $k_1 \cap k_2$. Используем точную когомологическую последовательность Майера–Вьеториса

$$H^1(\lambda \cap k_1) \oplus H^1(\lambda \cap k_2) \to H^1(\lambda \cap k_1 \cap k_2) \to H^2[\lambda \cap (k_1 \cap k_2)].$$

С одной стороны слагаемые первой группы тривиальны, в силу $\mathbb{C}$-квазивыпуклости обоих компактов k_1 и k_2.

С другой стороны компактное пересечение $\lambda \cap (k_1 \cup k_2) = (\lambda \cap k_1) \cup (\lambda \cap k_2)$ не может содержать всю комплексную прямую λ, которая есть двумерным вещественным многообразием, поэтому $H^2[\lambda \cap (k_1 \cup k_2)] = 0$.

Теперь из точности когомологической последовательности следует $H^1(\lambda \cap k_1 \cap k_2) = 0$, что эквивалентно односвязности сечения.

Из следствия 11.1 очевидно следует, что декартово произведение $\mathbb{C}$-квазивыпуклых компактов будет $\mathbb{C}$-квазивыпуклым множеством.

Поскольку произвольный компактный линейно аналитический полиэдр можно представить как пересечение не более чем N (где N — конечное число) декартовых произведений $\Gamma_j \times K_j$ множества Γ_j, где Γ_j — грань этого полиэдра, на шар K_j достаточно большого радиуса в $(n-1)$-мерной комплексной гиперплоскости, ортогональной к грани Γ_j (N — число граней полиэдра), то из леммы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 15.6. *Компактный линейно аналитический полиэдр, все грани которого односвязны, является $\mathbb{C}$-квазивыпуклым множеством.*

Следствие 15.7. Пересечение сильно линейно выпуклых компактов будет $\mathbb{C}$-квазивыпуклым множеством.

Будем говорить, что линейно выпуклый полиэдр имеет гладкие грани, если его можно задать образующими, каждая из которых имеет гладкую границу.

Следствие 15.8. Произвольный сильно линейно выпуклый компакт можно приблизить извне $\mathbb{C}$-квазивыпуклым линейно аналитическим полиэдром с гладкими гранями.

Для доказательства достаточно рассмотреть проекции этого компакта на комплексные прямые. Каждый такой ациклический образ проекции можем приблизить извне областью ограниченной гладкой

жордановой кривой и рассмотреть декартово произведение этой области на шар K_j в комплексной гиперплоскости, ортогональной к выбранной прямой проектирования. Пересечения таких декартовых произведений и дадут искомый полиэдр. Нарушение гладкости границы такого полиэдра будет только в точках его остова.

Теорема 15.7. *Каждое односвязное линейно выпуклое множество будет $\mathbb{C}$-квазивыпуклым.*

Доказательство. Рассмотрим сечение множества E комплексной прямой λ. Если сечение $\lambda \cap E$ не односвязно, то существует одномерный цикл Z лежащий в $\lambda \cap E$. Выберем точку $z_0 \in \lambda \backslash \lambda \cap E$, зацепленную с циклом Z. В силу линейной выпуклости, существует гиперплоскость L, содержащая точку z_0 и не пересекающая множество E. Тогда $(2n-2)$-мерный цикл $K = L \cup \infty$ зацеплен с одномерным циклом Z. Если цикл Z гомологичен нулю в E, а это так, в силу односвязности E, то существует цепь C в E, которую он ограничивает. По теореме о зацеплении $C \cap K \neq \varnothing$, что противоречит пустоте множества $K \cap E$.

§ 16. О строении m-выпуклых компактов

В настоящем параграфе будет изучен класс множеств в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, включающий в себя, в частном случае, линейно выпуклые множества. Полученные результаты позволят получить дополнительные сведения о строении линейно выпуклых компактов и c-оболочек.

Определение 16.1. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ назовем m-выпуклым, $m > 0$, если для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$ найдется вещественно m-мерная плоскость $\mathfrak{L}$, такая, что $x \in L$ и $\mathfrak{L} \cap E = \varnothing$.

Из определения очевидным образом следуют такие утверждения.

Лемма 16.1. *Если E_1 и E_2 — соответственно k-выпуклое и m-выпуклое множества и $k + m \geq n$, то множество $E = E_1 \cup E_2$ будет $(k + m - n)$-выпуклым множеством.*

Лемма 16.2. *Если E_1 и E_2 соответственно k-выпуклое и m-выпуклое множества, $k \leq m$, то $E = E_1 \cap E_2$ будет k-выпуклым множеством.*

Из того, что дополнение к 1-выпуклым множествам не может содержать ограниченных компонент, следует такое утверждение.

Предложение 16.1. *Для 1-выпуклых компактов* $K \subset \mathbb{R}^n$, $H^{n-1}(K) = 0$.

Замечание 16.1. Очевидно, что класс m-выпуклых множеств содержит в себе класс $(m+1)$-выпуклых множеств, т.е. данное определением 16.1 разбиение множеств на классы упорядочено.

Пусть задано декартово произведение компактов $K = K_1 \times B^m$, где B^m — m-мерный компактный шар с центром в начале координат. Очевидно, что K m-выпуклый и что $H^i(K) = 0$ при $i > n - m - 1$.

Предложение 16.2. *Пусть* $K = K_1 \cap K_2$, *где* $K_1 = K_1' \times B^k$, $K_2 = K_2' \times B^m$, *а радиусы шаров* B^k, B^m *больше* $\max\limits_{x \in K_1' \cup K_2'} \|x\|$, $k+m > n$. *Тогда* $H^{n-2}(K) = 0$.

Доказательство. Воспользуемся точной когомологической последовательностью Майера–Вьеториса

$$H^{n-2}(K_1) \oplus H^{n-2}(K_2) \to H^{n-2}(K) \to H^{n-1}(K_1 \cup K_2) \to \\ \to H^{n-1}(K_1) \oplus H^{n-1}(K_2). \tag{16.1}$$

Если K_1 и K_2 – непустые множества, для которых данное предложение тривиально, то $k \le n-1$ и $m \le n-1$, поэтому из неравенства $k + m > n$ следует также $k \ge 2$ и $m \ge 2$. Тогда, согласно приведенному выше, $H^i(K_j) = 0$ при $j = 1, 2$, $i > n - 3$. Следовательно, из точности последовательности (16.1)

$$H^{n-2}(K) \approx H^{n-1}(K_1 \cup K_2).$$

Но, согласно лемме 16.1, множество $K_1 \cup K_2$ $(k + m - n)$-выпукло. Из предложения 16.1 и замечания 16.1 следует $H^{n-1}(K_1 \cup K_2) = 0$, что и доказывает предложение.

Замечание 16.2. Из доказательства видно, что предложение 16.2 остается справедливым для произвольной пары K_1 и K_2 соответственно k- и m-выпуклых компактов, удовлетворяющих условиям $H^{n-2}(K_j) = 0$ при $j = 1, 2$ и $k + m > n$.

Замечание 16.3. Очевидно, что произвольное m-выпуклое множество можно представить как пересечение цилиндров вида $E = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}\pi(E)$ где π — проекция E на $(n-m)$-мерную плоскость. Это аналог того факта, что выпуклый компакт есть пересечение полупространств. Следовательно, произвольный m-выпуклый компакт можно представить в виде пересечения компактов вида $K_\pi = \pi(K) \times B^m \subset \pi^{-1}\pi(K)$, где радиус шара B^m больше $\max\limits_{x \in K} \|x\|$.

Каждое из множеств $K' \times B^m$ удовлетворяет при $m > \frac{n}{2}$ условиям предложения 16.2, поэтому для их попарных пересечений $K_\pi \cap K_{\pi'}$ (а вследствие последовательного применения этого предложения и для произвольного конечного пересечения $\bigcap\limits_{\pi} K_\pi$) $(n-2)$-мерная группа когомологий тривиальна. Теперь достаточно воспользоваться непрерывностью групп когомологий [202] и тем, что K будет топологическим пределом множеств $\bigcap\limits_{\pi \in A} K_\pi$, где A — конечные подмножества множеств всех проекций. Отсюда следует такое утверждение.

Предложение 16.3. *Если компакт K m-выпуклый и $m > \frac{n}{2}$, то $H^{n-2}(K) = 0$.*

Замечание 16.4. Легко показать, что $(n-1)$-выпуклые множества состоят из выпуклых компонент.

Теорема 16.1. *Пусть $K_j, j = 1, \ldots, l,$ — семейство m-выпуклых компактов, $l < \frac{n}{n-m}$. Тогда $H^i\big(\bigcup\limits_1^l K_j\big) = 0$ при $i > n - \frac{n}{n-m} + l - 1$.*

Доказательство. Объединение $\bigcup\limits_1^l K_j$ будет, согласно предложению 16.2, $[lm - (l-1)n]$-выпуклым, так как целое число $n - l(n-m) > 0$ согласно условию. Согласно предложению 16.1, $H^{n-1}\big(\bigcup\limits_1^l K_j\big) = 0$. Поэтому теорема доказана, если $n - \frac{n}{n-m} + l - 1 \geq n - 2$. Предположим, что $n - \frac{n}{n-m} + l - 1 < n - 2$. Тогда $l + 1 < \frac{n}{n-m}$. Применим индукцию по l. Для достаточно большого l, а именно для $l \in \big[\frac{n}{n-m} - 1, \frac{n}{n-m}\big]$, теорема доказана. Предположим, что теорема доказана для всех $l_0 > l$, и докажем ее для l. Применим точную когомологическую последовательность Майера–Вьеториса

$$H^i\big(\bigcup_1^l K_j\big) \oplus H^i(K_{l+1}) \xrightarrow{\alpha} H^i\big[\bigcup_1^l (K_j \cap K_{l+1})\big] \to H^{i+1}\big(\bigcup_1^{l+1} K_j\big). \quad (16.2)$$

По предположению индукции, $H^{i+1}\big(\bigcup\limits_1^{l+1} K_j\big) = 0$ при $i + 1 > n - \frac{n}{n-m} + l$. Следовательно, α – эпиморфизм.

Дальнейшему доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 16.3. *Если $K = \bigcup\limits_1^l K_j$, где K_j — $(n-1)$-выпуклые множества, то $H^i(K) = 0$ при $i \geq l$.*

Доказательство. Естественно считать $l < n$, иначе лемма очевидна. Согласно замечанию 16.4, лемма справедлива при $l = 1$. Воспользуемся индукцией по l. Предположим, что лемма доказана

для $l = l_0$, и докажем ее для $l_0 + 1$. Опять воспользуемся точной когомологической последовательностью Майера–Вьеториса

$$H^i\big[\big(\bigcup_1^{l_0} K_j\big) \cap K_{l_0+1}\big] \to H^{i+1}\big(\bigcup_1^{l_0+1} K_j\big) \to$$
$$\to H^{i+1}\big(\bigcup_1^{l_0} K_j\big) \oplus H^{i+1}(K_{l_0+1}).$$

Понятно, что $i+1 \geq l_0+1$, если $i \geq l_0$. Поэтому, согласно предположению индукции, $H^{i+1}\big(\bigcup_1^{l_0} K_j\big) = 0$ и $H^{i+1}(K_{l_0+1}) = 0$. Кроме того, справедливо равенство $\big(\bigcup_1^{l_0} K_j\big) \cap K_{l_0+1} = \bigcup_1^{l_0}(K_j \cap K_{l_0+1})$. Но каждое множество $K_j \cap K_{l_0+1}$ будет $(n-1)$-выпуклым, поэтому, согласно тому же индуктивному предположению, его i-я группа когомологий тривиальна. Лемма следует из точности последовательности.

Лемма 16.4. *Пусть компакты K_j имеют вид декартового произведения $K_j = K'_j \times B^m$ и $l < \frac{n}{n-m}$. Тогда $H^i\big(\bigcup_1^l K_j\big) = 0$ при $i > n - \frac{n}{n-m} + l - 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что объединение $\bigcup_1^l K_j$ всегда можно представить в виде $\bigcup_1^l K_j = K' \times B^{n-l(n-m)}$. Следовательно, $H^i\big(\bigcup_1^l K_j\big) = 0$ при $i \geq l(n-m)$. Чтобы доказать лемму, покажем, что

$$n - \frac{n}{n-m} + l - 1 \geq l(n-m) - 1. \tag{16.3}$$

Преобразуем неравенство (16.3). Имеем

$$n - \frac{n}{n-m} \geq l(n-m-1) \quad \text{и} \quad \frac{n(n-m-1)}{n-m} \geq l(n-m-1).$$

Согласно лемме 16.3, можно считать, что $n-m-1 > 0$, так как при $m = n-1$ лемма доказана даже в общем случае. Тогда неравенство (16.3) приводится к виду $\frac{n}{n-m} \geq l$. А у нас, согласно условию леммы, $\frac{n}{n-m} > l$. Следовательно, неравенство (16.3) справедливо. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. В лемме 16.4 она доказана для компактов специального вида. Кроме этого, из эпиморфности α

следует справедливость ее для компактов $\bigcup_1^l (K_j \cap K_{l+1})$, составленных из объединений $K_j \cap K_{l+1}$, где K_j, $j = 1, \ldots, l+1$, имеют заданный в лемме 16.4 вид, поскольку, согласно лемме 16.4, $H^i(K_{l+1}) = 0$ при $i > n - \frac{n}{n-m} + l - 1 \geq l(n-m) \geq n - m - 1$ (можно считать $n - m > 1$, так как для $n - m = 1$ теорема доказана в лемме 16.3). Воспользуемся теперь замечанием 16.3 о представимости m-выпуклого компакта в виде пересечения $\bigcap_\pi K_\pi$. Тогда объединение $K = \bigcup_1^l K_j$, где K_j — произвольные m-выпуклые компакты, можно представить в виде $K = \bigcup_1^2 \big(\bigcup_\pi^l (K'_j)_\pi \big)$. Последовательное использование эпиморфизма α позволяет распространить теорему сначала на произвольные множества, составленные из конечных пересечений простейших компактов леммы 16.4. Теперь, воспользовавшись непрерывностью групп когомологий, получаем справедливость теоремы для произвольных m-выпуклых компактов.

Следствие 16.1. Если K — m-выпуклый компакт, то $H^i(K) = 0$ при $i > n\big(\frac{n-m-1}{n-m}\big)$.

Следствие 16.2. Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклый компакт, то $H^i(K) = 0$ при $i > n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$, $m = 2n - 2$, из следствия 16.1 получим $H^i(K) = 0$ при $i > 2n\big(\frac{2n-(2n-2)-1}{2n-(2n-2)}\big) = n$.

Определение 16.2. Множество $E \subset \mathbb{C}^n$ называется m-линейно выпуклым, если для каждой точки $z \in \mathbb{C}^n \backslash E$ существует комплексная m-плоскость, проходящая через z и не пересекающая E.

Дополнения к m-линейно выпуклым множествам — m-линейно вогнутые множества — исследовались в [53].

Следствие 16.3. Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — m-линейно выпуклый компакт, то $H^i(K) = 0$ при $i > n\big(2 - \frac{1}{n-m}\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся следствием 16.1, учитывая, что $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$, $m = 2n - 2$, а комплексная m-плоскость вещественно $2m$-мерна. Тогда $H^i(K) = 0$ при $i > 2n\big(\frac{2n-2m-1}{2n-2m}\big) = n\big(2 - \frac{1}{n-m}\big)$.

Определение 16.3. Множество E в гиперкомплексном пространстве $\mathbb{H}^n$ [169] называется гиперкомплексно выпуклым, если для произвольной точки $x \in \mathbb{H}^n \backslash E$ существует гиперкомплексная гиперплоскость L, содержащая точку x и не пересекающая E.

Обычно различают левые и правые гиперплоскости (это связано с некоммутативностью тела кватернионов). Для наших рассмотре-

ний это несущественно, поэтому мы не различаем правых и левых гиперкомплексно выпуклых множеств, объединяя их в один класс.

Следствие 16.4. Если $K \subset \mathbb{H}^n$ — гиперкомплексно выпуклый компакт в гиперкомплексном пространстве, то $H^i(K) = 0$ при $i > 3n$.

Доказательство. Учитывая условие $\mathbb{H}^n \approx \mathbb{R}^{4n}$, $m = 4n-4$ и следствие 16.1, получим $H^i(K) = 0$ при $i > 4n\left(\frac{4n-4(n-1)-1}{4n-4(n-1)}\right) = 3n$.

Покажем, что оценка теоремы, вообще говоря, не улучшаема.

Пример 16.1. Очевидно, что произвольное множество $E \subset \mathbb{R}^n$, лежащее в $(n-m)$ -мерной плоскости $T \subset \mathbb{R}^n$, будет m-выпуклым.

Пример 16.2. Пусть $k = \left[\frac{n}{n-m}\right]$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α, $\tau = n - k(n-m)$. Рассмотрим набор множеств E_j, $j = 1, \ldots, k+1$, $E_j \subset \mathbb{R}^{n-m}$ при $j = 1, \ldots, k$, а $E_{k+1} \subset \mathbb{R}^\tau$. Возьмем декартово произведение $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{k+1}$. Дополнение $\mathbb{R}^n \backslash E$ можно представить как объединение k множеств вида

$$(\mathbb{R}^{n-m}\backslash E_j) \times \mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R}^{n-m} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n-m}}_{(j-1)\text{ раз}} \times (\mathbb{R}^{n-m}\backslash E_j) \times$$
$$\times \underbrace{\mathbb{R}^{n-m} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n-m}}_{(k-j)\text{ раз}} \times \mathbb{R}^\tau$$

и множества $\mathbb{R}^{k(n-m)} \times (\mathbb{R}^\tau \backslash E_{k+1})$. Поэтому E будет m-выпуклым множеством. Если же E_j будут компактами, то и E — компакт, а если $H^{n-m-1}(E_j) \neq 0$ при $j = 1, \ldots, k$ и $H^{\tau-1}(E_{k+1}) \neq 0$ при $\tau \neq 0$, то

$$H^i(E) \neq 0 \text{ при}$$
$$i = \begin{cases} k(n-m-1) = \left[\dfrac{n}{n-m}\right](n-m-1) = \\ = \dfrac{n}{n-m}(n-m-1) = n - \dfrac{n}{n-m}, \text{ если } \tau = 0, \\ k(n-m-1) + \tau - 1 = \left[\dfrac{n}{n-m}\right](n-m-1) + \\ + n - \left[\dfrac{n}{n-m}\right](n-m) - 1 = n - \left[\dfrac{n}{n-m}\right] - 1, \text{ если } \tau \neq 0. \end{cases}$$

Следствие 16.1 утверждает, что для произвольного компакта тривиальными являются группы когомологий размерности на единицу больше, а именно $n - \frac{n}{n-m} + 1$, если $\tau = 0$, или $n - \frac{n}{n-m}$, если $\tau \neq 0$.

Теорема 16.1 и пример 16.2 показывают, что полученные выше результаты окончательны, если на исследуемое множество не наложены дополнительные условия. Ниже будем изучать m-выпуклые множества с дополнительными ограничениями.

Определение 16.4. Скажем, что m-выпуклый компакт принадлежит классу $\mathfrak{U}$, если его проекции на $(n-m)$-мерные плоскости не разбивают их, т. е. $\lambda\backslash\pi(K)$ связно для произвольной $(n-m)$-мерной плоскости λ.

Определение 16.5. Скажем, что m-выпуклый компакт K принадлежит классу $\mathcal{B}$, если он не разбивает никакой $(n-m)$-мерной плоскости λ, т.е. $\lambda\backslash K$ связно для произвольной $(n-m)$-мерной плоскости.

Предложение 16.4. *Класс $\mathfrak{U}$ включается в класс $\mathfrak{B}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для некоторого компакта $K \in \mathfrak{U}$ найдется $(n-m)$-мерная плоскость λ, такая, что $\lambda\backslash K$ несвязно. Рассмотрим ограниченную компоненту V множества $\lambda\backslash K$. Пусть точка $x \in V$. Проведем m-мерную плоскость γ, $\gamma \cap K = \varnothing$, и рассмотрим проекцию π на $(n-m)$-мерную плоскость L, ортогональную к γ. Очевидно, что $\lambda\backslash K$ проектируется на L гомеоморфно и $\pi(\gamma)$ принадлежит ограниченной компоненте множества $L\backslash\pi(K)$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Предложение 16.5. *Если $K_1, K_2 \in \mathfrak{B}$, то и $K = K_1 \cap K_2 \in \mathfrak{B}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть λ — некоторая $(n-m)$-мерная плоскость, пересекающая K. Согласно условию, множества $\lambda\backslash K_1$ и $\lambda\backslash K_2$ связны и имеют непустое пересечение, в силу компактности $K_1 \cup K_2$. Следовательно, множество $\lambda\backslash K = (\lambda\backslash K_1) \cup (\lambda\backslash K_2)$ также связно, что и доказывает предложение.

Следующий пример показывает, что принадлежность множества к классу $\mathfrak{U}$ уже не инвариантна относительно пересечений.

П р и м е р 16.3. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ два множества

$$K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x + |y| = 1) \wedge (x \geq 0) \wedge (|z| \leq 10)\},$$
$$K_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (0 \leq x \leq 1) \wedge [(x = z) \vee (z = 0)] \wedge (|y| \leq 10)\}.$$

Очевидно, что K_1 и K_2 — 1-выпуклые множества класса $\mathfrak{U}$. Но $K = K_1 \cap K_2 \notin \mathfrak{U}$.

Теорема 16.2. *Пусть K_j, $j = 1, \ldots, l$, — семейство m-выпуклых компактов класса $\mathfrak{U}$, $m \geq \frac{n}{2}$, $l \leq \frac{n}{n-m}$. Тогда $H^i\big(\bigcup_1^l K_j\big) = 0$ при $i > n - \frac{n}{n-m} + l - 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что теорема уточняет теорему 16.1, поэтому особо интересны случаи: когда i принадлежит полуинтервалу $\left(n-\frac{n}{n-m}+l-2, n-\frac{n}{n-m}+l-1\right]$ и когда $n=l(n-m)$.

Заметим, что если $m=n-1$, $l=1$, то теорема очевидна, так как K_j — выпуклые компакты.

Пусть $l=1$ и $m<n-1$. Тогда произвольный m-выпуклый компакт можно представить в виде пересечения компактов вида $K_j = K' \times B^m$, где радиус шара B^m больше $\max\limits_{x\in K}\|x\|$. Для компакта K_j $H^i(K_j)=0$ при $i>n-m-2$. Покажем тогда, что $n-\frac{n}{n-m}+1-2 \geq n-m-2$. Имеем $n-\frac{n}{n-m} \geq n-m-1$ или $\frac{n(n-m-1)}{n-m} \geq (n-m-1)$, где $(n-m-1)>0$, так как $m<n-1$. Поэтому $\frac{n}{n-m} \geq 1$, что очевидно.

Покажем теперь, что $H^{n-1}\left(\bigcup\limits_1^l K_j\right)=0$ при $n-1>n-\frac{n}{n-m}+l-2$, т.е. $\dfrac{n}{n-m}>l-1$. Последнее неравенство всегда выполняется, так как по условию $\frac{n}{n-m} \geq l$. Если $H^{n-1}\left(\bigcup\limits_1^l K_j\right) \neq 0$, тогда найдется точка x, принадлежащая ограниченной компоненте множества $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_1^l K_j$. Существует m-плоскость L, которая не пересекает K_l, и, следовательно, пересекается только с $\bigcup\limits_1^{l-1} K_j$. Согласно предположению теоремы, m-плоскость разбивается множеством $\bigcup\limits_1^{l-1} K_j$ и точка x лежит в ограниченной компоненте множества $L \setminus \bigcup\limits_1^{l-1} K_j$. Приведем это к противоречию.

Если $l=2$, то сразу получаем противоречие, так как K_1 не должно разбивать никакую $(n-m)$-плоскость, а $n-m \leq m$. Следовательно, можем теперь воспользоваться индукцией по количеству компонент объединения $\bigcup\limits_1^l K_j$.

Предположим, что мы доказали, что $\bigcup\limits_1^{l-1} K_j$ не разбивает никакую t-мерную плоскость $\mathbb{R}^t, t=(l-1)(n-m)$. Тогда, очевидно, $\bigcup\limits_1^{l-1} K_j$ не разбивает никакую τ-мерную плоскость $\mathbb{R}^\tau \supset \mathbb{R}^t$. Но так как, по условию, $n \geq l(n-m)$, то $m \geq (l-1)(n-m)$. Следовательно, по предположению индукции, $\bigcup\limits_1^{l-1} K_j$ не может разбивать m-

плоскость L. Поэтому $H^{n-1}\bigl(\bigcup_1^{l-1} K_j\bigr) = 0$. Заметим, что при доказательстве тривиальности $(n-1)$-й группы когомологий использована только принадлежность компактов K_j к классу $\mathfrak{B}$.

Дальнейшее доказательство проходит по схеме предыдущей теоремы 16.1. Предполагаем, что теорема доказана для всех $l' > l$, и докажем ее для l. Из точной когомологической последовательности (16.2) следует эпиморфность α при $i > n - \frac{n}{n-m} + l - 2$. Теперь, если $K_j = K'_j \times B^m$, где K'_j не разбивает $\mathbb{R}^{n-m}$, то из полученного выше имеем $H^i\bigl(\bigcup_1^{l-1} K_j\bigr) = 0$ при $i \geq l(n-m) - 1$. Справедливость неравенства $n - \frac{n}{n-m} + l - 2 \geq l(n-m) - 2$ показана в лемме 16.4.

Воспользуемся теперь тем, что произвольный компакт класса $\mathfrak{U}$ можно представить как пересечение $K = \bigcap_j K_j$ компактов рассмотренного выше вида. Теперь концовка доказательства — повторение доказательства теоремы 16.1 — использование эпиморфности α и непрерывности групп когомологий.

Следствие 16.5. Если $K \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклый компакт класса $\mathfrak{U}$, то $H^i(K) = 0$ при $i \geq n$.

Доказательство. Применим теорему 16.2 к $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$, $m = 2n-2$, $l = 1$. Тогда $H^i(K) = 0$ при $i > 2n - \frac{2n}{2n-(2n-2)} + 1 - 2 = n - 1$.

Замечание 16.5. Отметим, что в доказательстве теоремы 16.2 и следствия 16.5 на самом деле использовалось более слабое условие, чем принадлежность компакта к классу $\mathfrak{U}$, а именно то, что данный компакт получается как пересечение компактов класса $\mathfrak{U}$. Поэтому, если $K \subset \mathbb{C}^n$ будет c-оболочкой, то $H^i(K) = 0$ при $i \leq n$.

Отсюда также следует, что линейный аналитический полиэдр $K \subset \mathbb{C}^n$, для которого образующие K_i односвязны, удовлетворяют условию $H^n(K) = 0$.

Рассмотрим сопряженное множество трубчатой окрестности $U(I)$ отрезка, проходящего через начало координат. Эта трубчатая окрестность представляет собой звездное множество. Известно (предложение 2.25), что сопряженное к звездному множеству есть звездное множество. Так как очевидно, что $U(I)$ — звездное множество, то и $U^*(I)$ тоже будет звездным. Пусть теперь A – произвольное множество, содержащее начало координат. Тогда, согласно 2.12, $(A \cup U(I))^* = A^* \cap (U(I))^*$, т.е. сопряженное множество к объединению будет пересечением A^* со звездным множеством. Заметим,

что если теперь $U(J)$ — трубчатая окрестность отрезка, не содержащая начала координат, но такая, что $A \cup U(J)$ есть линейный сдвиг $A \cup U(I)$, то, в силу 2.10, $A^* \cap U^*(J) \approx (A \cup U(J))^* \approx (A \cup U(I))^* \approx A^* \cap U^*(I)$. Отсюда следует, что для произвольного отрезка и его трубчатой окрестности $U(J)$, пересекающей A, $(A \cup U(J))^*$ гомеоморфно пересечению A^* со звездным множеством. Если же теперь, для некоторого линейно выпуклого компакта K, K^* — связная область, то очевидно, что K можно представить как пересечение (вообще говоря, бесконечное) компактов, каждый из которых гомеоморфен звездному компакту.

Пусть, для линейно выпуклого компакта K, K^* — связная область. Покажем, что $H^n(K) = 0$.

Сведем доказательство этого к доказательству теоремы 16.1. Покажем, что справедливо утверждение:

(A) Объединение m линейно выпуклых компактов K_j, $m \leq n$, таких, что K_j^* — связные области, не разбивает никакую комплексную m-плоскость в $\mathbb{C}^n$.

Это легко показать по индукции. Пусть $m = 2$. Тогда, если $K_1 \cup K_2$ разбивает 2-плоскость T, то выберем точку z_0 в ограниченной компоненте $T \backslash (K_1 \cup K_2)$. Тогда, для произвольной комплексной прямой $l \subset T$, z_0 принадлежит ограниченной компоненте множества $l \backslash (l \cap (K_1 \cup K_2))$. Согласно линейной выпуклости компакта K_1 существует комплексная гиперплоскость L, проходящая через точку z_0, $L \cap K = \varnothing$. Очевидно, что $T \not\subset L$, поэтому $T \cap L = l$ — комплексная прямая. Но, в силу связности K_2^*, множество $l \backslash (l \cap K_2)$ связно. Это противоречит тому, что z_0 принадлежит ограниченной компоненте множества $l \backslash [l \cap (K_1 \cup K_2)] = l \backslash (l \cap K_2)$.

Предположим, что (A) доказано при $n = k$. Докажем его для $n = k + 1$. Если объединение $\bigcup_1^{k+1} K_j$ разбивает $(k+1)$-плоскость T, аналогично предыдущему выберем точку z_0 в ограниченной компоненте множества $T \backslash \bigcup_1^{k+1} K_j$ и проведем гиперплоскость L, проходящую через z_0 и не пересекающую компакта K_1. Аналогично предыдущему, $T \not\subset L$, поэтому $T \cap L = L_1$ — k-плоскость, где T_1 не пересекается с K_1 и, согласно предположению индукции, не может разбиваться объединением $\bigcup_2^{k+1} K_j$. Для окончания доказательства теперь достаточно проверить выполнение всех условий теоремы 16.2 и заметить, что принадлежность компакта классу $\mathfrak{U}$ использовалась

только для существования аппроксимации K пересечениями ацикличных компактов, что, как показано выше, справедливо и в нашем случае. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 16.3. *Если для линейного выпуклого компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ множество K^* связно, то $H^n(K) = 0$.*

Упражнение 16.1. Пусть $K = \bigcup_1^n K_j \subset \mathbb{C}^n$, где K_j — линейно выпуклые компакты, такие, что сечения каждого K_j комплексными прямыми односвязны.

Показать, что $H^{2n-1}(K) = 0$.

Упражнение 16.2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n - (n-1)$-выпуклое множество. Доказать, что множество $E' = E_1 \cup E_2$ $(n-1)$-выпукло, где E_1, E_2 — произвольные связные компоненты множества E.

§ 17. Семейства связных инвариантных относительно пересечений множеств

Теорема 17.1. *Пусть Σ — система связных компактных множеств в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, замкнутая относительно пересечений в том смысле, что пересечение $\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$ любого подсемейства $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ системы Σ снова принадлежит Σ. Пусть, кроме того, Σ комплексно аффинно инвариантна, т.е. эта система, вместе с каждым множеством, содержит все его образы при невырожденных комплексно аффинных преобразованиях пространства $\mathbb{C}^n$. Тогда каждое $E \in \Sigma$ выпукло.*

Доказательство. Покажем сначала, что, пользуясь замкнутостью системы и ее комплексно аффинной инвариантностью, задачу можно свести к задаче с множеством, лежащим в комплексной прямой. Заметим, что множество E выпукло, если оно пусто или одноточечно. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что E содержит две различные точки $z^1, z^2 \in \mathbb{C}^n$ и не содержит некоторую точку z^0 при $n > 1$. Пусть l — комплексная прямая, проходящая через точки z^1, z^2. В силу компактности E, точку z^0 можно выбрать не лежащей на прямой l.

Пусть z^α — произвольная точка, не лежащая на прямой l. Аффинным преобразованием пространства f_α, которое оставляет на месте все точки прямой l, переведем точку z^0 в точку z^α (легко убедиться, что такое комплексно аффинное преобразование существует). Рас-

смотрим множество $E_1 = E \cap (\bigcap\limits_{\alpha} f_\alpha(E))$. Согласно условию, оно принадлежит системе Σ и, следовательно, связно. С другой стороны, E_1 содержит точки z^1, z^2 и не содержит ни одной точки из $\mathbb{C}^n \backslash l$. Следовательно, мы показали, что во всех случаях система Σ содержит подсистему Σ_0 некоторых подмножеств комплексных прямых.

Отметим также, что Σ_0 не может состоять только из пустых или одноточечных подмножеств, иначе мы пришли бы к вырожденному случаю.

Пусть теперь $E \in \Sigma_0$. Рассмотрим c-оболочку $\hat{E}$ множества E и покажем ее выпуклость. Если множество $\hat{E}$ не выпукло, то найдем на некоторой, опорной к $\hat{E}$ и E прямой отрезок $[a, b]$, такой, что $a, b \in E \subset \hat{E}$, а для интервала $(a, b) \cap \hat{E} = \varnothing$.

Аффинным преобразованием f переведем точку a в точку -1, а точку b — в точку 1. При этом вещественная прямая $\lambda = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ будет опорной к $E_2 = f(E)$ и $\hat{E}_2 = f(\hat{E})$. Рассмотрим множество $E_3 = E_2 \cap f_1(E_2)$, лежащее в вещественной прямой λ. Оно содержит точки 1 и -1, но не содержит интервала $(-1, 1)$, поэтому оно несвязно. Это противоречит связности множества $E_3 \in \Sigma_0$. Следовательно, множество $\hat{E}$ выпукло.

Покажем теперь выпуклость E. Если E не выпукло, то в силу выпуклости $\hat{E}$ дополнение к нему $\mathbb{C}\backslash E$ имеет ограниченные компоненты. Пусть $a, b \in E$ — такие точки, что открытый интервал (a, b) полностью лежит в одной из компонент. Не нарушая общности, можем считать, что точки a, b лежат на вещественной прямой $\lambda = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ и $a < b$, так как этого легко добиться комплексно аффинным преобразованием. Пусть $a_1 = \min\limits_{z \in E \cap \lambda} \operatorname{Re} z$, а $b_2 = \max\limits_{z \in E \cap \lambda} \operatorname{Re} z$. Рассмотрим комплексно аффинное преобразование f_2 переводящее точки a и b в точки a_1 и b_1 соответственно; при этом интервал (a, b) перейдет в интервал (a_1, b_1), не принадлежащий множеству $f_2(E)$. Поэтому пересечение $E \cap f_2(E) \cap \lambda = a_1 \cup b_1$ состоит из двух точек. Согласно условию, $E_4 = E \cap f_2(E) \in \Sigma_0$ и, поэтому, ввиду установленного выше, его c-оболочка $\hat{E}_4$ выпукла. Множество E_4 разбивает комплексную прямую. Рассмотрим аффинное преобразование f_3, переводящее точку a_1 в точку $\frac{a_1+b_1}{2}$, а точку b_1 — в точку $b_1 + 1$. Тогда множества E_4 и $f_3(E_4)$ пересекаются как в верхней, так и в нижней полуплоскости, на которые вещественная прямая λ делит комплексную прямую. Это пересечение несвязно, так как не содержит точек прямой λ. А этот факт противоречит принадлежности множе-

ства $E_4 \cap f_3(E_4)$ системе Σ_0. Следовательно, подсистема Σ_0 содержит только выпуклые множества. Теперь, если множество $E \in \Sigma$, то отображая аффинным преобразованием две точки некоторого множества $E' \in \Sigma_0$ в произвольные две точки множества E и учитывая, что $E \cap E' \in \Sigma_0$ и $E \cap E' \subset E$, получаем, что множество E вместе с произвольной парой точек содержит и соединяющий их отрезок. Теорема доказана.

Замечание 17.1. Заметим, что в отличие от вещественного случая [194] некомпактная система не обязана содержать отрезки вещественных прямых. Как пример, достаточно рассмотреть систему, состоящую из комплексной прямой и ее аффинных преобразований.

Дальше Σ — невырожденная система множеств, содержащая хотя бы одно множество, отличное от пустого и всего $\mathbb{C}^n$.

Утверждение 17.1. *Пусть Σ — система множеств в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, замкнутая относительно пересечений. Пусть, кроме того, система Σ комплексно аффинно инвариантна, т.е. эта система вместе с каждым множеством содержит все его образы при невырожденных комплексно аффинных преобразованиях пространства.*

Тогда система Σ содержит, как подсистему, сечения множеств из Σ комплексными прямыми.

Не нарушая общности, будем считать, что E содержит две различные точки $z^1, z^2 \in \mathbb{C}^n$ и не содержит некоторую точку z^0 при $n > 1$. Пусть l — комплексная прямая, проходящая через точки z^1, z^2. В силу компактности E, точку z^0 можно выбрать не лежащей на прямой l.

Пусть $w(\alpha)$ — произвольная точка, не лежащая на прямой l.

Легко убедиться, что существует комплексно аффинное преобразование пространства $\mathbb{C}^n$, назовем его f_α, которое оставляет на месте все точки прямой l и переводит точку z^0 в точку $w(\alpha)$. Рассмотрим множество $E_1 = E \cap (\bigcap\limits_\alpha f_\alpha(E))$. По построению, оно не может содержать ни одной точки за пределами прямой l. Следовательно, оно совпадает с сечением $E \cap l$.

Упражнение 17.1. Доказать теорему 17.1, используя инвариантность системы Σ только относительно комплексно аффинных движений (т.е. не используя растяжений).

Глава 4

Многозначные функции

Содержание этой главы отражает авторский взгляд на возможность введения многозначных линейно выпуклых функций. В отличие от высказанного в [131] мнения, что такие функции ввести невозможно, автор вводит, опираясь на аналогичные подходы выпуклого анализа, многозначные функции, которые коррелируют со свойствами многозначных выпуклых функций. Показано, как можно исследовать такие функции на языке субдифференциалов.

§ 18. Линейно выпуклые функции

Для того чтобы иметь возможность пользоваться аналитическим заданием линейно выпуклых множеств, введем понятие линейно выпуклой функции. За исходное понятие возьмем комплексно аффинную функцию, отображающую комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ в комплексную прямую $\mathbb{C}$.

Определение 18.1. Линейно выпуклое множество $E \subset \mathbb{C}^n$ назовем строго линейно выпуклым, если для любой опорной гиперплоскости l сечение $l \cap E$ не содержит внутренних относительно l точек.

Определение 18.2. Заданная на множестве $E_f \subset \mathbb{C}^n$ многозначная функция $f : E_f \to \mathbb{C}$ называется линейно выпуклой, если для произвольной пары точек $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ существует аффинная функция l, такая, что $w_0 = l(z_0)$ и $l(z) \cap f(z) = \varnothing$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$.

Определение 18.3. Заданная на некотором множестве $E_f \subset \mathbb{C}^n$ линейно выпуклая функция $f : E_f \to \mathbb{C}$ называется сильно линейно выпуклой (соответственно строго линейно выпуклой), когда ее график $\Gamma(f)$ представляет собой сильно линейно выпуклое (соответственно строго линейно выпуклое) множество в $\mathbb{C}^{n+1}$ (в последнем случае требуем еще открытость области задания функции).

Определение линейно выпуклой функции можно естественно распространить на многозначные функции, принимающие значения в расширенной комплексной плоскости $\overset{o}{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup (\infty)$, полагая, что в тех точках, где $f(z)$ пусто, $f(z) = \infty$.

Эффективным множеством линейно выпуклой функции f назовем проекцию на $\mathbb{C}^n$ графика функции $f : E_f = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) \cap \mathbb{C} \neq \varnothing\}$. Линейно вогнутой функцией назовем такую многозначную функцию f, для которой функция $\varphi = \mathbb{C} \setminus f$ линейно выпукла. Многозначной аффинной функцией назовем функцию линейно выпуклую и линейно вогнутую одновременно, для которой найдется точка z, в которой оба множества $f(z) \cap \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \setminus f(z)$ непусты. Как легко видеть из теоремы 7.1, для многозначной аффинной функции справедливо равенство $f(z) = f(0) + l(z)$, где l — однозначная аффинная функция.

Линейно выпуклую функцию назовем собственной, если по крайней мере для одного z выполнено $f(z) \cap \mathbb{C} \neq \varnothing$ и для всех z $\mathbb{C} \setminus f(z) \neq \varnothing$.

Определение 18.4. Функцию

$$W_E(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{z \in E} \langle z, z^* \rangle$$

назовем опорной функцией множества $E \subset \mathbb{C}^n$.

Определение 18.5. Если $E \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклое множество, то функция

$$\delta(z|E) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in E, \\ \infty, & \text{если } z \notin E, \end{cases}$$

называется его индикаторной функцией.

Легко убедится, что опорная и индикаторная функции линейно выпуклы.

Замечание 18.1. Индикаторная функция может быть определена и для не линейно выпуклого множества. Но она не будет линейно выпуклой.

Пример 13.1 показывает, что из линейной выпуклости функции f, вообще говоря, не следует линейная выпуклость эффективного множества.

Предложение 18.1. *Если f_α, $\alpha \in A$, — семейство линейно выпуклых функций, где A — произвольное множество индексов, то функция $f = \bigcap\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ линейно выпуклая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что

$$\Gamma(f) = \bigcap_{\alpha\in A} \Gamma(f_\alpha).$$

Но пересечение линейно выпуклых множеств линейно выпукло, согласно предложению 2.17. Значит, $\Gamma(f)$ — линейно выпуклое множество и функция f линейно выпуклая.

§ 19. Сопряженные функции

Пусть $f : E_f \to \overset{o}{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup (\infty)$ — многозначная функция, заданная на некотором множестве $E_f \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{Z}$. Рассмотрим также дубликат пространства $\mathbb{C}^n = \mathbb{Z}^*$ и билинейную форму $\langle z, z^*\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} z^j z^{j*}$, где $z \in \mathbb{Z}$, $z^* \in \mathbb{Z}^*$.

Функцией, сопряженной с f, назовем функцию

$$f^*(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle z, z^*\rangle - f(z)). \tag{19.1}$$

Непосредственно из определения сопряженной функции вытекает комплексное неравенство типа неравенства Юнга–Фенхеля

$$\langle z, z^*\rangle \notin f(z) + f^*(z^*),$$

или, что то же,

$$\langle z, z^*\rangle \in \mathbb{C} \setminus (f(z) + f^*(z^*)),$$

или

$$f(z) \cap (\langle z, z^*\rangle - f^*(z^*)) = \varnothing$$

при всех $z \in \mathbb{Z}$, $z^* \in \mathbb{Z}^*$.

Функция $f^{**} = (f^*)^*$ называется второй сопряженной к функции f.

П р и м е р 19.1. Сопряженной с многозначной аффинной функцией $f(z) = \langle z_0^*, z\rangle + f(0)$, где $f(0)$ — множество, является функция

$$f^*(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle z^*, z\rangle - \langle z_0^*, z\rangle - f(0)) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle z^* - z_0^*, z\rangle - f(0)) =$$

$$= \begin{cases} \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (-f(0)), & \text{если } z^* = z_0^*, \\ \infty, & \text{если } z^* \neq z_0^*. \end{cases}$$

П р и м е р 19.2. Пусть $E \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n \setminus E \neq \varnothing$, $f(z) = \delta(z|E)$. Тогда

$$f^*(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle z^*, z\rangle - \delta(z|E)) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{z\in E} \langle z^*, z\rangle,$$

т.е. сопряженная с индикаторной функцией собственного подмножества E будет опорная функция этого множества.

Условимся писать $f_1 \supseteq f_2$, если $f_1(z) \supseteq f_2(z)$ при всех z. При этом будем говорить, что f_1 есть продолжение функции f_2, а f_2 есть сужение f_1. Из $f_1 \supseteq f_2$ и (19.1) следует, что $f_1^* \subseteq f_2^*$.

Предложение 19.1. *Для всякой функции справедливо включение $f \subset f^{**}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (19.2)

$$f^{**}(z) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{z^*} (\langle z, z^*\rangle - f^*(z^*)) \supseteq f(z).$$

Определение 19.4. Многозначная функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется открытой (соответственно замкнутой или компактной), когда ее график представляет собой открытое (соответственно замкнутое или компактное) множество в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Предложение 19.2. *Сопряженная функция к открытой функции будет замкнутой и линейно выпуклой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Значение сопряженной функции можно представить в виде $f^*(z^*) = \bigcap\limits_z \big(\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (\langle z, z^*\rangle - f(z))\big)$. При фиксированном z функция $\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (\langle z, z^*\rangle - f(z))$ есть многозначная аффинная функция по z^*, поэтому ее можно представить в виде $\langle z, z^*\rangle + [\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (-f(z))]$. График $\Gamma(f^*)$ есть пересечение графиков замкнутых линейно выпуклых функций $\langle z, z^*\rangle + [\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (-f(z))]$, поэтому $\Gamma(f^*)$ — также замкнутое и линейно выпуклое множество.

Замечание 19.1. Заметим, что при доказательстве предложения 19.2 открытость исходной функции мы использовали только в

доказательстве замкнутости сопряженной функции. Следовательно, сопряженная к произвольной функции будет линейно выпуклой.

Предложение 19.3. *Пусть f — собственная линейно выпуклая функция. Тогда f^* — собственная функция.*

Доказательство. Если $z_0 \in E_f$, то

$$f^*(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle z, z^* \rangle - f(z)) \subset \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (\langle z_0, z^* \rangle - f(z_0)).$$

Следовательно, $\mathbb{C} \setminus f^*(z^*) \supset \langle z_0, z^* \rangle - f(z_0) \neq \varnothing$ для всех z^*. С другой стороны, в силу линейной выпуклости и собственности, существует аффинная функция $l(z) = \langle z^*, z \rangle + \alpha$, не пересекающая $\Gamma(f)$. Тогда для этого z^*: $f^*(z^*) \supset -\alpha \neq \varnothing$.

Предложение 19.4. *Пусть $\Lambda : \mathbb{Z} \to W$ — комплексно линейный гомеоморфизм $\mathbb{Z}$ и W, а g — функция на W. Положим*

$$f(z) = \lambda g(\Lambda z + w_0) + \langle z_0^*, z \rangle + \gamma_0,$$

где $w_0 \in W$, $z_0^* \in \mathbb{Z}^*$, $\gamma_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Тогда

$$f^*(z^*) = \lambda g^*(\lambda^{-1} \Lambda^{-1*}(z^* - z_0^*)) - \langle z^* - z_0^*, \Lambda^{-1} w_0 \rangle - \gamma_0.$$

Доказательство. Имеем

$$f^*(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle z^*, z \rangle - \lambda g(\Lambda z + w_0) - \langle z_0^*, z \rangle - \gamma_0) =$$

$$= \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle z^* - z_0^*, z \rangle - \lambda g(\Lambda z + w_0) - \gamma_0) =$$

$$= \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle \Lambda^{-1*}(z^* - z_0^*), w \rangle - \lambda g(w) - \langle z^* - z_0^*, \Lambda^{-1*} w_0 \rangle - \gamma_0) =$$

$$= \Big[\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \lambda \bigcup_w (\langle \lambda^{-1} \Lambda^{-1*}(z^* - z_0^*), w \rangle - g(w)) \Big] - \langle z^* - z_0^*, \Lambda^{-1} w_0 \rangle - \gamma_0 =$$

$$= \lambda \Big[\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_w (\langle \lambda^{-1} \Lambda^{-1*}(z^* - z_0^*), w \rangle - g(w)) \Big] - \langle z^* - z_0^*, \Lambda^{-1} w_0 \rangle - \gamma_0 =$$

$$= \lambda g^* \lambda^{-1} \Lambda^{-1*}(z^* - z_0^*) - \langle z^* - z_0^*, \Lambda^{-1} w_0 \rangle - \gamma_0$$

(полагаем $w = \Lambda z + w_0$, тогда $z = \Lambda^{-1}(w - w_0)$, а $\langle z^* - z_0^*, z \rangle = \langle z^* - z_0^*, \Lambda^{-1} w \rangle - \langle z^* - z_0^*, \Lambda^{-1*} w_0 \rangle = \langle \Lambda^{-1*}(z^* - z_0^*), w \rangle - \langle z^* - z_0^*, \Lambda^{-1} w_0 \rangle$).

Из этого предложения следуют формулы для подсчета некоторых сопряженных функций:

$$f(z) = g(z + z_0) \;\Rightarrow\; f^*(z^*) = g^*(z^*) - \langle z^*, z_0^* \rangle;$$

$$f(z) = g(z) + \langle z_0^*, z\rangle \;\Rightarrow\; f^*(z^*) = g^*(z^* - z_0^*);$$
$$f(z) = \lambda g(\mu z),\ \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0 \;\Rightarrow\; f^*(z^*) = \lambda g^*(\lambda^{-1}\mu^{-1} z^*).$$

Докажем комплексный аналог теоремы Фенхеля–Моро [188].

Теорема 19.1. *Пусть f — многозначная функция на $\mathbb{Z}$, такая, что $\mathbb{C} \setminus f(z) \neq \varnothing$ для всех $z \in \mathbb{Z}$. Тогда $f^{**} = f$ в том и только том случае, когда f линейно выпукла.*

Доказательство. Если $f = f^{**}$, то, согласно замечанию 19.1, f линейно выпукла. Далее, если $f(\mathbb{Z}) \equiv \infty$, то равенство $f = f^{**}$ легко получается из формулы (19.1). Имеем $f^*(z^*) = \mathbb{C}$ для всех $z^* \in \mathbb{Z}^*$ и $f^{**} \equiv \infty$. Теперь, в силу предложения 19.1, достаточно показать, что для линейно выпуклой функции справедливо включение $f \supseteq f^{**}$.

Пусть в некоторой точке z_0 $f(z_0) \neq f^{**}(z_0)$. Тогда существует аффинная функция $l(z) = \langle z, z_0^*\rangle + \alpha$, такая, что $\Gamma(l) \cap \Gamma(f) = \varnothing$ и $w_0 = \langle z, z_0^*\rangle + \alpha$, где $w_0 \in f^{**}(z_0) \setminus f(z_0)$. Тогда

$$f^{**}(z_0^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle z, z_0^*\rangle - f(z)) = \bigcap_z \left[\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (\langle z, z_0^*\rangle - f(z))\right] \supset (-\alpha),$$

так как $[\langle z, z_0^*\rangle - f(z)] \neq -\alpha$ для всех $z \in \mathbb{Z}$. Для функции f^{**} справедливо включение

$$f^{**}(z_0) = \bigcap_{z^*} \left[\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (\langle z_0, z^*\rangle - f^*(z^*))\right] \subset$$
$$\subset \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (\langle z_0, z_0^*\rangle - f^*(z_0^*)) \subset \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus (\langle z_0, z_0^*\rangle + \alpha) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus w_0.$$

Поэтому $w_0 \in f^{**}(z_0)$, что противоречит выбору точки $w_0 \in f^{**}(z_0) \setminus f(z_0)$. Теорема доказана.

Определение 19.2. Функция f называется однородной, если $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Предложение 19.5. *Пусть f — собственная линейно выпуклая однородная функция на $Z \setminus \Theta$ и $f(\Theta) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus 0$. Тогда f есть опорная функция некоторого множества.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$A = \{z^* \in Z^* \mid f(z) \not\ni \langle z^*, z\rangle \ \forall\, z \in Z\}$$

и покажем, что

$$f(z) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{z^* \in A} \langle z^*, z\rangle = W_A(z).$$

Если $z^* \in A$, то $\langle z^*, z\rangle \notin f(z)$ и $0 \notin \langle z^*, z\rangle - f(z)$ для всех z. Следовательно,

$$f^*(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{z\in Z}[\langle z^*, z\rangle - f(z)] = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus f(\Theta) = 0.$$

Если $z^* \notin A$, то $\langle z^*, z\rangle \in f(z)$ для некоторого $z^0 \in Z$, $z^0 \neq 0$. Тогда

$$f^*(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{z\in Z}[\langle z^*, z\rangle - f(z)] = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \Big(f(\Theta) \bigcup_{z\in Z\setminus\Theta}[\langle z^*, z\rangle - f(z)]\Big) =$$

$$= \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \big[(\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus 0) \cup (\langle z^*, z\rangle - f(z^0))\big] = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus [(\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus 0) \cup 0] = \infty.$$

Согласно предложению 19.3, f^* — собственная функция. Поэтому $A \neq \varnothing$ и $f^* = \delta_A$. В силу теоремы Фенхеля–Моро отсюда следует (см. пример 19.2), что $f = f^{**} = \delta_A^* = W_A$, т.е. f — опорная функция множества A.

Отсюда получаем следующее утверждение.

Предложение 19.6. *Если f — однородная линейно выпуклая функция, отличная от аффинной на $\mathbb{Z} \setminus \Theta$,* то

$$f^*(z^*) = \delta(z^*|E_{f^*}).$$

Теорема 19.2. *Если f — однородная линейно выпуклая функция, отличная от аффинной на $\mathbb{Z} \setminus \Theta$, то*

$$f(z) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{z^*\in E_{f^*}} \langle z^*, z\rangle.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой 19.1: $f(z) = f^{**}(z) = \delta^*(z)$. Теперь из примера 19.2 следует, что f будет опорной функцией множества E_{f^*}.

Одним из примеров однородной функции будет комплексная функция Минковского, которую определим следующим образом.

Пусть E — множество в $\mathbb{C}^n$, $\Theta \in E$. Положим $R_E(z) = \big\{w \in \mathbb{C} \,\big|\, \frac{z}{w} \in M\big\}$ при $z \in \mathbb{C}^n \setminus \Theta$, $R_E(\Theta) = \mathbb{C} \setminus 0$.

Покажем однородность функции R_E. Имеем

$$R_E(\lambda z) = \left\{w \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{\lambda z}{w} \in E\right\} = \left\{\lambda w \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{\lambda z}{\lambda w} = \frac{z}{w} \in E\right\} = \lambda R_E(z).$$

Легко убедится в следующих свойствах функции R_E:

1) если E — линейно выпуклое множество, то функция R_E линейно выпукла;

2) $1 \in R_E(z)$, если $z \in E$ и $1 \notin R_E(z)$, если $z \notin E$.

Рассмотрим дальше семейство уравнений

$$w = \langle z, z^* \rangle - \alpha, \tag{19.3}$$

которое при фиксированном z^* задает семейство параллельных гиперплоскостей в $\mathbb{C}^{n+1}$, зависящих от α. Если $\alpha \in \langle z_0, z^* \rangle - f(z_0)$, то эта гиперплоскость пересекает график $\Gamma(f)$. Положив $z = 0$, получаем, что множество $\bigcup\limits_{z_0}(\langle z_0, z^* \rangle - f(z_0))$ задает образ графика $\Gamma(f)$ при проектировании π_L семейством (19.3) на ось $z = 0$. Следовательно, согласно (19.1),

$$f^*(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \pi_L(\Gamma(f)). \tag{19.4}$$

Следствие 19.1. Если f — открытое отображение, то $f^*(z^*)$ компактно.

Это следствие очевидным образом вытекает из (19.4) и того, что проекция π_L сохраняет открытость.

Следствие 19.2. Если f — компактное отображение, то $f^*(z^*)$ открыто.

Следствие вытекает из (19.4), так как непрерывное отображение π_L сохраняет компактность.

Следствие 19.3. Если f — сильно линейно выпуклое отображение, то $f^*(z^*)$ ациклично. Следствие вытекает из (19.4) и следствия 19.2.

Определение 19.4. Скажем, что функция $g = \operatorname{int} f$, если $\Gamma(g) = \operatorname{int} \Gamma(f)$.

Предложение 19.7. *Если f — линейно выпуклая функция и $E_f = E_{(\operatorname{int} f)}$, то $\operatorname{int} f$ линейно выпуклая функция.*

Доказательство. Согласно предложению 2.24, $\Gamma(\operatorname{int} f) = \operatorname{int} \Gamma(f)$ — линейно выпуклое множество. Условие $E_f = E_{(\operatorname{int} f)}$ обеспечивает то, что гиперплоскость, не пересекающая $\Gamma(\operatorname{int} f)$, задает аффинную функцию в точках $(z, w) \in \Gamma(f) \setminus \Gamma(\operatorname{int} f)$, так как $\operatorname{int} f(z) \neq \varnothing$ при $z \in E_{(\operatorname{int} f)}$.

Следующий пример показывает, что при $E_f \neq E_{(\operatorname{int} f)}$ $\operatorname{int} f$ может не быть линейно выпуклой функцией.

Пример 19.3. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — линейно выпуклая функция, такая, что $\Gamma(f) = \{(z, w) \,|\, z^2 + w^2 \leq 1\}$. Тогда $\operatorname{int} f$ не будет линейно выпуклой функцией, так как в точках $\{(z, w) \,|\, w = 0,\ |z| = 1\}$

существует единственная комплексная прямая $z = \text{const}$, не пересекающая график $\Gamma(\operatorname{int} f)$, однако она не задает аффинной функции. Заметим, что $E_f \backslash E_{(\operatorname{int} f)} = \{z \,|\, |z| = 1\} \neq \varnothing$.

Исследуем подробнее двойственность между пространствами $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{C}^*$, задаваемую соотношением

$$w + w^* = \langle z, z^* \rangle, \tag{19.5}$$

на основании которой построены сопряженные функции. Легко убедиться, что точка (z, w) задает в $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{C}^*$ гиперплоскость; прямая $z = \text{const}$ — семейство параллельных гиперплоскостей; гиперплоскость $w = \text{const}$ — семейство гиперплоскостей, проходящих через фиксированную точку w, и т.д. Все это напоминает двойственность

$$\langle z, w \rangle = 1, \tag{19.6}$$

свойства которой изучались в § 2.

Попытаемся сравнить обе двойственности. Пусть (u, v) — координаты точки в $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{C}^*$. Тогда двойственность (19.6) принимает вид $\langle z, u \rangle + wv = 1$; если $v \neq 0$, то преобразуем уравнение

$$\left\langle z, -\frac{u}{v} \right\rangle = w - \frac{1}{v}.$$

Введем замену координат

$$-\frac{u}{v} = z^*, \quad -\frac{1}{v} = w^*. \tag{19.7}$$

Этой заменой исследуемое уравнение сводится к (19.5). Предлагаемая замена не что иное, как проективное преобразование пространства $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$, компактифицированного бесконечно удаленной гиперплоскостью, которое корректно определено и при $v = 0$. Как показано в § 5, проективные преобразования инвариантны на множествах комплексных плоскостей, линейно выпуклых и сильно линейно выпуклых множеств. Поэтому все свойства линейно выпуклых и сильно линейно выпуклых множеств, полученные раньше, автоматически переносятся в подходящей интерпретации на сопряженные функции. Единственное существенное замечание — это то, что для компактности функции, сопряженной к открытой, и для ацикличности функции, сопряженной к сильно линейно выпуклой, необходимо пополнить рассматриваемые отображения, а именно положить $f(\infty) = \infty$

и рассматривать отображение $f : \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n \to \overset{o}{\mathbb{C}}$, так как замена координат (19.7) переводит начало координат в бесконечно удаленную точку. Преобразование (19.7) позволяет нам также корректно расширить понятие линейно выпуклой функции так, чтобы все функции $\operatorname{int} f$ были линейно выпуклыми, когда f линейно выпукла. Для этого считаем, что гиперплоскости, содержащей прямую $z = \text{const}$, соответствует точка с координатой $z^* = \infty$.

Предложение 19.8. *Если $f : \overset{o}{\mathbb{C}}{}^n \to \overset{o}{\mathbb{C}}$ — открытая функция и для конечной точки (z^*, w^*) гиперплоскость $L : w = \langle z, z^* \rangle - w^*$ проходит через какую-нибудь конечную точку границы $\partial\Gamma(f)$ или является пределом таких гиперплоскостей, но не пересекает $\Gamma(f)$, то $(z_0^*, w_0^*) \in \partial\Gamma(f^*)$.*

Доказательство. Пусть гиперплоскость $w = \langle z, z_0^* \rangle - w_0^*$ не пересекает $\Gamma(f)$, но проходит через некоторую точку границы $\partial\Gamma(f)$. Точка $(z_0^*, w_0^*) \in \Gamma(f^*)$, но не может принадлежать внутренности $\operatorname{int}\Gamma(f^*)$, иначе, для $\operatorname{int} f^*(z_0^*)$, являющейся окрестностью точки $w_0^* \subset \mathbb{C}$, все гиперплоскости $w = \langle z, z_0^* \rangle - w^*$, $w^* \in \operatorname{int} f(z_0^*)$, не пересекали бы $\Gamma(f)$, что противоречит не пустоте $L \cap \partial\Gamma(f)$. Если же гиперплоскость L является пределом гиперплоскостей L_m описанного выше вида, каждая из которых задается точкой $(z_m^*, w_m^*) \in \partial\Gamma(f^*)$, то гиперплоскость L задается точкой $(z_0^*, \omega_0^*) = \lim\limits_{m\to\infty} (z_m^*, \omega_m^*)$.

Определение 19.3. Пусть f_α, $\alpha \in A$, — многозначные функции на $\mathbb{Z}$. Функцию $\big(\bigcup\limits_\alpha f_\alpha\big)(z) = \bigcup\limits_\alpha f_\alpha(z)$ назовем объединением функций f_α, а $\big(\bigcap\limits_\alpha f_\alpha\big)(z) = \bigcap\limits_\alpha f_\alpha(z)$ — их пересечением.

Имеет место следующая теорема двойственности.

Теорема 19.3. *Пусть f_α, $\alpha \in A$, — многозначные функции на $\mathbb{Z}$. Тогда*

$$\Big(\bigcup_\alpha f_\alpha\Big)^* = \bigcap_\alpha f_\alpha^*.$$

Доказательство. Воспользуемся выражением (19.1) для сопряженных функций. Имеем

$$\Big(\bigcup_\alpha f_\alpha\Big)^*(z^*) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z \Big(\langle z, z^* \rangle - \bigcup_\alpha f_\alpha(z)\Big) =$$

$$= \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z \bigcup_\alpha (\langle z, z^* \rangle - f_\alpha(z)) = \overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_\alpha \bigcup_z (\langle z, z^* \rangle - f_\alpha(z)) =$$

$$= \bigcap_\alpha \Big(\overset{o}{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_z (\langle z, z^* \rangle - f_\alpha(z))\Big) = \bigcap_\alpha f_\alpha^*(z^*).$$

§ 20. Дифференцирование многозначных функций

В настоящем параграфе распространим правила дифференцирования на многозначные вещественные функции со связными образами. При описанном методе сохраняются основные классические теоремы дифференциального исчисления и, кроме того, все непрерывные функции становятся бесконечно дифференцируемыми во всех точках, причем их производными будут некоторые многозначные функции со связными образами.

Пусть $F : (a,b) \to \overline{R}^1$ — многозначная полунепрерывная сверху функция со связными компактными образами точек из (a,b), где (a,b) — интервал в R^1. (Мы рассматриваем $\overline{R}^1$ как прямую R^1, компактифицированную с помощью двух точек, т.е. имеющую топологию отрезка). Класс таких функций обозначим $\mathfrak{D}$.

Скажем, что функция из класса $\mathfrak{D}$ принадлежит классу D, если для ее графика $\operatorname{int}\Gamma(F) = \varnothing$.

Если же $F \in \mathfrak{D}$ и $\operatorname{int}\Gamma(F) \neq \varnothing$, то вместо F будем рассматривать две вспомогательные функции F_1 и F_2 класса D, которые следующим образом получаются из F. Пусть $F_1(x) = F(x) \cup (-\infty, y)$, $F_2(x) = F(x) \cup (y, +\infty)$, где $y \in F(x)$ — произвольная точка из $F(x)$. Очевидно, что графики $\Gamma(F_i)$, $i = 1, 2$, — некоторые замкнутые подмножества в $(a,b) \times R^1$. Положим $\Gamma(F_i) = \partial\Gamma(F_i)$. Задания графиков однозначно определяют функции F_1, F_2. Заметим, что, вообще говоря, области определения этих функций уже области определения функции F и составляют некоторые ее открытые подмножества.

Скажем, что d, $-\infty \leqslant d \leqslant +\infty$, — производное число функций $F \in D$ в точке $x \in (a,b)$, если существуют последовательности точек $\{x_k^i\} \to x$ $(k = 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2)$, такие, что $\frac{y_k^1 - y_k^2}{x_k^1 - x_k^2} \to d$, где $y_k^i \in F(x_k^i)$ (в частности, допускается постоянство одной из последовательностей, т.е. $x_k^2 = x$). При этом, если все $x_k^i \geqslant x$, то говорим о правом производном числе, а если все $x_k^i \leqslant x$ — о левом. Обозначим $\mathfrak{M}_x(F)$ — множество производных чисел в точке x, $\mathfrak{M}_x^+(f)$, $\mathfrak{M}_x^-(f)$ — соответственно множества правых и левых производных чисел. Заметим, что данное введение производных чисел отличается от традиционного и совокупность всех производных чисел в точке, вообще говоря, не исчерпывается правыми и левыми производными числами.

П р и м е р 20.1. Для однозначной функции $f(x) = |x|$ в точке 0 $\mathfrak{M}_0^+(f) = 1$, $\mathfrak{M}_0^-(f) = -1$, а $\mathfrak{M}_0(f)$ заполняет отрезок $[-1, 1]$.

Пусть $F \in \mathfrak{D}$ и $\operatorname{int}\Gamma(F) \neq \varnothing$. Тогда можем найти производные числа вспомогательных функций F_1, F_2. Обозначим $\overline{F}'(x)$ ($\underline{F}'(x)$) наибольшее (наименьшее) производное число функций F_1, F_2 в точке x. Отрезок $\left[\underline{F}'(x), \overline{F}'(x)\right]$ (может быть и бесконечный) назовем производным множеством $\mathfrak{M}_x(F)$ функции F в точке x. В точках, в которых функция F определена, а одна из функций F_i (или обе) не определена, считаем $\underline{F}'(x) = -\infty$, $\overline{F}'(x) = +\infty$ соответственно.

Геометрически такое введение производного множества основано на следующих соображениях.

1. Если $F \in \mathfrak{D}$ не принадлежит классу D, а F_1 и F_2 — даже дифференцируемые однозначные функции, в частности, $F_1 = F_2 + \text{const}$, то попытка рассмотрения для F всех производных чисел по образцу введения их для функций класса D приводит к тому, что в каждой точке производные числа исчерпывают всю прямую и такой способ введения ничего не говорит о границе графика функции F, а именно эта граница и отражает характер поведения функции.

2. Если для вспомогательных функций F_1, F_2, построенных по функции F, ввести усреднение $F_3 = (F_1 + F_2)/2$, $F_3 \in D$,

$$F_3(x) = \left[\frac{\underline{F_1(x)} + \underline{F_2(x)}}{2}, \frac{\overline{F_1(x)} + \overline{F_2(x)}}{2}\right],$$

где $\overline{F}(x)$ и $\underline{F}(x)$ — максимальное и минимальное значения функции F соответственно, то множество производных чисел функции F_3 в точке x получится как подмножество множества всевозможных средних арифметических $d = \frac{d_1+d_2}{2}$, где d_1 и d_2 — некоторые производные числа функций F_1 и F_2 соответственно (вообще говоря, $\mathfrak{M}_x(F_3)$ не исчерпывает всего множества средних арифметических). Продолжая процесс усреднения для пар (F_1, F_3), (F_3, F_2) и т.д., получаем подмножество функций класса D. Заметим, к тому же, что каждое такое усреднение будет сечением функции F. Если занумеровать множества этих усреднений, то можно рассматривать предельные функции $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i F_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i = 1$, $\mu_i \geqslant 0$. Легко видеть, что сумма $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i F_i$ совпадает с суммой $\alpha F_1 + \beta F_2$, где $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$. Во-первых, множество графиков таких функций исчерпывает гра-

фик $\Gamma(F)$, а во-вторых, множество производных чисел для таких функций в точке x исчерпывает отрезок $\left[\underline{F}', \overline{F}'\right]$. Второе свойство очевидно для бесконечного отрезка $\mathfrak{M}_x(F_i) = [-\infty, \infty]$, $i = 1$ или 2, а также при выполнении условия $\mathfrak{M}_x(F_1) \cap \mathfrak{M}_x(F_2) \neq \varnothing$. Рассмотрим случай $\mathfrak{M}_x(F_1) = [a, b]$, $\mathfrak{M}_x(F_2) = [c, d]$, $a > d$. Тогда $\mathfrak{M}_x\left(\frac{F_1+F_2}{2}\right) = [a_1, b_1] \subset \left[\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right]$. Если отрезки (a, b) и (a_1, b_1) не пересекаются, то можно строить следующее усреднение и т.д. Используя вложенность отрезков $[c, b] \supset [a_1, b_1]$ и их стремление к нулю по диаметру, легко видеть, что произвольная точка отрезка $[c, b]$ будет принадлежать или $\mathfrak{M}_x(F_i)$ для некоторого усреднения, или $\mathfrak{M}_x(\alpha F_1 + \beta F_2)$, где $\alpha F_1 + \beta F_2$ — предел последовательности усреднений. Другие случаи с полубесконечными отрезками тоже легко проверяются.

Изучим свойства введенного таким образом можества производных чисел.

Предложение 20.1. *Если $F \in D$ и $\mathfrak{M}_x(F)$ — ограниченное множество, то функция F в точке x однозначна и непрерывна.*

Доказательство очевидно.

Следствие 20.1. Если для функции $F \in \mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{M}_x(F)$ ограничены во всех точках $x \in (a, b)$, то F непрерывна как многозначная функция, а F_1 и F_2 — непрерывные однозначные функции.

Предложение 20.2. *Построенное многозначное отображение $\mathfrak{M}(F)$ будет отображением класса $\mathfrak{D}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что множество $\mathfrak{M}_x(F)$ для $F \in D$ можно получить следующим образом. Пусть $M_\varepsilon(x)$ — множество всех значений соотношения $\frac{y^1-y^2}{x^1-x^2}$ при условии $0 < |x^1 - x^2| < \varepsilon$, $y^i \in F(x^i)$. Не нарушая общности, можно считать $x^1 > x^2$, и поэтому $M_\varepsilon(x)$, как образ треугольника $0 < x^1 - x^2 < \varepsilon$, $x^1 > 0$, $x^2 \geqslant 0$, под действием полунепрерывного сверху многозначного отображения, есть связное множество в R^1. Тогда легко видеть, что $\mathfrak{M}_x(F) = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{M_\varepsilon(x)}$ и, следовательно, тоже связно.

Пусть для последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке x, последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in \mathfrak{M}_{x_n}(F)$, сходится к некоторой точке $z \neq \pm\infty$. Покажем, что $z \in \mathfrak{M}_x(F)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем z_n такое, что $|z_n - y| < \varepsilon/2$. Так как $z_n \in \mathfrak{M}_{x_n}(F)$, то найдутся пары точек x^i_{kn}, $y^i_{kn} \in F(x^i_{kn})$, $i = 1, 2$, $k > n$, такие, что

$$\left| \frac{y^1_{kn} - y^2_{kn}}{x^1_{kn} - x^2_{kn}} - z_n \right| < \varepsilon/2.$$

Тогда $\left|\frac{y^1_{kn}-y^2_{kn}}{x^1_{kn}-x^2_{kn}} - z\right| < \varepsilon$. Следовательно, последовательности $\{x^i_{kn}\}$, $\left\{\frac{y^1_{kn}-y^2_{kn}}{x^1_{kn}-x^2_{kn}}\right\}$ сходятся соответственно к точкам x и z.

Проведенные рассуждения легко переносятся на случай $z = \pm\infty$. Поэтому отображение $\mathfrak{M}_x(F)$ полунепрерывно сверху в точке x.

Таким образом, мы показали, что для функций класса D $\mathfrak{M}(F)$ — функция класса $\mathfrak{D}$. Если $F \in \mathfrak{D}$, то, как показано выше, $\mathfrak{M}_x(F_1)$ и $\mathfrak{M}_x(F_2)$ — функции класса $\mathfrak{D}$. Но $\mathfrak{M}_x(F)$ получаются из функций $\mathfrak{M}_x(F_1)$ и $\mathfrak{M}_x(F_2)$ присоединением ограниченных компонент дополнения $R^1 \setminus [\mathfrak{M}_x(F_1) \cup \mathfrak{M}_x(F_2)]$. Следовательно, $\mathfrak{M}(F)$ — также функция класса $\mathfrak{D}$.

Определение 20.1. Функцию $\mathfrak{M}(F)$ назовем первой производной функции $F \in \mathfrak{D}$, n-ю производную определим по индукции

$$\mathfrak{M}^n(F) = \mathfrak{M}\left(\mathfrak{M}^{n-1}(F)\right), \quad \mathfrak{M}^1(F) = \mathfrak{M}(F).$$

Замечание 20.1. Поскольку, по определению, отображение $\mathfrak{M}(F)$ задано однозначно для произвольной функции класса $\mathfrak{D}$, то все функции класса $\mathfrak{D}$ имеют производные всех порядков.

Под суммой двух многозначных функций $F, G \in \mathfrak{D}$ понимаем функцию U, где $U(x)$ — объединение всевозможных сумм $y + z$, $y \in F(x)$, $z \in G(x)$.

Предложение 20.3. *Если $F \in \mathfrak{D}$, а f — однозначная функция, имеющая в точке x однозначную производную, то:*

1) $\mathfrak{M}_x(F + f) = \mathfrak{M}_x(F) + f'(x)$;

2) $\mathfrak{M}_x(kF) = k\mathfrak{M}_x(F)$, где k — константа.

Это очевидным образом следует из определения производных чисел.

Если f — однозначная функция, имеющая хотя бы в одной точке производное множество, отличное от точки, то указанное в предложении 20.3 свойство может уже не иметь места в этой точке.

П р и м е р 20.2. Пусть

$$F(x) = \begin{cases} k_1 x, & x \leqslant 0, \\ k_2 x, & x > 0, \ k_1 < k_2, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} k_2 x, & x \leqslant 0, \\ k_1 x, & x > 0. \end{cases}$$

Тогда $(F+f)(x) = (k_1+k_2)x$, $\mathfrak{M}_0(F) = [k_1, k_2] = \mathfrak{M}_0(f)$, т.е. $\mathfrak{M}_0(F) + \mathfrak{M}_0(f) = [2k_1, 2k_2]$, а $\mathfrak{M}_x(F + f) = k_1 + k_2 \ \forall\, x$.

Из определения производного множества легко получить следующее свойство.

Предложение 20.4. *Если* $F, G \in \mathfrak{D}$, *то* $\mathfrak{M}(F+G) \subset \mathfrak{M}(F) + \mathfrak{M}(G)$.

Скажем, что $F(x_1) > F(x_2)$, если для произвольной пары точек $y_i \in F(x_i)$, $i = 1, 2$, $y_1 > y_2$.

Предложение 20.5. *Пусть* $F \in D$, *если* $\mathfrak{M}_{x_0}(F) > 0$, *то для значений* x, *достаточно близких к* x_0 *справа,* $F(x) > F(x_0)$, *а для значений* x, *достаточно близких к* x_0 *слева,* $F(x) < F(x_0)$.

Доказательство. По определению производной, для произвольной точки $y \in \mathfrak{M}_{x_0}(F)$ найдется окрестность точки x_0, такая, что все разностные отношения $\frac{y^1-y^2}{x^1-x^2} > 0$, где $y^i \in F(x^i)$. Поэтому при $x^1 > x^2$ все значения $y^1 > y^2$. Следовательно, в этой окрестности $F(x^1) > F(x^2)$. Очевидно, что при $\mathfrak{M}_{x^0}(F) < 0$ знаки неравенства изменяются на обратные.

Следствие 20.2. Если для $F \in \mathfrak{D}$ $\mathfrak{M}_{x^0}(F) > 0$, то для значений x, достаточно близких к x_0 справа, $F_i(x) > F_i(x_0)$, $i = 1, 2$, а для значений x, достаточно близких к x_0 слева, $F_i(x) < F_i(x_0)$.

Покажем, какой вид принимают некоторые классические теоремы дифференциального исчисления [226] при использовании вводимой выше производной.

Теорема 20.1 (Ферма). *Пусть функция* $F \in \mathfrak{D}$, *определенная на отрезке* $[a, b]$, *во внутренней точке* c *принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда в этой точке* $0 \in \mathfrak{M}_c(F)$. *Более того, если в точке* c F *принимает наибольшее (наименьшее) значение, то* $0 \in \mathfrak{M}_c(F_1)$ $(0 \in \mathfrak{M}_c(F_2))$.

Доказательство очевидным образом следует из предложения 20.5.

Теорема 20.2 (Дарбу). *Для произвольной функции* $F \in \mathfrak{D}$, *заданной на отрезке* $[a, b]$, $\mathfrak{M}(F)$ *принимает в качестве значений каждое промежуточное число отрезка* $[c, d]$, *где* $c \in \mathfrak{M}_a(F)$, $d \in \mathfrak{M}_b(F)$ *(под* $\mathfrak{M}_a(F)$ *(*$\mathfrak{M}_b(F)$*) понимаем соответственно правое (левое) производное множество).*

Очевидным образом следует из полунепрерывности сверху отображения $\mathfrak{M}(F)$ и связности его образов.

Замечание 20.2. В данном случае теоремы Коши и Дарбу (о принятии промежуточных значений функцией и производной соответственно) совпадают, так как F и $\mathfrak{M}(F)$ — функции того же класса $\mathfrak{D}$.

Теорема 20.3 (Ролля). *Пусть для функции* $F \in D$, *заданной на отрезке* $[a, b]$, $F(a) \cap F(b) \neq \varnothing$. *Тогда существует точка* $c \in [a, b]$, *такая, что* $0 \in \mathfrak{M}_c(F)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для некоторых точек x_1, x_2, принадлежащих $[a,b]$, имеет место $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, где $y_i \in \mathfrak{M}_{x_i}(F)$, $i = 1,2$, то, согласно теореме Дарбу, на отрезке $[x_1, x_2]$ существует точка $c \in [a,b]$, для которой $0 \in \mathfrak{M}_c(F)$.

Если во всех точках $x \in [a,b]$ производные множества принимают значения одного знака (не нарушая общности, положительные), то согласно предложению 20.5 существует окрестность каждой точки, такая, что для произвольной пары точек в этой окрестности $F(x_1) > F(x_2)$, если $x_1 > x_2$. Тогда очевидно, что это неравенство справедливо и для произвольной пары точек из отрезка $[a,b]$. Поэтому $F(a) < F(b)$ и, следовательно, пересечение этих множеств пусто, что противоречит условию теоремы.

Заметим, что для произвольной функции $F \in \mathfrak{D}$ аналогичное утверждение уже неверно.

П р и м е р 20.3. Пусть $F \in \mathfrak{D}$ — такая функция на отрезке $[0,5]$, что $F_1(x) = x$, а $F_2(x) = x - 10$. Тогда $F(0) \cap F(5) = [-5,0]$, но очевидно, что $\mathfrak{M}_x(F) \equiv 1$.

Теорема 20.4 (Лагранжа). *Пусть функция $F \in D$ задана на отрезке $[a,b]$. Тогда для фиксированной пары точек $y(a) \in F(a)$, $y(b) \in F(b)$ существует точка $c \in [a,b]$, для которой справедливо включение $\frac{y(b)-y(a)}{b-a} \in \mathfrak{M}_c(F)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем вспомогательную функцию, определив ее на отрезке равенством

$$G(x) = F(x) - y(a) - \frac{y(b) - y(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция удовлетворяет условие теоремы 20.3, так как из непосредственной подстановки получим, что $0 \in G(a) \cap G(b)$. Следовательно, к функции G можно применить теорему 20.3 и утверждать существование такой точки c, что $0 \in \mathfrak{M}_c(G)$. Согласно предложению 20.3,

$$0 \in \mathfrak{M}_c(G) = \mathfrak{M}_c(F) - \frac{y(b) - y(a)}{b - a},$$

откуда $\frac{y(b)-y(a)}{b-a} \in \mathfrak{M}_c(F)$.

Как следствие, отсюда получается аналог формулы Лагранжа.

При выполнении условий теоремы имеет место включение

$$y(b) - y(a) \in (b - a)\mathfrak{M}_c(F). \tag{20.1}$$

Теорема 20.5 (Коши). *Пусть: 1) $F \in D$, а g —непрерывная функция на отрезке $[a,b]$; 2) существуют конечные производные $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in [a,b]$.*

Тогда для любой пары точек $y(a) \in F(a)$, $y(b) \in F(b)$ найдется такая точка $c \in [a,b]$, что $\frac{y(b)-y(a)}{g(b)-g(a)} \in \frac{\mathfrak{M}_c(F)}{g'(c)}$.

Доказательство аналогично классическому.

Определение 20.2. Скажем, что функция $F \in \mathfrak{D}$ постоянная, если F_1 и F_2 — однозначные постоянные функции, не равные $\pm\infty$.

Теорема 20.6. *Пусть функция $F \in \mathfrak{D}$ задана на отрезке $[a,b]$. Для того чтобы F была постоянна на $[a,b]$ необходимо и достаточно выполнение условия $\mathfrak{M}_x(F) = 0$ при $x \in [a,b]$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, а достаточность следует из формулы Лагранжа (20.1), примененной к функциям F_1 и F_2. Например, для произвольных пар точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ и $y(x_i) \in F_1(x_i)$, $i = 1,2$, имеет место $y(x_1) - y(x_2) \in \mathfrak{M}_c(F_1)(x_1 - x_2) = 0$, $c \in [x_1, x_2]$, т.е. $y(x_1) = y(x_2)$. Следовательно, F_1 — однозначная постоянная функция. Аналогично доказывается постоянство F_2.

Определение 20.3. Скажем, что функция $F \in D$ — монотонно возрастающая в широком смысле, если для произвольной пары точек $x_1 < x_2$ из области определения справедливо $F(x_1) < F(x_2)$. Если неравенство строгое, говорим о строгом возрастании функции. Аналогичным образом вводятся монотонно убывающие функции. Скажем, что функция $F \in \mathfrak{D}$ (строго) монотонно возрастающая (убывающая), если таковы одновременно функции F_1 и F_2.

Предложение 20.6. *Функция, обратная к монотонной функции класса $\mathfrak{D}$, заданной на отрезке, будет монотонной функцией класса $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. Легко видеть, что монотонность функции F класса $\mathfrak{D}$ на отрезке эквивалентна тому, что прообраз произвольной точки y, т.е. множество $F^{-1}(y) = \{x \,|\, F(x) \ni y\}$, связен. Следовательно, обратная функция — функция со связными образами. А так как графики прямой и обратной функций получаются друг из друга перестановкой координат, то $F^{-1} \in \mathfrak{D}$. Функция F^{-1} монотонна, в силу связности прообразов точек (ими служат образы точек прямой функции F).

Следствие 20.3. Обратная функция к монотонной функции F класса D, заданной на отрезке, будет монотонной функцией класса D.

Следствие 20.4. Обратная функция к однозначной монотонной функции будет строго монотонной функцией, а обратная к строго монотонной функции класса D будет однозначной монотонной функцией.

Последнее следует из того, что строгая монотонность функций класса D эквивалентна тому, что прообраз произвольной точки, принадлежащей образу, состоит из одной точки.

Теорема 20.7. *Для того чтобы функция $F \in \mathfrak{D}$ была монотонно возрастающей (убывающей) в широком смысле на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно условие $\mathfrak{M}_x(F) \geq 0$ (≤ 0) для всех $x \in [a,b]$.*

Теорема 20.8. *Для того чтобы функция $F \in \mathfrak{D}$ была монотонно возрастающей (убывающей) в строгом смысле, необходимы и достаточны условия:*

1) $\mathfrak{M}_x(F) \geq 0$ (≤ 0) *для всех* $x \in [a,b]$;

2) $\mathfrak{M}_x(F_i)$, $i = 1,2$, не *обращаются тождественно в нуль ни в каком промежутке, составляющем часть* $[a,b]$.

Доказательства обеих теорем аналогичны классическим и используют формулу Лагранжа (20.1). Из определения видно, что их достаточно проводить для функций класса D.

§ 21. Производные по направлениям и субдифференциалы

Пусть f — некоторая многозначная функция на $\mathbb{C}^n$ со значениями в $\overset{o}{\mathbb{C}}$. Пусть w — конечное значение $\partial f(z)$. Односторонней производной функции f в точке (z,w) по направлению u называется предел

$$f'(z,w;u) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{v(u,\lambda) - w}{\lambda}$$

(где точка $v(u,\lambda) \in \partial f(z+\lambda u)$ и доставляет минимум функционалу $\|\partial f(z+\lambda u) - w\|$), если он существует (равенство его бесконечности не исключается); под $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0}$ понимается предел, когда λ, монотонно убывая, стремится к нулю. Комплексной производной (c-производной) функции f в точке (z,w) по направлению u называется предел

$$f'_c(z,w;u) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{v(u,\lambda) - w}{\lambda},$$

если он существует. Заметим, что

$$f'(z,w;e^{i\varphi}u)=\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{v(e^{i\varphi}u,\lambda)-w}{\lambda}=e^{i\varphi}\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{v(u,e^{i\varphi}\lambda)-w}{e^{i\varphi}\lambda}e^{i\varphi}=$$
$$=\lim_{\lambda_1\to 0}\frac{v(u,\lambda_1)-w}{\lambda_1}=e^{i\varphi}f'_c(z,w;u),\quad \lambda_1\in e^{i\varphi}[0,1],$$

так что $f'_c(z,w;u)$ — производная по направлению u — существует тогда и только тогда, когда все $f'_c(z,w;e^{i\varphi}u)$ существуют и

$$f'_c(z,w;u)=e^{-i\varphi}f'_c(z,w;e^{i\varphi}u). \tag{21.1}$$

Аналогично формуле (21.1) доказывается следующее предложение.

Предложение 21.1. *$f'_c(z,w;u)$ есть однородная функция по u.*

Определение 21.1. Вектор z^* назовем субградиентом линейно выпуклой функции f в точке $(z_0,w_0)\in\Gamma(f)$, если

$$\langle z_0,z^*\rangle-w_0\in\partial\bigcup_z(\langle z,z^*\rangle-f(z)). \tag{21.2}$$

Это определение имеет простой геометрический смысл. Оно означает, что график аффинной функции $l(z)=\langle z-z_0,z^*\rangle+w_0$ есть гиперплоскость, опорная к линейно выпуклому множеству $\Gamma(f)$ в точке (z_0,w_0). Из определения очевидно, что субградиенты определены в точках $(z,w)\in\partial\Gamma(f)$.

Определение 21.2. Множество всех субградиентов функции f в точке (z,w) назовем субдифференциалом функции f в точке (z,w) и обозначим $df(z,w)$.

Учитывая (19.1) и то, что при $f^*(z^*)\neq\varnothing$ или $\mathbb{C}\ \partial\bigcup_z(\langle z,z^*\rangle-f(z))=\partial f^*(z^*)$, получим следующее утверждение.

Теорема 21.1. *Субдифференциал линейно выпуклой функции f в точке $(z,w)\in\partial\Gamma(f)$, такой, что $f(z)\neq\varnothing$ совпадает с множеством решений включения*

$$\langle z,z^*\rangle-w\in\partial f^*(z^*). \tag{21.3}$$

Заметим, что формула (21.3) симметрична. А именно, если $w^*\in\partial f^*(z^*)$ — точка, для которой (21.3) обращается в равенство, то из $w\in\partial f(z)$ следует, что z будет субградиентом функции f^* в точке (z^*,w^*). Соотношение (19.5) для фиксированной точки $(z,w)\in$

$\partial\Gamma(f)$ однозначно определяет гиперплоскость $L : w^* = \langle z, z^*\rangle - w$ в двойственном пространстве. Согласно предложению 19.8 для открытой функции f множество пар (z^*, w^*), дающих решение включения (21.3), лежит в $\partial\Gamma(f^*)$ и в точке (z, w) совпадает с пересечением гиперплоскости L с $\partial\Gamma(f^*)$.

Следствие 21.1. Для открытой функции f и точки $(z, w) \in \partial\Gamma(f)$ множество пар (z^*, w^*), $w^* \in \partial f^*(z^*)$, дающих решение включения (21.3), есть линейно выпуклое замкнутое множество.

Следствие очевидным образом вытекает из того, что пересечение линейно выпуклого и компактного в $\overset{o}{\mathbb{C}}{}^{n+1}$ множества $\Gamma(f^*)$ с гиперплоскостью L будет линейно выпуклым и замкнутым в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Аналогичным образом, если f — открытая сильно линейно выпуклая функция, то множество пар (z^*, w^*), $w^* \in \partial f^*(z^*)$, дающих решение включению (21.3), есть сильно линейно выпуклое замкнутое множество. Так как, согласно следствию 9.1, $\Gamma(f^*)$ — сильно линейно выпуклое множество, то имеет место утверждение.

Предложение 21.2. *Пусть f — открытая сильно линейно выпуклая функция. Тогда во всех точках $(z, w) \in \partial\Gamma(f)$ субдифференциалы $df(z, w)$ сильно линейно выпуклы.*

Доказательство. Согласно отмеченному выше, множество A пар (z^*, w^*), удовлетворяющих включению (21.3), образует сильно линейно выпуклый компакт. Теперь заметим, что субдифференциал в точке (z, w) получается из множества A проекцией $\pi(z^*, w^*) = (z^*, 0)$ на пространство $\mathbb{C}^n$. Согласно следствию 9.2, оно будет сильно линейно выпуклым множеством.

Это предложение и теорема Крейна—Мильмана 15.4 позволяют описать субдифференциалы открытой сильно линейно выпуклой функции.

Скажем, что субградиент в точке $(z, w) \in \partial\Gamma(f)$ c-экстремален, если он не входит в c-оболочку не совпадающих с ним субградиентов в точке (z, w). Тогда получим утверждение.

Предложение 21.3. *Субдифференциал открытой сильно линейно выпуклой функции f в точке $(z, w) \in \partial\Gamma(f)$ совпадает с c-оболочкой c-экстремальных субградиентов в этой точке.*

Доказательство следует из теоремы 15.4, так как, согласно предложению 21.2, субдифференциал $df(z, w)$ будет сильно линейно выпуклым компактом.

Если область $\operatorname{int}\Gamma(f)$ можно записать в виде

$$\operatorname{int}\Gamma(f) = \{(z,w) \,|\, F(z,\bar{z},w,\bar{w}) < 0\},$$

где однозначная вещественная функция F дифференцируема и $\operatorname{grad} F \neq 0$ в точках границы $\partial\Gamma(f)$, то в каждой точке $(\xi,\eta) \in \partial\Gamma(f)$ существует касательная гиперплоскость

$$\{(z,w) \,|\, (z_1-\xi_1)\Phi'_{\xi_1} + \cdots + (z_n-\xi_n)\Phi'_{\xi_n} + \\ + (w-\eta)\Phi'_\eta + (\bar{z}_1-\bar{\xi}_1)\Phi'_{\bar{\xi}_n} + \cdots + (\bar{z}_n-\bar{\xi}_n)\Phi'_{\bar{\xi}_n} + (\bar{w}-\bar{\eta})\Phi'_{\bar{\eta}} = 0\}$$

вещественной размерности $2n+1$. Если f — линейно выпуклая функция, то комплексная гиперплоскость, не пересекающая $\operatorname{int}\Gamma(f)$, должна лежать в касательной гиперплоскости. Следовательно, такая гиперплоскость единственна и имеет вид

$$\{(z,w) \,|\, (z_1-\xi_1)\Phi'_{\xi_1} + \cdots + (z_n-\xi_n)\Phi'_{\xi_n} + (w-\eta)\Phi'_\eta = 0\}.$$

Если ξ принадлежит $\operatorname{int}(E_f)$, то очевидно, что $\Phi'_\eta \neq 0$ и уравнение гиперплоскости можно записать в виде

$$w = \langle z-\xi, z^*\rangle + w^*,$$

где $z^* = (-\Phi'_{\xi_1}/\Phi'_\eta, \ldots, -\Phi'_{\xi_n}/\Phi'_\eta)$, $w^* = \eta$.

Предложение 21.4. *При наложенных выше условиях существует производная по направлению* $f'_c(\xi,\eta;u) = \langle z^*, u\rangle$.

Определение 21.3. Скажем, что функция f принимает в точке $(z,w) \in \Gamma(f)$ экстремальное значение, если $w \in \partial f(E_f)$ или $w \in \partial(\operatorname{int} f)(E_f)$.

Теорема 21.2 (критерий Ферма). *Для того чтобы в точке* $(z,w) \in \Gamma(f)$, $z \in \operatorname{int}(E_f)$, *функция* f *принимала экстремальное значение, необходимо и достаточно, чтобы* $0 \in df(z,w)$.

Доказательство. Если в точке (z,w), $z \in \operatorname{int}(E_f)$, функция f принимает экстремальное значение, то гиперплоскость $w = \text{const}$ не пересекает $\operatorname{int}\Gamma(f)$, и поэтому $z^* = 0$ будет субградиентом в точке (z,w), т.е. $0 \in df(z,w)$.

Если $0 \in df(z,w)$, $z \in \operatorname{int}(E_f)$, то согласно определению субдифференциала гиперплоскость $w = \text{const}$ не пересекает $\operatorname{int}\Gamma(f)$, следовательно, точка $w \in \partial\operatorname{int}\Gamma(f)$, если $\operatorname{int} f(z) \neq \varnothing$ и проектируется в $w \in \partial(\operatorname{int} f)(E_f)$. Если же $\operatorname{int} f(z) = \varnothing$, то из определения субдифференциала имеем $w \in \partial \bigcup\limits_z f(z) = \partial f(E_f)$.

Замечание 21.1. Задача нахождения экстремума линейной функции $f(z) = \langle z, z_0^* \rangle$ при ограничениях

$$\langle z, z_j^* \rangle \in \bar{D}_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где D_j — плоские области с компактным замыканием в $\mathbb{C}$, сводится к поиску экстремумов функции f, заданной на линейно аналитическом полиэдре D. Легко видеть, что экстремальные значения $df(D)$ функции f принимаются на множестве c-экстремальных точек области D, которые описаны в следствии 15.5.

Покажем связь субдифференциалов с двойственностью.

Теорема 21.3. *Пусть f — линейно выпуклая функция. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) $z^* \in df(z, w)$;

(б) $g(u) = \langle u, z^* \rangle - f(u)$ имеет экстремальное значение по u в точке (z, w), $u = z$, $w \in f(z)$;

(в) $\langle z, z^* \rangle \in \partial(f(z) + f^*(z^*))$;

(а) $z \in df^*(z^*, w^*)$;*

(б) $g^*(v^*) = \langle z, v^* \rangle - f^*(v^*)$ имеет экстремальное значение по v^* в точке (z^*, w^*), $v^* = z^*$, $w^* \in f^*(z^*)$.*

Доказательство. Очевидно, что так же, как и в предложении 20.3, для суммы $f + g$, где g — однозначная дифференцируемая функция, справедливо равенство $d(f + g) = df + dg$. Поэтому из $d|_{(z,w)}(\langle u, z^* \rangle - f(u)) = z^* - df(z, w)$ и (а) следует $0 \in dg(z, w)$ и теперь из критерия Ферма 21.2 вытекает эквивалентность условий (а) и (б). Эквивалентность условия (в) условию (а) следует из теоремы 21.1, так как $w \in df(z)$, а $\partial(f(z) + f^*(z^*)) = \partial f(z) + \partial f^*(z^*)$. Последнее условие симметрично по отношению к переменным z и $z*$, и из него вытекает эквивалентность (в) условию (а*), что завершает доказательство.

Глава 5

Обобщенно выпуклые множества

Как мы уже видели в предыдущих параграфах, исследование комплексных аналогов выпуклости позволяет с новой точки зрения взглянуть на ряд результатов выпуклого анализа. В этой главе мы рассмотрим результаты, получение которых инспирировано исследованиями в комплексной области.

§ 22. Топологическая классификация $(n-1)$-выпуклых множеств с гладкой границей

В этом параграфе докажем утверждение, которое дает полную топологическую классификацию $(n-1)$-выпуклых множеств с гладкой границей и в вещественном случае аналогично классификации, полученной в § 7 для линейно выпуклых множеств.

Напомним, что множество E имеет k-гладкую границу, если в окрестности любой точки $x \in \partial D$, ∂D задается уравнением $f(x) = 0$, где f действительная, k раз непрерывно дифференцируемая функция, $\operatorname{grad} f \neq 0$ в окрестности этой точки.

Теорема 22.1. *Пусть $(n-1)$-выпуклое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей*

Тогда

1) E выпуклое множество, или

2) имеет вид декартового произведения $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ или

3) E состоит не более чем из двух неограниченных компонент.

Примечание. Классы 1) – 3) не являются взаимно исключающими.

Множество E, как увидим из доказательства, может принадлежать двум и даже трем классам.

Доказательство. Пусть $E - (n-1)$-выпуклое множество с гладкой границей, $E \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим три случая:

1) E — связное множество;

2) $\mathbb{R}^n \backslash E$ — несвязное множество;

3) $\mathbb{R}^n \backslash E$ — связное множество.

1. Пусть E — связное множество. Покажем, что E выпукло. Предположим обратное: E — невыпуклое множество. Тогда существуют две точки множества E, $x_1, x_2 \in E$, такие, что отрезок, который их соединяет не полностью принадлежит E. Выберем точку $x_0 \in [x_1, x_2]$, $x_0 \notin E$. В силу $(n-1)$-выпуклости множества E, существует вещественная гиперплоскость L, проходящая через точку x_0, но не пересекающая E : $L \cap E = \varnothing$. Имеем: L разбивает пространство на два полупространства $E_1 \cup E_2$, содержащие точки x_1 и x_2, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, что противоречит связности E. Таким образом, полученное противоречие доказывает первый случай.

2. Пусть дополнение $\mathbb{R}^n \backslash E$ несвязное, покажем, что тогда $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, где $E^1 \subset \mathbb{R}^1$ — основание.

Выберем две произвольные точки z_1 и z_2, принадлежащие различным компонентам множества $\mathbb{R}^n \backslash E$. Очевидно, существуют в $\mathbb{R}^n \backslash E$ гиперплоскости $L(z_1)$ и $L(z_2)$, содержащие точки z_1 и z_2, соответственно, и такие, которые между собой не пересекаются. Поэтому они параллельны между собой в силу произвольности выбора точек z_1 и z_2. Следовательно, произвольная гиперплоскость L, которая не пересекает E, параллельна гиперплоскостям $L(z_1)$ и $L(z_2)$.

Из этого видно, что если точка $z \in E$, то все точки гиперплоскости $L(z)$, которая проходит через z и параллельна $L(z)$, принадлежат множеству E.

Множество таких гиперплоскостей, заданных некоторой точкой, принадлежащей E, заполняет множество E. Поэтому E должно быть

цилиндром с параллельными L образующими и основанием $E^1 : E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

3. Если дополнение $\mathbb{R}^n \backslash E$ связно, то можно считать, что E может быть несвязным, иначе получим первый случай.

Пусть сначала E — открытое множество. Покажем, что несвязное множество E состоит из двух неограниченных компонент.

А. Пусть множество E содержит хотя бы одну ограниченную компоненту $E_1 \subset E$. Выберем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n \backslash E_1$ и рассмотрим множество гиперплоскостей, которые проходят через эту точку. Это проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$, состоящее из двух множеств $M_1 \cup M_2$, где M_1 — множество гиперплоскостей, которые пересекают множество E_1, M_2 — множество гиперплоскостей, которые не пересекают множество E_1.

Легко видеть, что оба множества M_1 и M_2 — непустые: M_1 — в силу не пустоты E_1, а M_2 — в силу выпуклости E_1, что легко показать аналогично первому пункту. Очевидно, что произвольной точке $M = \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2$ соответствует гиперплоскость, касательная к E_1. Из условия гладкости границы ∂E следует единственность касательной плоскости в каждой точке касания. В силу произвольности выбора точки x, через каждую точку $x \notin E_1$ проходит гиперплоскость, которая не пересекает множество E, а из этого следует, что $x \notin E$. Этим устанавливается невозможность существования второй компоненты. Итак, если множество E содержит ограниченную компоненту, то оно связно.

Покажем, что неограниченных компонент может быть не более двух. Доказательство проведем сначала для $E \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим следующие возможные случаи расположения E.

Пусть $E_1 \subset E$ — связная компонента. Можем предположить, что E_1 не содержит прямых, иначе, аналогично пункту 2, получим, что $E = E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. В силу неограниченности выпуклого открытого множества E, для него существует рецессивное направление. (Направление y, где $y \neq 0$ тогда и только тогда называется *рецессивным* для E, если для любых $\lambda \geq 0$, $x \in E$ луч $x + \lambda y \in E$. Множество всех векторов, удовлетворяющих последнему соотношению с присоединенным к нему началом координат, называется *рецессивным конусом* множества E). Пусть луч $Ol \in E_1$. Примем точку O за начало координат, а направление луча Ol за положительное направление оси ординат. Ось абсцисс выберем перпендикулярной к Ol. Тогда $\bar{E}_1$ будет надграфиком выпуклой функции f, которая задается границей ∂E_1.

Б. Пусть график f не имеет асимптот, в таком случае $E = E_1$. Покажем это. Выберем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^2 \backslash E_1$. Через точку x проходит множество прямых, которое топологически эквивалентно окружности S^1. Множество S^1 состоит из двух непустых подмножеств M_1 и M_2. M_1 это множество прямых, пересекающих E_1, а M_2 — множество прямых, не пересекающих E_1.

В силу отсутствия асимптот у функции f, очевидно, что произвольной точке α с $M = \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2$ соответствует прямая, касательная к E_1 и, напомним, содержащая точку x. Из условия гладкости границы ∂E следует единственность касательной в каждой точке касания. В силу произвольности выбора точки x, имеем, как и в пункте A, что через каждую точку $x \notin E_1$ проходит прямая, не пересекающая множество E. Следовательно, $x \notin E$ и $E = E_1$.

Более того, легко уточнить, что для точек $x \notin \bar{E}_1$ таких прямых будет две. Действительно, пусть каждой прямой из M_1 поставим в соответствие первую точку ее пересечения с ∂E_1. Обозначим множество таких точек A. Тогда множество точек $B = \partial E_1 \backslash A$ имеет граничными с множеством A некоторые точки α и β : $\bar{A} \cap \bar{B} = \{\alpha, \beta\}$. Очевидно они являются точками касания. Поскольку такие точки существуют, то существуют, в силу гладкости, и единственные прямые, касательные к E_1 в точках α и β, которые проходят через точку $x \in \mathbb{R}^2 \backslash E_1$.

В. Пусть функция f имеет одну асимптоту l. Покажем, что в данном случае также $E = E_1$. Асимптота l разбивает плоскость на две полуплоскости: C — замкнутая полуплоскость, которая не пересекается с E_1 и полуплоскость C_1, которая состоит из двух подмножеств E_1 и D ($E_1 \cap D = \varnothing$, $E_1 \cup D = C_1$). Легко видеть, что $\mathbb{R}^2 \backslash E_1 = C \cup D$. Покажем, что ни C, ни D не могут содержать точки, принадлежащие K.

Как и в пункте Б, для произвольной точки $x \in C \cup D$ рассмотрим множества M_1 и M_2 прямых, которые соответственно пересекают и не пересекают E_1. Граничным точкам $\alpha \subset M = \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2$ будут отвечать прямые, касательные к E_1 или параллельные асимптоте l_1. Очевидно, что точкам которые лежат в C соответствуют два значения в M: одно задает касательную к E_1, другое — линию, параллельную асимптоте, а точкам $x \in D \backslash \bar{E}_1$ — оба значения из M задают касательные к E. Как и в пункте Б, единственность касательных в точках касания доказывает сначала, что $x \notin E$ и отсюда следует, что $E = E_1$.

Пусть теперь функция f имеет две асимптоты. Возможны два случая:

Г. Обе асимптоты параллельны, $l_1||l_2$. Пусть l_1 и l_2 разбивают $\mathbb{R}^2\backslash E_1$ на три подмножества, которые попарно не пересекаются. $\mathbb{R}^2\backslash E_1 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, причем C_1 и C_3 — замкнутые полуплоскости, не содержащие E_1. Покажем, что ни в одном из множеств C_1, C_2 и C_3 не может быть точек множества $E\backslash E_1$.

Повторяя рассуждения пункта В, установим, что через произвольную точку $x \in C_1 \cup C_3$ можем провести единственную касательную к E_1 и, что в $C_1 \cup C_3$ существует прямая t, $x \in t$ и $t||l_1||l_2$. Для точек $x \in C_2\backslash \bar{E}_1$ существуют две касательные к E_1. Это означает, что в данном случае предыдущие рассуждения приводят к утверждению, что $E = E_1$.

Д. Пусть функция f имеет две непараллельные асимптоты l_1 и l_2. Прямые l_1 и l_2, пересекаясь в некоторой точке A, разделяют плоскость $\mathbb{R}^2$ на четыре подмножества C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, одно из которых содержит E_1. Не нарушая общности, пусть $E_1 \subset C_4$. Для точек из множества $C_1\backslash E_1$ и прилегающих к C_1 углов C_2 и C_4, повторяя рассуждения пункта Г, получим, что никакие их точки не могут принадлежать множеству E. Остаются точки замкнутого угла C_3. Естественно, что точки границы C_3 не могут принадлежать множеству E в силу его открытости.

Примечание. В пунктах Б и Д мы не рассматривали точки границы ∂E_1. Но, очевидно, что они не могут принадлежать открытому множеству E, потому, что E_1 — его открытая компонента.

Проведем через $x_2 \in \operatorname{int} C_2$ две прямые, параллельные асимптотам l_1 и l_2. Легко видеть, что эти две прямые соответствуют двум предельным точкам множества M, которое вводится подобно как и в пункте Б. Касательных же из точки x_2 к E_1, в силу того, что l_1 и l_2 асимптоты, мы провести не сможем. Итак, C_3 может содержать точки множества E. Пусть E_2 — компонента E, $E_2 \subset C_3$. Покажем, что ее граница ∂E_2 задает функцию g, график которой имеет две асимптоты, параллельные асимптотам l_1 и l_2.

Повторяя относительно g все предыдущие выкладки, получим, что функция g обязательно имеет две непараллельные асимптоты l_1' и l_2' и, кроме этого, E_1 и E_2 должны лежать в паре вертикальных углов, на которые эти асимптоты разделяют $\mathbb{R}^2$.

Пусть α и β — растворы углов между асимптотами l_1, l_2 и l_1', l_2' соответственно. Угол C_3 может содержать E_2 только тогда, когда

$\beta < \alpha$. Таким образом, имеем: $\alpha = \beta$. При равенстве углов, очевидно, что E_2 может содержаться в C_3 только тогда, когда асимптоты функции g параллельны сторонам угла C_3.

Имеем: в случае, когда асимптоты l_1 и l_2, проведеные к графику функции, задающей границу ∂E_1 пересекаются, то возможно существование второй компоненты $E_2 \subset E$, $E_1 \cup E_2 = E$. Причем границы этих компонент задаются графиками функций, имеющих параллельные асимптоты.

Е. Перейдем к изучению случая $\mathbb{R}^n, n > 2$. Покажем, что E имеет не более двух компонент. Предположим обратное. Пусть множество E имеет три компоненты E_1, E_2 и E_3. Выберем произвольно в каждой из них по точке $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $x_3 \in E_3$. Три точки определяют некоторую плоскость $\mathbb{R}^2$. Пересечение $\mathbb{R}^2$ с E дает случай, когда в $\mathbb{R}^2$ E — выпуклое множество с гладкой границей имеет не менее трех компонент. Но раньше для $\mathbb{R}^2$ показано, что такое множество не может иметь более двух компонент. Получили противоречие, которое доказывает, что в третьем случае открытое $(n-1)$-выпуклое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей состоит не более, чем из двух неограниченных компонент.

Третий случай изучался для открытых множеств E. Если же E — неоткрытое множество, тогда мы можем изучать открытое $(n-1)$-выпуклое множество $\operatorname{int} E$ и получим тот же результат. Такие рассуждения завершают доказательство теоремы.

Приведем несколько примеров $(n-1)$-выпуклых множеств с гладкой границей.

П р и м е р 22.1. Рассмотрим множество $E \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из следующих двух компонент:

$$E_1 = \left\{ (x, y) \,|\, y \geq \frac{1}{x}, \text{ при } x > 0 \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (x, y) \,|\, y \leq \frac{1}{x^{2k+1}}, \text{ при } x < 0, \ k \geq 1 \right\}.$$

Очевидно, что графики функций, которые задают границы множеств E_1 и E_2, не симметричны. Откуда следует, что не будут симметричными и множества E_1 и E_2.

Легко убедиться, что $E = E_1 \cup E_2$ — 1-выпуклое множество. Заметим, что рецессивные конусы компонент E_1 и E_2, которые пред-

ставляют собой соответственно множества

$$0'E_1 = \{(x,y)\,|\,x \geq 0,\ y \geq 0\} \quad \text{и} \quad 0'E_2 = \{(x,y)\,|\,x \leq 0,\ y \leq 0\}$$

симметричны относительно начала координат.

П р и м е р 22.2. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^2$ состоит из двух компонент E_1 и E_2, заданных следующим образом:

$$E_1 = \{(x,y)\,|\,y \geq \frac{1}{x-a} + b \text{ при } x > 0,\ a > 0,\ b > 0\},$$
$$E_2 = \begin{cases} \{(x,y)\,|\,y \leq \sqrt{1-(x+1)^2} - 1 \text{ при } -1 \leq x \leq 0\}, \\ \{(x,y)\,|\,y \leq 0 \quad \text{при } x \leq -1\}. \end{cases}$$

Легко видеть, что графики функций, которые задают границы множеств E_1 и E_2 не симметричны. Следовательно, не будут симметричными и множества E_1 и E_2. Заметим, что E — 1-выпуклое множество. Как и в предыдущем примере, рецессивные конусы множеств E_1 и E_2 — центрально симметричны и совпадают с предыдущими

$$0'E_1 = \{(x,y)\,|\,x \geq 0,\ y \geq 0\}, \quad 0'E_2 = \{(x,y)\,|\,x \leq 0,\ y \leq 0\}.$$

Рассмотренные примеры указывают, что $(n-1)$-выпуклое множество с гладкой границей может быть несвязным и неограниченные компоненты E_1 и E_2 множества E не обязательно расположены симметрично, в то время, как их рецессивные конусы центрально симметричны.

Покажем, что замеченная в примерах закономерность является правилом, которое следует из теоремы 22.1 как следствие.

Следствие 22.1. Пусть $E-(n-1)$-выпуклое множество с гладкой границей ∂E, состоящей из двух неограниченных компонент. Тогда рецессивные конусы этих компонент центрально симметричны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E_1 и E_2 — компоненты $(n-1)$-выпуклого множества E, которое удовлетворяет условию. Из неограниченности выпуклых множеств E_1 и E_2 вытекает существование для них рецессивных направлений, а, следовательно, и рецессивных конусов $O'E_1$ и $O'E_2$, которые представляют собой выпуклые конусы, содержащие начало координат.

Пусть луч $l_1 \subset O'E$, $x_1 \in E_1$. Выберем произвольную точку $x_2 \in E_2$. Проведем двумерную плоскость L, проходящую через па-

ру точек x_1, x_2 и такую, которая содержит луч параллельный лучу l_1. В плоскости L получим 1-выпуклое множество с гладкой границей, состоящей из двух компонент. Согласно доказанному выше, луч l_1 будет рецессивным направлением для множества $E_2 \cap L$ то есть $l_1 \subset O'E_2$, что доказывает утверждение.

§ 23. Связь $(n-1)$-выпуклости с $(n-1)$-обозримостью

Если граница $(n-1)$-выпуклого множества не будет гладкой, то надеяться на получение приемлемой классификации невозможно. Выбрасывание из множества его пересечений с произвольным набором гиперплоскостей будет давать множество того же класса. Однако при некоторых условиях на множество можно получить его дополнительные характеристики, что покажем дальше. Согласно лемме 16.2, пересечение $(n-1)$-выпуклых множеств будет $(n-1)$-выпуклым множеством. Далее нам потребуются следующие стандартные $(n-1)$-выпуклые множества.

П р и м е р ы 23.1.

1. H — открытое полупространство.

2. $B(T_1, T_2)$ — открытая полоса, ограниченная параллельными гиперплоскостями T_1 и T_2.

3. $C(T_1, T_2) = \mathbb{R}^n \backslash (B(T_1, T_2) \cup T_1 \cup T_2)$ — внутренность дополнения к полосе.

4. $D(T_1, T_2)$ — открытый конус, где T_1 и T_2 — гиперплоскости, которые пересекаются и разбивают пространство на четыре открытые компоненты. Конус $D(T_1, T_2)$ образуется из $\mathbb{R}^n$ отбрасыванием двух несмежных компонент вместе с множеством $T_1 \cup T_2$.

Лемма 23.1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — $(n-1)$-выпуклое множество. Тогда любые две компоненты A образуют $(n-1)$-выпуклое множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_1 и A_2 — две фиксированные компоненты $(n-1)$-выпуклого множества A. Для любой другой компоненты A_i, определим $(n-1)$-выпуклое множество B_i, содержащее A_1 и A_2 и не содержащее A_i, которое образовано пересечением множества A с одним из четырех стандартных $(n-1)$-выпуклых множеств.

Если A_i отделим от множеств A_1 и A_2 некоторой гиперплоскостью H^*, тогда зададим $B_i = A \cap H$, где H — полупространство, содержащее A_1 и A_2 и не содержащее A_i.

В противном случае, мы соединим A_i с множествами A_1 и A_2 двумя не совпадающими отрезками d_{1i} и d_{2i} соответственно. На этих отрезках существуют точки, не принадлежащие A, а значит, легко найти две такие гиперплоскости T_1 и T_2, что $T_1 \cap A = \varnothing$ и $T_2 \cap A = \varnothing$. Гиперплоскости T_1 и T_2 отделяют множество A_i от множеств A_1 и A_2 соответственно.

Если плоскость T_1 параллельная T_2, то $B_i = A \cap C(T_1, T_2)$.

Если же $T_1 \cap T_2 \neq \varnothing$, то $B_i = A \cap D(T_1, T_2)$, где $C(T_1, T_2)$, $D(T_1, T_2)$ — стандартные множества примера 23.1, содержащие A_1 и A_2 и не содержащие A_i. Пусть $B = \cap B_i$. Очевидно, что $B - (n-1)$-выпуклое множество, которое состоит из двух компонент.

Замечание 23.1. Условие леммы 23.1 необходимо, но не достаточно для $(n-1)$-выпуклости множества, состоящего более чем из двух компонент.

П р и м е р 23.2. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^2$ состоит из любых трех открытых компонент — треугольников, принадлежащих $(n-1)$-выпуклому множеству $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x + y| < 1,\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$. Любые две компоненты множества E являются 1-выпуклыми множествами, но само множество E не является 1-выпуклым. Через любую точку четвертого треугольника нельзя провести прямую, которая не пересекала бы E.

Утверждение 23.1. *Множество $A \subset \mathbb{R}^2$, которое состоит из двух отрезков A_1 и A_2, не лежащих на одной прямой, 1-выпуклое тогда и только тогда, когда продолжение одного отрезка не пересекает внутренние точки другого.*

Доказательство элементарно. Достаточно рассмотреть выпуклую оболочку этих отрезков.

Замечание 23.2. В условии утверждения 23.1 требование двух компонент существенно. Приведем пример множества, состоящего из трех отрезков, для которого утверждение 23.1 не верно.

П р и м е р 23.3. Множество E состоит из трех отрезков на плоскости

$$L_1 = [(-1, 1), (1, 1)], \quad L_2 = [(2, 0), (1, -1)], \quad L_3 = [(-1, -1), (-2, 0)].$$

Очевидно, что через точку $(0, 0)$ невозможно провести прямую, которая не пересекает множество E. Поэтому множество E не является

1-выпуклым множеством, но отрезки попарно не лежат на одной прямой, и продолжение одного отрезка не пересекает внутренние точки других.

Утверждение 23.2. *Множество $A \subset \mathbb{R}^3$, состоящее из двух выпуклых плоских множеств, которые не лежат в одной плоскости, 2-выпукло тогда и только тогда, когда аффинная оболочка одного множества не пересекает внутренние точки другого* (*под внутренними точками плоского множества понимаем точки внутренние по отношению к плоскости, содержащей это множество*).

Определение 23.1. Назовем множество $A \subset \mathbb{R}^n$ k-обозримым, если через каждую i-мерную плоскость, которая не пересекает A, можно провести k-мерную плоскость, которая также не пересекает A; $0 < i \leq k$, $n \geq 2$ [56].

Из определения следует, что все k-обозримые множества будут k-выпуклыми.

Легко также проверить, что:

1. Все четыре стандартные $(n-1)$-выпуклые множества примера 23.1 будут $(n-1)$-обозримыми.

2. Множество $A = B^n \setminus \bigcup\limits_i \overline{H}_i$, где $\bigcup\limits_i \overline{H}_i$ — множество, состоящее из конечного объединения гиперплоскостей, а $B^n \subset \mathbb{R}^n$ — шар — $(n-1)$-обозримо.

Приведем пример 2-обозримого множества, которое не будет 2-обозримым в $\mathbb{R}^3$.

П р и м е р 23.4. Множество B состоит из двух открытых кубов

$$B = \{(x, y, z) : (0 < x < 1) \cup (2 < x < 3);\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1\}.$$

Через прямую L, которая проходит через точки $(1, 1/2, 0)$ и $(2, 1, 1/2)$, нельзя провести двумерную плоскость, которая бы не пересекалась с множеством B. Сама же прямая с множеством B не пересекается.

Легко также убедиться, что замыкание множества B также 2-выпуклое, но не 2-обозримое множество.

Утверждение 23.3. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ — компактное $(n-1)$-выпуклое и 2-обозримое множество. Тогда*

1) $A = A_3 \cup A_0$ *или*

2) $A = A_2 \cup A_0$ *или*

3) $A = A_1 \cup A_0$,

где A_1 — множество параллельных отрезков, A_2 — плоское 1-выпуклое множество, A_3 — выпуклое тело, а A_0 — нульмерное множество.

Случай, когда $A_3 = \varnothing$ или $A_0 = \varnothing$ не является исключением.

Вспомним, что непосредственно из определений $(n-1)$-выпуклости и $(n-1)$-обозримости следует, что $(n-1)$-обозримые множества являются $(n-1)$-выпуклыми и 2-обозримыми.

Поэтому из утверждения 23.3 следует, что класс компактных $(n-1)$-выпуклых множеств существенно шире класса $(n-1)$-обозримых множеств. Более полно это следует из теоремы 23.1, которая полностью описывает $(n-1)$-обозримые компактные множества.

Теорема 23.1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ — компактное $(n-1)$-обозримое множество. Тогда*

1) $A = A_3 \cup A_0$ *или*

2) $A = A_2 \cup A_0$ *или*

3) $A = A_1 \cup A_0$,

где A_1 — множество параллельных отрезков, A_2 — плоское выпуклое множество, A_3 — выпуклое тело, а A_0 — нульмерное множество.

Случай, когда $A_3 = \varnothing$ или $A_0 = \varnothing$ не является исключением.

Доказательство последних двух результатов читатель может провести самостоятельно или посмотреть в [49].

§ 24. Вариации к теореме Каратеодори

Классическая теорема Каратеодори утверждает, что произвольную точку выпуклой оболочки некоторого подмножества n-мерного аффинного пространства можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точек, принадлежащих исходному множеству.

Наша цель — показать, что при некоторых дополнительных ограничениях на множество, количество точек, задающих произвольную точку выпуклой комбинации, можно уменьшить.

Лемма 24.1. *Пусть E — связное ограниченное подмножество двумерной евклидовой плоскости. Тогда произвольная точка выпуклой оболочки E представима в виде выпуклой комбинации некоторой пары точек, принадлежащих E.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда, во-первых, существует точка x, принадлежащая выпуклой оболочке E,

которая по теореме Каратеодори есть выпуклая комбинация некоторых трех аффинно-независимых точек a, b, c из E. С другой стороны, согласно предположению, ее нельзя представить как выпуклую комбинацию никакой пары точек, принадлежащих E. Следовательно, если мы проведем три прямые l_1, l_2, l_3 через пары точек (a, x), (b, x), (c, x) соответственно, то отвечающие им полупрямые l_1^+, l_2^+, l_3^+ построенных прямых — от точки x в сторону, противоположную точкам a, b, c, соответственно — не могут пересекать множество E. Но эти полупрямые разбивают плоскость на три угловых сектора, каждый из которых содержит одну из точек a, b, c, в силу их аффинной независимости, а это противоречит связности E.

Доказательство леммы показывает, что ее результат можно усилить следующим образом.

Следствие 24.1. Пусть E — ограниченное подмножество двумерной евклидовой плоскости, состоящее не более чем из двух связных компонент. Тогда произвольная точка выпуклой оболочки E представима в виде выпуклой комбинации некоторой пары точек, принадлежащих E.

Следствие 24.2. Пусть E — ограниченное подмножество n-мерного евклидового пространства, каждое сечение которого произвольной двумерной плоскостью состоит не более чем из двух связных компонент. Тогда произвольная точка выпуклой оболочки E представима в виде выпуклой комбинации некоторой пары точек, принадлежащих E.

Следствие 24.3. Пусть E — ограниченное подмножество n-мерного евклидового пространства, для выпуклой оболочки которого существует точка, которую нельзя представить как выпуклую комбинацию некоторой пары точек из E. Тогда существует сечение E, состоящее не менее чем из трех связных компонент.

Теорема 24.1. *Пусть E — ограниченное подмножество n-мерного евклидового пространства, состоящее не более чем из n связных компонент. Тогда произвольная точка выпуклой оболочки E представима в виде выпуклой комбинации не более чем n точек, принадлежащих E.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда, во-первых, существует точка x, принадлежащая выпуклой оболочке E, которая, согласно теореме Каратеодори, есть выпуклая комбинация некоторых аффинно-независимых $n+1$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ из E, образующих n-мерный симплекс. С другой стороны, согласно

предположению, ее нельзя представить как выпуклую комбинацию никаких n точек, принадлежащих E. Проведем все $(n-1)$-мерные плоскости через точку x и каждый набор из $(n-1)$ вершин этого симплекса. Естественно, что каждая такая плоскость содержит выпуклый конус с вершиной x, порожденный $(n-2)$-мерной гранью симплекса. Если для каждого такого конуса рассмотреть симметричный ему относительно точки x конус, то согласно условию ни один из этих новых конусов не может содержать точки множества E. Если бы хоть один конус содержал некоторую точку из E, то эта точка была бы выпуклой комбинацией набора из n точек множества E, что противоречит предположению. Но объединение этих конусов разбивает все пространство на n частей, каждая из которых содержит одну из вершин симплекса, принадлежащую множеству E. А это противоречит тому условию, что множество E имеет не более чем n связных компонент.

Следствие 24.4. Пусть E — ограниченное подмножество n-мерного евклидового пространства, каждое сечение которого произвольной k-мерной плоскостью, $1 < k < n$, состоит не более чем из k-связных компонент. Тогда произвольная точка выпуклой оболочки E представима в виде выпуклой комбинации некоторых k точек, принадлежащих E.

Следствие 24.5. Пусть E — ограниченное подмножество n-мерного евклидового пространства, для выпуклой оболочки которого существует точка, которую нельзя представить как выпуклую комбинацию некоторых k точек, $1 < k < n$, из E. Тогда существует сечение E, состоящее не менее чем из $k+1$ связных компонент.

П р и м е р 24.1. Пусть подмножество E n-мерного евклидового пространства есть объединение n выходящих из одной вершины ребер n-мерного симплекса. Этот пример показывает неулучшаемость теоремы и следствия 5.

Рассмотрим произвольное подмножество E n-мерного евклидового пространства. Пусть $E_k \supset E$ — множество, состоящее из выпуклых комбинаций произвольных $k+1$ точек из E. Такое множество назовем k-й оболочкой множества E. Получим цепочку включений

$$E \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n,$$

которая согласно теореме Каратеодори оканчивается n-й оболочкой, совпадающей с выпуклой оболочкой множества E. В соответствии с определением, очевидно, что имеет место включение $E_k \subset$

$E_1(E_{(k-1)})$. Ниже мы исследуем порядок итерированной оболочки $E_1(E_1(\dots E_1(E)\dots))$, которая совпадает с выпуклой. Легко убедиться, что вторая итерированная оболочка $E_1(E_1(E))$ совпадает с третьей оболочкой $E_3(E)$, поскольку оба множества будут выпуклыми комбинациями четырех точек из E. Аналогично, k-я оболочка будет выпуклой комбинацией 2^k точек из E. Следовательно, если $2^k > n$, то k-я итерированная оболочка множества E совпадает с его выпуклой оболочкой. Поэтому справедлив следующий результат.

Утверждение 24.1. *Пусть E — ограниченное подмножество n-мерного евклидового пространства и $k = [\log_2(n)] + 1$, где $[a]$ — целая часть числа a. Тогда произвольная точка выпуклой оболочки E представима в виде k-й итерированной оболочки точек, принадлежащих E.*

В случае, если $n + 1 = 2^k$, то $k = [\log_2(n)] + 1 = \log_2(2^{k-1}) + 1$, поэтому k-я итерированная оболочка и выпуклая оболочка представляют собой выпуклые комбинации $n+1$ точек, принадлежащих множеству E. Если же число $n + 1$ не есть степенью двойки, то $2n - 1 < n + 1 < 2^k$, и тогда $[\log_2(n)] = k - 1$. Поэтому k-я итерированная оболочка представляет собой выпуклые комбинации 2^k точек, принадлежащих множеству E, и, естественно, содержит выпуклую оболочку множества E.

Следствие 24.6. Пусть E — ограниченное подмножество n-мерного евклидового пространства, состоящее не более чем из n связных компонент, $k = [\log_2(n-1)]+1$. Тогда произвольная точка выпуклой оболочки E представима в виде k-й итерированной оболочки точек, принадлежащих E.

Предположим теперь, что E компакт, и исследуем гомологические свойства введенных оболочек. Пусть некоторая группа гомологии $H_j(E) \neq 0$.

Зафиксируем некоторую точку $a \in E$. В силу закона построения первой оболочки, множество E_1 содержит все гомотетии E с коэффициентом $0 \leq \alpha \leq 1$ и центром a. Следовательно, каждый ненулевой цикл на E гомологичен нулю в E_1. Аналогичное заключение можем сделать относительно произвольного вложения E_k в E_{k+1}. Построение очередной оболочки по очереди ликвидирует неоднородности (дыры) исходного множества. Сначала множество становится связным, далее односвязным и т.д. пока не станет выпуклым. Отсюда получаем следующий результат.

Утверждение 24.2. *Вложение $E_k \subset E_{k+1}$ индуцирует тривиальное отображение групп гомологий*

$$H_j(E_k) \to H_{j+1}(E_{k+1}).$$

Пример 24.2. Рассмотрим k-мерный остов n-мерного симплекса. Он является k-й оболочкой набора из $n+1$ аффиннонезависимых точек и служит модельным примером, показывающим, что усилить ацикличность k-й оболочки без дополнительных условий нельзя.

Пример 24.3. Два несмежных ребра трехмерного симплекса дают пример несвязного множества в трехмерном евклидовом пространстве, первая оболочка которого — трехмерный симплекс (ациклическое множество, совпадающее с выпуклой оболочкой).

Пример 24.4. Первая оболочка множества E_1, состоящего из границы k-мерного симплекса, $k < n$, и точки, не лежащей в плоскости этого симплекса, служит примером вложения $E_k \subset E_{k+1}$, для которого группы $H_k(E_k)$ и $H_{k+1}(E_{k+1})$ отличные от нуля, а гомоморфизм

$$H_i(E_k) \to H_{i+1}(E_{k+1})$$

тривиален, согласно утверждению 24.2, для всех значений i.

§ 25. Вариации к теореме Хелли

Классическая теорема Хелли утверждает, что семейство выпуклых компактов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет непустое пересечение тогда и только тогда, когда каждое его подсемейство, состоящее из $n+1$ элементов, имеет непустое пересечение. Из этой теоремы нельзя получить информацию о семействе, если известно, что непустые пересечения имеют подсемейства, состоящие из k элементов, где $0 < k \leq n$. Исследованию этого случая, а также поведения объединений обобщенно выпуклых семейств посвящен этот параграф.

1. Семейства выпуклых компактов.

Теорема 25.1. *Пусть $A = \{A_i\}$ — семейство выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ таких, что каждые k элементов из них имеют общую точку. Тогда или каждые $k+1$ компактов этого семейства имеют общую точку, или найдутся $k+1$ компактов такие, что $H^{k-1}\left(\cup_{i=1}^{k+1} A_i'\right) \neq 0$.*

Доказательство. Рассуждения, приводящие к доказательству, разобьем на несколько вспомогательных лемм.

Лемма 25.1. *Пусть задано семейство выпуклых компактов* $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m, \ldots$, *такое, что любой набор из* k *элементов имеет непустое пересечение. Тогда* $H^j((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+1} \cap \cdots \cap A_k) = 0$ *для всех* j, m, $0 \le m \le k$.

Доказательство. Утверждение очевидно для $m = 1$. Воспользуемся индукцией по m. Предположим, что оно верно для m произвольных наборов, содержащих не более k компактов. Докажем его для $m + 1 \le k$. Применим точную когомологическую последовательность Майера–Вьеториса для триады

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \cup A_{m+1} \cap A_{m+2} \cap \cdots \cap A_k,$$
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \cap A_{m+2} \cap \cdots \cap A_k, A_{m+1} \cap \cdots \cap A_k).$$

Выпишем три ее последовательных члена

$$H^j[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+1} \cap A_{m+2} \cap \cdots \cap A_k] \to$$
$$\to H^{j+1}[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \cup A_{m+1}) \cap A_{m+2} \cap \cdots \cap A_k] \to$$
$$\to H^{j+1}[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+2} \cap \cdots \cap A_k] \oplus$$
$$\oplus H^{j+1}(A_{m+1} \cap \cdots \cap A_k).$$

Согласно предположению индукции, все слагаемые в крайних элементах последовательности нулевые. Теперь из точности последовательности следует, что оцениваемая группа тоже будет нулевой.

Лемма 25.2. *Пусть задано семейство выпуклых компактов* $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k+1, \ldots$, *такое, что любой набор из* k *элементов имеет непустое пересечение. Тогда*

$$H^{j-2}[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j) \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_{k+1}] =$$
$$= H^{j-1}[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j \cup A_{j+1}) \cap A_{j+2} \cap \cdots \cap A_{k+1}],\ 2 \le j \le k.$$

Доказательство. Рассмотрим точную когомологическую последовательность триады

$$[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j \cup A_{j+1}) \cap A_{j+2} \cap \cdots \cap A_{k+1},$$
$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j) \cap A_{j+1} \cap \cdots \cap A_{k+1}, A_{j+1} \cap A_{j+2} \cap \cdots \cap A_k].$$

Выпишем четыре ее последовательных члена

$$H^{j-2}[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j) \cap A_{j+2} \cap \cdots \cap A_{k+1}] \oplus$$

$$\oplus H^{j-2}(A_{j+1} \cap A_{j+2} \cap \cdots \cap A_k) \to$$
$$\to H^{j-2}[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j) \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_{k+1}] \to$$
$$\to H^{j-1}[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j) \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_{k+1}] \to$$
$$\to H^{j-1}[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j) \cap A_{j+2} \cap \cdots \cap A_{k+1}] \oplus$$
$$\oplus H^{j-1}(A_{j+1} \cap A_{j+2} \cap \cdots \cap A_k).$$

Согласно предыдущей лемме, все слагаемые в крайних элементах последовательности нулевые потому, что в них оцениваются наборы, содержащие не более k компактов. Теперь из точности последовательности следует изоморфизм двух средних групп, что и требовалось доказать.

Следствие 25.1. При выполнении условий леммы 25.2 имеет место цепочка изоморфизмов

$$H^0[(A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k+1}] =$$
$$= H^1[(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4 \cap \cdots \cap A_{k+1}] =$$
$$= \cdots = H^{k-1}[A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+1}].$$

Эта цепочка получается $(k-1)$-кратным применением леммы 25.2.

Вернемся к доказательству теоремы. Предположим,что $\bigcap_1^{k+1} A_i = \varnothing$. Тогда множества $A_1 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k+1}$ и $A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k+1}$ не пересекаются и их объединение $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k+1}$ — несвязное множество. Поэтому нулевая группа когомологий этого объединения отлична от нуля. Теперь утверждение теоремы будет результатом следствия 25.1.

Анализируя ход доказательства, легко убедиться, что теорема и все вспомогательные утверждения будут справедливы, если семейство выпуклых компактов заменим на семейство ациклических компактов (группы когомологий которых совпадают с соответствующими группами точки), но дополнительно потребуем, чтобы любое подсемейство, состоящее из не более чем k компактов, имело ациклическое пересечение.

Простейший пример, на котором реализуется теорема, — семейство $(k-1)$-мерных граней k-мерного симплекса, объединение которых дает границу симплекса.

Следствие 25.2. Пусть $A = \{A_i\}$ — семейство выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$. Тогда или все компакты имеют непустое пересечение, или

существует подсемейство $\{A'_i\}$, $i = 1, \dots, k$, где $k < n$, такое, что $H^{k-1}\big(\bigcup_1^{k+1} A'_j\big) \neq 0$.

Для доказательства достаточно выбрать минимальное k, для которого подсемейство мощности k не имеет общей точки. Неравенство $k < n+1$, очевидно, следует из теоремы Хелли.

2. Семейства m-выпуклых компактов.

Ряд характеристик m-выпуклых компактов найден в § 16. Здесь мы продолжим их исследование.

Лемма 25.3. *Пусть* $K = \bigcup_1^l K_j$, *где* K_j – $(n-1)$-*выпуклые компакты такие, что* $\bigcap_1^l K_j = \varnothing$. *Тогда* $H^i(K) = 0$ *при* $i \leq l-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $l \geq 2$, иначе не выполнено условие пустоты пересечения. Пусть $l = 2$. Выпишем точную когомологическую последовательность Майера–Вьеториса

$$H^{i-1}(K_1 \cap K_2) \to H^i(K) \to H^i(K_1) \oplus H^i(K_2). \tag{25.1}$$

Первая группа равна нулю в силу пустоты пересечения. Для слагаемых третьего члена последовательности из леммы 16.3 $H^i(K_j) = 0$ при $j = 1, 2, i \geq 1$. Теперь из точности последовательности следует утверждение теоремы. Воспользуемся индукцией по l. Предположим, что теорема верна для объединений, содержащих не более $l-1$ слагаемых, и докажем ее для l слагаемых. Аналогично предыдущему, рассмотрим точную последовательность

$$H^i\big[\big(\bigcup_1^{l-1} K_j\big) \cap K_l\big] \to H^i\big(\bigcup_1^{l} K_j\big) \to H^i\big(\bigcup_1^{l-1} K_j\big) \oplus H^i(K_l). \tag{25.2}$$

Согласно лемме 16.3, $H^i\big(\cup_1^{l-1} K_j\big) = 0$ при $i \geq l-1$.

Заметим дальше, что $\big(\bigcup_1^{l-1} K_j\big) \cap K_l = \bigcup_1^{l-1}(K_j \cap K_l)$, где все $K'_j = K_j \cap K_l$ – $(n-1)$-выпуклые компакты, такие, что $\bigcap_1^{l-1} K'_j = \varnothing$. Отсюда, по предположению индукции, $H^i\big[\big(\bigcup_1^{l-1} K_j\big) \cap K_l\big] = 0$ для всех $i-1 \geq l-2$, а, согласно лемме 16.3, $H^i\big(\bigcup_1^{l-1} K_j\big) = 0$ для всех $i \geq l-1$. Поэтому из точности последовательности $H^i\big(\bigcup_1^{l} K_j\big) = 0$ при $i \geq l-1$.

П р и м е р 25.1. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ три 1-выпуклые множества, каждое из которых состоит из двух точек из заданных

трех a, b, c: $A = (a,b)$, $B = (b,c)$, $C = (a,c)$. Эти три множества попарно пересекаются и $A \cap B \cap C = \varnothing$, но в отличие от выпуклого случая объединение $A \cup B \cup C$ не является носителем 1-мерного цикла.

Теорема 25.2. *Пусть $\{K_j\}$, $j = 1, \dots, l$, — семейство m-выпуклых компактов, $l < n/(n-m)$, таких, что каждые $(l-1)$ из них пересекаются. Тогда или все они имеют непустое пересечение, или $H^i\big(\bigcup_1^l K_j\big) = 0$ при $i > n - n/(n-m) + l - 2$.*

Доказательство. В лемме 25.3 эта теорема доказана при $m = n-1$. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $\bigcap_1^l K_j = \varnothing$. Пусть $l = 2$. Как и в лемме 25.2, воспользуемся точной последовательностью (25.1). Первая группа равна нулю в силу пустоты пересечения. В каждом слагаемом третьего члена последовательности имеем группы когомологий m-выпуклого компакта.

Согласно § 16, справедлива оценка $H^i(K_j) = 0$, $j = 1, 2$, $i > n - n/(n-m)+1$. Теперь из точности последовательности вытекает доказательство теоремы. Дальше воспользуемся индукцией по l. Предположим, что теорема доказана для объединений, содержащих не более $l-1$ слагаемых из $(m+1)$-выпуклых компактов. Рассмотрим точную последовательность (25.2). Согласно теореме 16.1, $H^i\big(\bigcup_1^{l-1} K_j\big) = 0$ при $i > n-n/(n-m)+l-2$. Далее, $\big(\bigcup_1^{l-1} K_j\big) \cap K_l = \bigcup_1^{l-1} (K_j \cap K_l)$, где все $K_j' = K_j \cap K_l$ — m-выпуклые компакты, а пересечение $\bigcap_1^{l-1} K_j' = \varnothing$ по условию. Поэтому $H^i[\bigcup_1^{l-1}(K_j \cap K_l)] = 0$ при $i > n-n/(n-m)+l-3$. Согласно предположению индукции, $H^i(K_l) = 0$ при $i > n - n/(n-m)$. Теперь из точности последовательности получаем утверждение теоремы.

Очевидно, далее по индукции можно получить следующие утверждения.

Следствие 25.3. Пусть $\{K_j\}$, $j = 1, \dots, l$, — семейство m-выпуклых компактов, $k < l < n/(n-m)$, таких, что каждые его k элементов имеют непустое пересечение. Тогда или все l элементов семейства имеют непустое пересечение, или найдется подсемейство из $k < p \le l$ элементов $\{K_j'\}$ такое, что $H^i\big(\bigcup_1^p K_j'\big) = 0$ при $i > n - n/(n-m) + l - 1 - (l-p) = n - n/(n-m) + p - 1$, причем $\bigcap_1^p K_j' = \varnothing$.

Следствие 25.4. Объединение трех линейно выпуклых компактов, если они попарно пересекаются, а $\bigcap_1^3 K_i = \varnothing$, имеет тривиальные группы когомологий в размерностях $i > n/2 + 1$.

Следствие 25.5. Пусть $\{K_j\}$, $j = 1, \dots, s$, — семейство m-выпуклых компактов таких, что каждые его $l-1$ элементов имеют непустое пересечение, $l < n/(n-m)$. Тогда или каждые l элементов семейства имеют непустое пересечение, или существует подсемейство из l элементов $\{K'_j\}$ такое, что $H^i\big(\bigcup_1^p K'_s\big) = 0$ при $i > n - n/(n-m) + l - 2$.

Следствие 25.6. Пусть $\{K_j\}$, $j = 1, \dots, s$, — семейство m-выпуклых компактов таких, что никакие $l < n/(n-m)$ не пересекаются. Тогда для произвольного набора из l элементов $H^i\big(\bigcup_1^p K'_s\big) = 0$ при $i > n - n/(n-m) + l - 2$.

Следствие 25.7. Пусть $\{K_j\}$, $j = 1, \dots, l$, — семейство m-выпуклых компактов, $l < n/(n-m)$, таких, что $H^k\big(\bigcup_1^p K_j\big) \neq 0$ при $k = n - n/(n-m) + l - 1$. Тогда $\bigcup_1^l K_j \neq \varnothing$.

§ 26. О послойной линейной выпуклости

Понятие линейной выпуклости в $\mathbb{C}^n$ аналогично линейной $(2n-2)$-выпуклости в $\mathbb{R}^{2n}$, только при его определении вместо всех $(2n-2)$-плоскостей берутся только те из них, которые соответствуют комплексным гиперплоскостям. Аналогично можно ввести понятие линейной выпуклости в $\mathbb{R}^n$ относительно некоторого множества W аффинных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

Определение 26.1. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым относительно множества W аффинных подпространств в $\mathbb{R}^n$, если его дополнение к $\mathbb{R}^n$ является объединением элементов из W.

Определение 26.2. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ назовем подмножество $E^* \subset W$ сопряженным к E, если $E^* = \{l \in W : l \text{ не пересекает } E\}$. Соответственно, $E^{**} = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{l \in E^*} l \subset \mathbb{R}^n$ (последняя формула корректна, поскольку каждый элемент сопряженного множества W является подмножеством $\mathbb{R}^n$).

Заметим, что понятие сопряженного и двойного сопряженного множеств имеет смысл только для подмножеств $\mathbb{R}^n$, поскольку множество W может и не иметь структуры линейного пространства.

Очевидно, что выпуклость множества E относительно W равносильна равенству $E = E^{**}$. Множество E^{**} назовем выпуклой оболочкой множества $E \subset \mathbb{R}^n$ относительно W. Без всяких дополнительных предположений относительно множества W верны утверждения аналогичные предложениям § 2. Подробнее см. [121].

Приведем несколько примеров, когда сопряженное пространство изоморфно данному и, аналогично, каждой точке данного пространства соответствует линейное подмногообразие сопряженного пространства, состоящее из всех элементов, проходящих через эту точку. В этом случае $E^{**} = (E^*)^*$, где в правой части равенства оба сопряжения берутся по одинаковым формулам, но в разных пространствах, а E принадлежит одному из них.

П р и м е р 26.1. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$. Пусть W — множество прямых в $\mathbb{R}^3$, параллельных данной плоскости S. Тогда выпуклость множества E относительно W равносильна классической линейной выпуклости каждого сечения множества E плоскостью, параллельной S.

Если в $\mathbb{R}^3$ ввести координаты так, что $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$, то каждая прямая из W будет задаваться уравнением $l = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = d,\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,\ (a : b : c) \in \mathbb{R}P^2,\ d \in \mathbb{R}\}$. Значит, W гомеоморфно пространству $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}P^2$-проективная плоскость.

Если мы расширим $\mathbb{R}^3$ до пространства $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$ и введем координаты $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}P^2$, $x_4 \in \mathbb{R}$, то сопряжение будет задаваться в виде, симметричном относительно данного и сопряженного пространств. Следовательно, W изоморфно $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$.

П р и м е р 26.2. Возьмем пространство $\mathbb{R}^3$ и множество W прямых, принадлежащих плоскостям пучка, каждая плоскость которого проходит через некоторую фиксированную прямую l_0. Очевидно, что W гомеоморфно произведению проективных пространств $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^1$.

Если в $\mathbb{R}^3$ ввести координаты так, что $l_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$, то каждая прямая из W будет задаваться уравнением $l = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : ax_1 + bx_2 = 0,\ \frac{bx_1 - ax_2}{\sqrt{a^2+b^2}}c + dx_3 + e = 0\}$, при этом $(a : b) \in \mathbb{R}P^1$, $(c : d : e) \in \mathbb{R}P^2$ (на плоскости $ax_1 + bx_2 = 0$ одной из координат можно считать число $\frac{bx_1 - ax_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$). Это уравнение не является линейным относительно координат сопряженного пространства, а точке $x = (0, 0, x_3)$ соответствует двумерная плоскость. Но, если в множестве W заменить некоторые прямые плоскостями, то уравнение $ax_1 + bx_2 = 0$ запишется в виде $c\frac{ax_1}{\sqrt{a^2+b^2}} + c\frac{bx_2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$

и будет превращаться в тождество при $c = 0$. Заменив $\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}$ на a, $\frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}}$ на b, d на c и e на d, получим $l = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,\ -bx_1 + ax_2 = 0\}$, где $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Следовательно, множество W изоморфно $\mathbb{R}P^3$ и состоит из прямых, параллельных данной прямой или пересекающих ее под острым углом, а также из перпендикулярных ей плоскостей.

Если расширить $\mathbb{R}^3$ до $\mathbb{R}P^3$ так же, как и в предыдущем примере, то тогда отношение сопряжения будет симметрично относительно обоих пространств.

П р и м е р 26.3. Рассмотрим более общий пример. Возьмем линейное пространство $\mathbb{R}P^n$ и кососимметричный оператор A на нем. Известно, что $(Ax, x) = 0$, где скобки означают скалярное произведение. Пусть $W(A)$ состоит из линейных подпространств, ортогональных векторам Ax и x для некоторого вектора x. Элементами $W(A)$ будут плоскости коразмерности 1 и 2. Если $A = 0$, то множество $W(A)$ будет множеством всех гиперплоскостей. В последнем случае каждая плоскость, не проходящая через начало координат, задается точкой $y \in \mathbb{R}P^n$ с помощью сопряжения $(x, y) = 0$. Заметим, что множество плоскостей, проходящих через данную точку, задается точками, лежащими на некоторой плоскости. Это соответствие можно обобщить на случай произвольного оператора A с помощью равенств $(x, y) = 0, (x, Ay) = 0$. Тогда множество, сопряженное точке, задается равенствами $(y, x) = 0$, $(y, Ax) = 0$ и принадлежит $W(A)$ (поскольку $(x, Ay) = -(Ax, y) = 0$ для кососимметрического оператора). В связи с тем, что для нечетных размерностей все линейные операторы имеют инвариантные прямые,то множество $W(A)$ для нечетных размерностей обязательно содержит гиперплоскости (коразмерности 1) наряду с плоскостями коразмерности 2.

Теорема 26.1. *Пусть D — открытое ограниченное связное множество в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей класса $\mathbb{C}^1$, выпуклое относительно семейства $(2n-2)$-мерных плоскостей, параллельных плоскости $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Тогда его граница ∂D является когомологической сферой S^{n-1}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим проекцию λ множества $\overline{D}$ на прямую Ox_n. Ее сужение на границу $\lambda : \partial D \to \mathbb{R}$ является гладким отображением гладких многообразий. Согласно теореме Сарда [176], образ множества его сингулярных точек $\lambda(S)$, $S \subset \partial D$, имеет меру нуль на прямой. Следовательно, для почти всех точек $y \in \lambda(\partial D)$

множество $\lambda^{-1}(y)\cap\partial D$ является совокупностью гладких кривых как граница линейно выпуклого открытого множества в плоскости $\{x \in \mathbb{R} : x_n = y\} = \Lambda_y$. Легко показать, что $\Lambda_y \cap \partial D$ — граница выпуклой области $\lambda^{-1}(y) = \Lambda_y \cap D$ в гиперплоскости Λ_y.

Пусть $x_0 \in \lambda^{-1}(\lambda(S)) \cap D$ — произвольная точка нерегулярного сечения области D. Выберем окрестность $U(x_0)$ этой точки, лежащую в D. Пусть x_1 — другая точка множества $\lambda^{-1}(\lambda(S))\cap\overline{D}$. В силу плотности в $\overline{D}$ регулярных сечений существует последовательность $A = \{x_{1n}\}$ точек, принадлежащих регулярным сечениям, сходящаяся к точке x_1. Выберем подпоследовательность последовательности A, обладающую свойством $\lambda(x_{1n}) \subset \lambda(U(x_0))$. Не нарушая общности, считаем, что этим свойством обладает сама последовательность A. Выберем другую последовательность $B = \{x_{0n}\}$, сходящуюся к точке x_0 и обладающую дополнительно свойством $x_{0n} \in U(x_0) \cap \lambda^{-1}(\lambda(x_{1n}))$. Пара точек x_{1n} и x_{0n} принадлежит выпуклому множеству $D \cap \lambda^{-1}(\lambda(x_{1n}))$ и поэтому соединяющий их отрезок $[x_{1n}, x_{0n}]$ тоже принадлежит $D\cap\lambda^{-1}(\lambda(x_{1n}))$. Граница последовательности отрезков $[x_{1n}, x_{0n}]$ естественно содержит в себе отрезок $[x_1, x_0]$. Поэтому для произвольной точки $y \in \lambda(\overline{D})$ множество $\lambda^{-1}(y) \cap \overline{D}$ будет звездным относительно произвольной точки из $\lambda^{-1}(y)\cap D$, а множество $\lambda^{-1}(y)\cap D$ — выпуклым. Аналогично доказывается, что множество $\lambda^{-1}(y)$ звездно для крайних точек множества $\lambda(\overline{D})$.

Следовательно, пересечение любого луча, параллельного плоскости $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, который исходит из области D с границей ∂D, является либо точкой, либо замкнутым отрезком (другими словами, ациклично).

Докажем, что существует кривая $l \subset \overline{D}$, которая взаимно однозначно проектируется на $\lambda(\overline{D})$. Пусть точки $a, b \in \partial D$ проектируются в концы отрезка $\lambda(\overline{D})$. Вследствие связности, существует спрямляемая кривая l_1, целиком, за исключением своих концов, лежащая в D. В окрестностях точек a и b частями кривой l_1 можно выбрать отрезки $[a, a_1]$, $[b, b_1]$ внутренних нормалей к гладкой границе так, чтобы они проектировались взаимно однозначно на свой образ. Будем идти вдоль кривой l_1 до точки c, для которой множество $\lambda^{-1}(\lambda(c)) \cap l_1$ состоит из более, чем одной точки. Если эта точка не принадлежит регулярному сечению, то вместо точки c возьмем точку c_1, следующую на кривой за c, такую, что $\lambda^{-1}(\lambda(c)) \cap l_1$ также состоит из более, чем одной точки. Выбор такой точки возможен в силу открытости D. В этом множестве возьмем точку d, которая на кривой

следует за всеми остальными точками $\lambda^{-1}(\lambda(c))\cap l_1$, что возможно в силу компактности кривой. Пусть $\Lambda_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = \alpha\}$. Отрезок $[c,d]$ целиком лежит в D в силу выпуклости $D \cap \Lambda_{\lambda(c)}$ и проектируется в одну точку отрезка $\lambda(\overline{D})$. Поскольку D открыто, то существует точка d_1, следующая за d на кривой, такая, что $[c,d_1] \subset D$, а дуга кривой $\smile ac$ в объединении с отрезком $[c,d_1]$ проектируется на прямую Ox_n взаимно однозначно. Поскольку кривая l_1 является упорядоченным множеством, то пройдя вдоль кривой и заменив последовательно необходимые дуги на отрезки, мы получим кривую $l \subset \overline{D}$, взаимно однозначно проектирующуюся в прямую Ox_n.

Пусть $\lambda(D) = (\alpha,\beta)$, тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любого $\gamma \in [\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$ существует сфера в плоскости Λ_γ радиуса δ с центром в точке множества $l \cap \Lambda_\gamma$, целиком лежащая в D. Если это необходимо, уменьшим ε и δ так, чтобы конусы с вершинами в точках a,b и основаниями соответственно $S^{n-2}(\alpha+\varepsilon)$, $S^{n-2}(\beta-\varepsilon)$ принадлежали D. Объединение H всех таких сфер и конусов гомеоморфно сфере S^{n-1}. Рассмотрим отображение $\sigma : \partial D \to H$ такое, что $x \in \partial D$ отображается в точку пересечения сферы $S^{n-2}(\lambda(x))$ и луча с началом в $\Lambda_{\lambda(x)} \cap l$, проходящего через x. Такое отображение является однозначным и ациклическим (прообразом точки является либо точка либо замкнутый отрезок). Значит, вследствие теоремы Бегла–Вьеториса оно индуцирует изоморфизм когомологий множеств ∂D и S^{n-1}. Теорема доказана.

Следующие примеры показывают существенность гладкости границы и ограниченности области в теореме.

П р и м е р 26.4. Пусть $D = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 < |x_1| + |x_3| < 3,\ 0 < x_2 < 1\}$. Легко убедиться, что область D выпукла относительно семейства прямых, параллельных плоскости $\{x_3 = 0\}$. Сечения этой области плоскостями $\{x_3 = d\}$ при $-1 \le d \le 1$ состоят из двух прямоугольников. Граница области ∂D гомеоморфна тору и имеет нетривиальную одномерную группу когомологий.

П р и м е р 26.5. Пусть $D = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2^2(1-x_3^2) > 1 - x_3^2\}$. Каждое сечение области D плоскостью $\{x_3 = a\}$, $-1 < a < 1$, является внутренностью гиперболы (две компоненты, не пересекающие плоскость $x_1 = 0$). Область D имеет гладкую границу и выпукла относительно семейства прямых, параллельных плоскости $\{x_3 = 0\}$. Граница области ∂D гомеоморфна поверхности бесконечного цилиндра над окружностью и имеет нетривиальную одномерную группу когомологий.

§ 27. Критерий выпуклости компакта

Определение 27.1. Гиперплоскость L называется опорной к компакту $K \subset \mathbb{R}^n$, если не пусто сечение $L \cap K \subset \partial K$ и компакт K лежит в одном из полупространств, на которые плоскость L разбивает пространство $\mathbb{R}^n$.

Лемма 27.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — ациклический не выпуклый компакт. Тогда существует опорная к K гиперплоскость, пересекающая K по множеству, содержащему ненулевой цикл.*

Доказательство. Предположим, что это не так и все опорные плоскости пересекают K по ациклических множествах. Не нарушая общности, будем считать, что внутренность выпуклой оболочки компакта не пустая (если это не так, то можем перейти к наименьшей плоскости, содержащей его) и, что начало координат содержится во внутренности выпуклой оболочки $\operatorname{conv} K$ компакта K. Пусть $(\operatorname{conv} K)^\circ$ — поляра к $\operatorname{conv} K$, которая при наложенных на K предположениях будет компактным множеством. Будем исследовать в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ множество $\operatorname{conv} K \times (\operatorname{conv} K)^\circ$, а точнее его подмножество F, которое можно задать двумя эквивалентными способами

$$F = \big\{(x, y) \in \operatorname{conv} K \times (\operatorname{conv} K)^\circ \,\big|\, x \in \partial \operatorname{conv} K,\ y \in \partial\,[(\operatorname{conv} K)^\circ]\,\big\},$$

где точка y задает опорную гиперплоскость к $\operatorname{conv} K$, проходящую через точку x, или, что то же самое, точка x задает опорную гиперплоскость к $(\operatorname{conv} K)^\circ$, проходящую через точку y. В силу выпуклости множеств $\operatorname{conv} K$ и $(\operatorname{conv} K)^\circ$ опорные гиперплоскости пересекают их по выпуклых, а значит ациклических множествах. Следовательно, существуют два непрерывных отображения $p_1 : F \to \partial(\operatorname{conv} K)$ и $p_2 : F \to \partial[(\operatorname{conv} K)^\circ]$, которые будут ациклическими (стягивают в точку соответствующие пересечения с опорными плоскостями) и, согласно теореме Вьеториса–Бегла, они индуцируют изоморфизмы соответствующих групп когомологий. Поскольку границы выпуклых невырожденных компактов гомеоморфны $(n-1)$-сферам, то и соответствующие группы множества F совпадают с группами сферы. Далее используем равенство поляр, которое справедливо, потому что, согласно предположению, K содержит начало координат. Рассмотрим теперь подмножество множества F, которое имеет следующие свойства

$$F_0 = \big\{(x, y) \in F \,\big|\, x \in K \cap \partial \operatorname{conv} K,\ y \in \partial\big[(\operatorname{conv} K)^\circ\big]\big\},$$

где, как и выше, точка y задает опорную гиперплоскость к K, проходящую через точку x, а точка x задает опорную гиперплоскость к $(\operatorname{conv} K)^\circ$, проходящую через точку y. Из того, что по условию $K \neq \operatorname{conv} K$ следует, что F_0 собственное подмножество F. Как и выше, существуют непрерывные отображения $h_1 : F_0 \to K \cap \partial(\operatorname{conv} K)$ и $h_2 : F_0 \to \partial[(\operatorname{conv} K)^\circ]$. Покажем их ацикличность. Проекция h_1 ациклична, потому что множество опорных плоскостей в точке $x \in K$ совпадает с множеством опорных плоскостей в той же точке к $\operatorname{conv} K$. Проекция h_2 ациклична, потому что, согласно предположению, сечения компакта K опорными гиперплоскостями ациклични. Итак, как и выше, имеем два ацикличные отображения, которые индуцируют изоморфизмы групп когомологий. Поэтому

$$H^{n-1}(K \cap \partial \operatorname{conv} K) \approx H^{n-1}(F_0) \approx H^{n-1}\big[(\operatorname{conv} K)^\circ\big] \approx H^{n-1}(S^{n-1}).$$

А это возможно только тогда, когда $K \cap \partial(\operatorname{conv} K) = \partial(\operatorname{conv} K)$ и, следовательно, в силу ацикличности K, $\operatorname{conv} K = K$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание 27.1. Пример сферы в евклидовом пространстве показывает, что доказана выше лемма будет неверной без предположения ацикличности компакта.

П р и м е р 27.1. Полусфера

$$S^- = \big\{(x_1, x_2, x_3) \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 \leq 0\big\}.$$

Опорная плоскость $x_3 = 0$ пересекает ее по одномерному циклу (окружности). Пересечение с любой другой опорной плоскостью, например L, является единственной точкой полусферы. Отсюда следует, что если условие леммы 27.1 не выполняются хотя бы для одной опорной плоскости, то ее заключение может не выполняться (см. рис. 8).

Заметим, что при доказательстве леммы ацикличностью компакта мы воспользовались лишь в конце при утверждении его выпуклости. Поэтому справедлив следующий результат.

Следствие 27.1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Если каждая опорная к K гиперплоскость пересекает K по ацикличному множеству, то или K является выпуклым компактом, или он содержит ненулевой $(n-1)$-цикл.

Носителем этого цикла будет граница $\partial \operatorname{conv} K$, если K имеет внутренние пустоты.

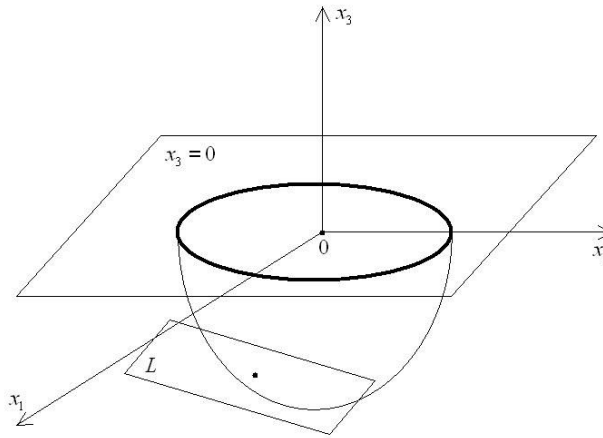


Рис. 8.

Определение 27.2. Будем говорить, что m-плоскость L, $0 \leq m < n-1$ является опорной к компакту K, если сечение $K \cap L$ не пустое и L лежит в опорной к K гиперплоскости.

Из леммы 27.1 вытекает следующее обобщение теоремы Ауманна для ацикличных компактов.

Теорема 27.1. *Для того чтобы ацикличный компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ был выпуклым необходимо и достаточно, чтобы все его сечения опорными m-плоскостями для фиксированного m, $1 \leq m \leq n-1$, были ацикличными.*

Доказательство. Если $m < n-1$, то из теоремы Ауманна следует, что сечения компакта K опорными плоскостями будут выпуклыми и, следовательно, ацикличными. Теперь теорема вытекает из леммы 27.1.

Замечание 27.2. Если использовать только те опорные плоскости меньшей размерности, которые будут опорными к сечениям компакта K опорными гиперплоскостями, то этого будет мало для выпуклости компакта K. В примере 27.1 все такие одномерные плоскости (прямые) пересекают компакт по единственной точке, но он не выпуклый.

§ 28. Критерий сильной линейной выпуклости компакта

Изучим, как полученный в предыдущем разделе результат можно перенести на комплексный случай. Заметим, что здесь ситуация по сравнению с действительным случаем усложняется, потому что граница сильно линейно выпуклого компакта может не быть топологически эквивалентной сфере, как это видно из примера, построенного в 10.2, в котором внутренность такого компакта в $\mathbb{C}^2$ состоит из двух компонент. При $n = 1$ такие примеры строятся очень просто. Поэтому доказательства комплексного варианта теоремы несколько отличается от предыдущего.

Воспользуемся утверждением 15.2 и докажем аналог теоремы 27.1 в комплексном случае. Этот результат обобщит теорему 9.1 на случай ацикличных компактов.

Теорема 28.1. *Для того, чтобы ацикличный компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ с непустой внутренностью был сильно линейно выпуклым необходимо и достаточно, чтобы все его сечения опорными комплексными m-плоскостями для фиксированного m, $1 \le m < n-1$, были ациклични, а в случае, когда $m = n-1$, чтобы они были сильно линейно выпуклыми.*

Установим вспомогательную лемму.

Лемма 28.1. *Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — ацикличный не сильно линейно выпуклый компакт с непустой внутренностью. Тогда существует опорная к K комплексная плоскость, пересекающая K по множеству, содержащему ненулевой цикл.*

Доказательство. Пусть все опорные к K комплексные гиперплоскости пересекают K по ацикличным множествам. Тогда из утверждения 15.2 следует, что компакт K имеет сильно линейно выпуклую c-оболочку $\operatorname{cconv} K$, которая, согласно условию, содержит внутренние точки и поэтому, не нарушая общности, можно считать, что начало координат содержится во внутренности $\operatorname{cconv} K$ (если это не так, то этого легко добиться сдвигом, который, конечно, не меняет свойств компакта). Тогда сопряженное множество $K^* = (\operatorname{cconv} K)^*$ будет открытым множеством с компактным замыканием. Из предыдущего равенства следует равенство $\partial K^* = \partial((\operatorname{cconv} K)^*)$.

Теперь, аналогично лемме 27.1, рассмотрим множество

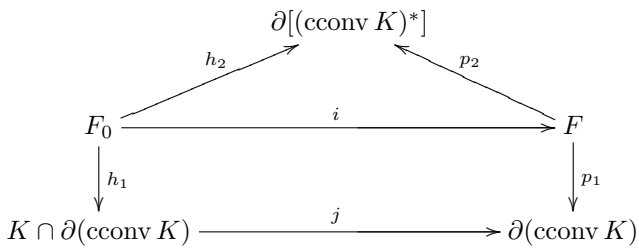
$$F = \left\{(z, w) \in \operatorname{cconv} K \times (\overline{\operatorname{cconv} K})^* \;\middle|\; z \in \partial \operatorname{cconv} K,\ w \in \partial[(\operatorname{cconv} K)^*]\right\}$$

и его подмножество

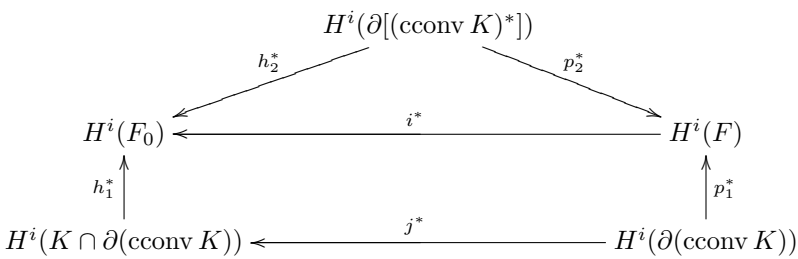
$$F_0 = \big\{(z,w) \in F \,\big|\, z \in K \cap \partial\,\mathrm{cconv}\,K,\ w \in \partial[(\mathrm{cconv}\,K)^*]\big\}.$$

В силу сильной линейной выпуклости c-оболочки $\mathrm{cconv}\,K$, существует два непрерывных отображения $p_1 : F \to \partial(\mathrm{cconv}\,K)$ и $p_2 : F \to \partial[(\mathrm{cconv}\,K)^*]$, второе из которых будет ацикличным (оно стягивает в точку соответствующие сечения $\mathrm{cconv}\,K$ опорными плоскостями) и согласно теореме Вьеториса–Бегла оно индуцирует изоморфизмы соответствующих групп когомологий. Первое же отображение будет только монотонным (прообраз каждой точки связный), ведь согласно утверждению 10.4 все сечения области $(\mathrm{cconv}\,K)^*$ комплексными прямыми будут связными. То, что среди таких сечений могут быть не односвязные множества, показано в примере 10.2.

Как и выше, существуют непрерывные отображения $h_1 : F_0 \to K \cap \partial(\mathrm{cconv}\,K)$ и $h_2 : F_0 \to \partial[(\mathrm{cconv}\,K)^*]$. Проекция h_1 монотонна, потому что множество опорных плоскостей в точке $x \in K$ совпадает с множеством опорных плоскостей в той же точке к $\mathrm{cconv}\,K$. Проекция h_2 ациклична, потому что, согласно предположению, сечения компакта K опорными гиперплоскостями ацикличны. Имеем коммутативную диаграмму отображений



которой соответствует коммутативная диаграмма групп когомологий



В этой диаграмме гомоморфизмы h_2^* и p_2^* являются изоморфизмами для всех размерностей из-за ацикличности отображений, которые их порождают. Теперь с коммутативности диаграммы следует изоморфность гомоморфизма t^*. Из монотонности отображений h_1 и p_1, согласно лемме 10.2, следует мономорфность гомоморфизмов h_1^* и p_1^*, соответственно, в размерности один. Поэтому суперпозиция гомоморфизмов $t^*p_1^*$ является мономорфизмом. Теперь из коммутативности диаграммы следует мономорфность гомоморфизма $h_1^*j^* = t^*p_1^*$, а, следовательно, и мономорфность гомоморфизма j^* в размерности 1 как составной части предыдущего мономорфизма. Если сечения компакта со всеми опорными плоскостями фиксированной размерности $m < n-1$ будут ацикличными, то, согласно теореме 9.1, они будут сильно линейно выпуклыми. Если $m = n-1$, то сильная линейная выпуклость сечений задана условием. Итак отсюда следует, что сечения компакта K опорными комплексными прямыми ациклични. Но каждая точка границы $\partial\,\mathrm{cconv}\,K$ может быть порождена только как c-комбинация точек ∂K. В силу ацикличности сечений отсюда следует, что $\partial\,\mathrm{cconv}\,K = \partial K$, так как новых точек на границе появиться не может. Теперь в силу ацикличности компакта K вытекает равенство $\mathrm{cconv}\,K = K$, которое эквивалентно сильной линейной выпуклости K. Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 28.1 вытекает из предыдущей леммы как следствие. Заметим, что из условий леммы 28.1 и теоремы 28.1, очевидно, следует, что $n > 1$, иначе, конечно, эти результаты не будут верными. Ведь при $n = 1$ гиперплоскостью будет точка. Теорема 28.1 показывает, что для установления сильной линейной выпуклости ацикличного компакта информация обо всех его сечениях линейными комплексными плоскостями не является необходимой. Достаточно знать свойства его сечений опорными плоскостями.

§ 29. Декартовы произведения компактов в многомерном гиперкомплексном пространстве

Далее мы будем переносить теорему 11.1 о декартовом произведении компактов в комплексном евклидовом пространстве на гиперкомплексный случай.

Определение 29.1. Множество $E \subset \mathbb{H}^n$ называется линейно гиперкомплексно выпуклым, если его дополнение к $\mathbb{H}^n$ является некоторым объединением гиперплоскостей пространства $\mathbb{H}^n$.

В силу некоммутативности умножения в теле кватернионов, следует отличать плоскости, задаваемые умножением справа или слева. Везде далее мы будем рассматривать линейные подмножества, определенные умножением слева, для другого задания проходят все аналогичные рассуждения.

Определение 29.2. Множество $E \subset \mathbb{H}^n$ называется сильно линейно выпуклым, если все его сечения гиперкомплексными прямыми ациклични (гомотопно эквивалентны точке).

В [169] доказано, что сильно линейно выпуклые области и компакты является линейно гиперкомплексно выпуклыми множествами. Следующая теорема характеризует сильно линейно выпуклые компакты, которые можно представить как декартовы произведения.

Теорема 29.1. *Компакт, который является невырожденным декартовым произведением в $\mathbb{H}^n$ — сильно линейно выпуклый тогда и только тогда, когда он выпуклый.*

Доказательство. Пусть E — сильно линейно выпуклый компакт. Не нарушая общности, можно считать, что $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{H}^2$ иначе достаточно перейти к пересечению E гиперкомплексно двумерным пространством.

Далее для продолжения доказательства установим ряд технических лемм.

Лемма 29.1. *Пусть K_1 и K_2 — два компактные ациклические подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^4$, каждое из которых содержит не менее двух точек, кроме того, множество K_2 является выпуклым телом (т.е. замыканием открытого множества). Если для каждого невырожденного линейного отображения f множество $K_1 \cap f(K_2)$ ациклично (в том числе пустое), то множество K_1 тоже выпукло.*

Доказательство. Предположим, что множество K_1 не выпуклое. Если множество K_1 несвязно, то выберем две точки x_1 и x_2, лежащие в разных компонентах. Легко подобрать линейное отображение f, которое две точки компакта K_2 переведет в эти две точки множества K_1. В силу гомеоморфности f, пересечение $K_1 \cap f(K_2)$ несвязно, что противоречит условию.

Если же множество K_1 связно, то, согласно лемме 27.1, существует сечение K_1 опорной гиперплоскостью, содержащее ненулевой

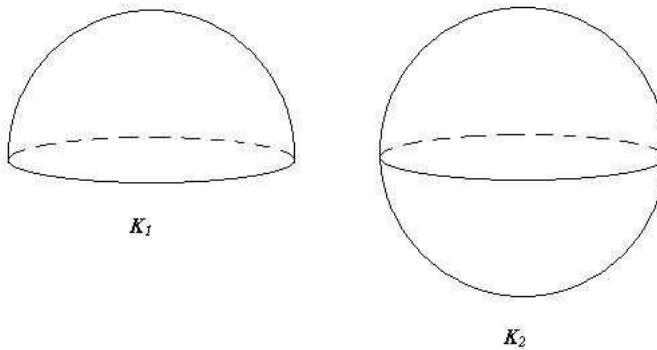


Рис. 9.

цикл. Отображение f выберем таким, чтобы образ $f(K_2)$ содержал внутри шар достаточно большого радиуса и таким, чтобы гиперплоскость, параллельная касательной, в весьма малой окрестности точки касания включала в пересечении с $f(K_2)$ шар диаметра большего от диаметра сечения K_1 с выбранной гиперплоскостью. Теперь легко подобрать сдвиг множества $f(K_2)$ так, чтобы основная ее часть находилась в другом полупространстве, чем множество K_1 и пересечение $K_1 \cap f(K_2)$ мало отличалось от пересечения выбранной опорной плоскостью, а, следовательно, содержало ненулевой цикл. Этим выпуклость множества установлено. Легко видеть, что лемма останется справедливой, если четырехмерное евклидово пространство рассматривать как гиперкомплексное пространство $\mathbb{H}$, а отображение f как гиперкомплексно линейное отображение.

Покажем, что лемма 29.1 будет неверной, если ограничиться только линейными сдвигами без гомотетий.

П р и м е р 29.1. Пусть K_2 — шар единичного радиуса и K_1 — полусфера тоже единичного радиуса. Если ограничиться только линейными трансляциями множества K_2 без гомотетий, то все возможные парные пересечения $K_1 \cap f(K_2)$ множеств ацикличны (см. рис. 9).

Определение 29.3. 1-флагом в пространстве $\mathbb{R}^n$ назовем его замкнутое полупространство. Его границу назовем древком флага. Распространим определение по индукции: k-флагом в пространстве $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$, назовем объединение открытого полупространства с $(k-1)$-флагом, который лежит в его границе. При этом k-флаг

содержит в себе все меньшие m-флаги, $1 \le m \le k$, его древком будем называть древко наименьшего вложенного 1-флага. Для полноты 0-флагом будем называть само пространство , древком для него будем считать его же. Два флага будем называть дополняющими, если их пересечение содержится в древке.

Лемма 29.2. *Каждый компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ лежит в некотором n-флаге так, что его пересечение с каждым меньшим подфлагом не пусто.*

Очевидно доказывается последовательным выбрасыванием из пространства частей, лежащих по другую сторону соответствующих опорных плоскостей.

Лемма 29.3. *Для каждого не выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует вложение в некоторый k-флаг так, что его пересечение с каждым меньшим подфлагом не пустое, а пересечение с древком является носителем $(n-k-1)$-мерного цикла.*

Доказательство. Согласно следствию 27.1, если пересечение с древком, которое есть $(n-k)$-мерным евклидовым пространством, содержит цикл размерности меньшей от $(n-k-1)$, то будет существовать вложение компакта в $(k+1)$-флаг и так далее, пока не получим ненулевой цикл максимально возможной размерности в древке.

Лемма 29.4. *Пусть $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ — два компакты, содержащие ненулевые $(n-1)$-циклы и все координаты компактов положительные, $n \ge 2$. Тогда существует отображение f такое, что пересечение $K_1 \cap f(K_2)$ является носителем ненулевого цикла, где f является суперпозицией поворота пространства $\mathbb{R}^n$ и его гомотетии относительно начала координат.*

Доказательство. Из условий леммы и формулы Кюнетта в виде точной последовательности групп когомологий

$$0 \to H^{n-1}(K_1) \otimes H^{n-1}(K_2) \to H^{2n-2}(K_1 \times K_2)$$

следует, что $(2n-2)$-мерная группа когомологий декартова произведения $K_1 \times K_2$ отлична от нуля, ведь есть мономорфизм ненулевой группы $H^{n-1}(K_1) \otimes H^{n-1}(K_2)$ в группу $H^{2n-2}(K_1 \times K_2)$. С другой стороны, графиком описанного в лемме отображения будет пересечение этого декартова произведения с n-мерной плоскостью, проходящей через начало координат. Предположим, что для каждого отображения f множества $K_1 \cap f(K_2)$ ациклични. Объединение множества сечений совпадает с декартовым произведением $K_1 \times K_2$. Рассмотрим

семью гомотетий компакта K_2. Каждой такой гомотетии f соответствует n-мерная плоскость, пересекающая декартово произведение $K_1 \times K_2$ по множеству гомеоморфному $K_1 \cap f(K_2)$ и, следовательно, ацикличному. Если к этой семье отображений добавим все возможные пространственные повороты вокруг начала координат, то тоже будем иметь ацикличные сечения вида $K_1 \times K_2$ по множеству гомеоморфному $K_1 \cap f(K_2)$. Набор всех сечений исчерпывает декартово произведение $K_1 \times K_2$. Рассмотрим семью n-мерных плоскостей, проходящих через начало координат. Они образуют Грассманово многообразие $G(2n, n)$ размерности n^2. Теперь имеем многозначное отображение с ацикличными образами

$$F : \ G(2n, n) \to K_1 \times K_2.$$

Согласно теореме Вьеториса–Бегла, имеем изоморфизм групп когомологий

$$F^* : \ H^i(\Gamma(F)) \to H^i(G(2n, n)),$$

для всех i, где $\Gamma(F)$ — график отображения F.

Проекция $q : \Gamma(F) \to K_1 \times K_2$ является достаточно сложным для исследования отображением, поэтому мы будем исследовать его последовательно по индукции. Покажем, что с ацикличности сечений n-мерными плоскостями будет следовать ацикличность сечений $(n+1)$-мерными плоскостями и так далее, пока не получим ацикличность всего декартова произведения. Зафиксируем некоторую $(n+1)$-мерную плоскость L, проходящую через начало координат. Множество n-мерных плоскостей, лежащих в L и проходящих через начало координат, гомеоморфно n-мерному проективному пространству S^n.

Таким образом, имеем многозначное отображение с ациклическими образами $F_0 : S^n \to (K_1 \times K_2) \cap L$, которое по теореме Вьеториса–Бегла индуцирует изоморфизм групп когомологий $F_0^* : H^i(\Gamma(F_0)) \to H^i(S^n)$ для всех i. Поскольку множество выделенных плоскостей очень широко и их взаимные пересечения трудно оценить, поэтому мы сузим это множество, и далее мы будем рассматривать его подмножество, а именно подмножество n-мерных плоскостей с рассмотренной выше семьи, которые содержат в себе фиксированную $(n-1)$-мерную плоскость, не пересекающую декартово произведение $K_1 \times K_2$ и проходящую через начало координат. Такую плоскость легко выбрать из-за расположения произведения. Для этого подмножества, аналогично предыдущему, имеем многозначное отображение

с ацикличными образами $F : S^1 \to (K_1 \times K_2) \cap L$, которое по теореме Вьеториса–Бегла индуцирует изоморфизм групп когомологий $F^* : H^i(\Gamma(F)) \to H^i(S^1)$ для всех i.

Проекция графика этого отображения на $(K_1 \times K_2) \cap L$ порождает коммутативную диаграмму отображений пар

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F) & \xrightarrow{q} & (K_1 \times K_2) \cap L \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^1 & \xrightarrow{q_0} & \varnothing \end{array}$$

где $\varnothing$ — пустое множество, и соответствующую ей коммутативную и точную в строках диаграмму групп когомологий

$$\begin{array}{ccccc} H^{i-1}(\varnothing) & \longrightarrow & H^i((K_1 \times K_2) \cap L, \varnothing) & \to & \\ \downarrow q_0^* & & \downarrow q_1^* & & \\ H^{i-1}(S^1) & \longrightarrow & H^i(\Gamma(F), S^1) & \to & \\ \to H^i((K_1 \times K_2) \cap L) & \longrightarrow & H^i(\varnothing) & \longrightarrow & H^{i+1}((K_1 \times K_2) \cap L, \varnothing) \\ \downarrow q^* & & \downarrow q_0^* & & \downarrow q_1^* \\ \to H^i(\Gamma(F)) & \xrightarrow{i^*} & H^i(S^1) & \longrightarrow & H^{i+1}(\Gamma(F), S^1). \end{array}$$

Вложение $i : S^1 \to \Gamma(F)$ индуцирует изоморфизм $i^* : H^i(\Gamma(F)) \approx H^i(S^1)$ в нижней строке диаграммы. Теперь из точности нижней строки следует тривиальность групп $H^i(\Gamma(F), S^1)$ для всех i.

Поскольку выбранное подмножество n-мерных плоскостей пересекается только по плоскости, которая декартово произведение не пересекает, то проекция q является гомеоморфизмом на множестве $((K_1 \times K_2) \cap L) \setminus \varnothing = (K_1 \times K_2) \cap L$ и поэтому она индуцирует изоморфизм $q_1^* : H^i((K_1 \times K_2) \cap L, \varnothing) \approx H^i(\Gamma(F_0), S^1)$, а это, учитывая установленное выше, означает тривиальность первой группы последовательности для всех значений i. Воспользуемся точностью верхней строки диаграммы $(*)$. Отсюда вытекают изоморфизмы всех групп $H^i((K_1 \times K_2) \cap L) \approx H^i(\varnothing)$, где правая группа тривиальна. Последовательно повторяя проведенные рассуждения для больших размерностей, получим ацикличность сечений $K_1 \times K_2$ всеми плоскостями больших размерностей, содержащих начало координат, а, следовательно, и всем пространством $\mathbb{R}^{2n}$. Поэтому декартово произведение $K_1 \times K_2$ ациклично, что противоречит предположению.

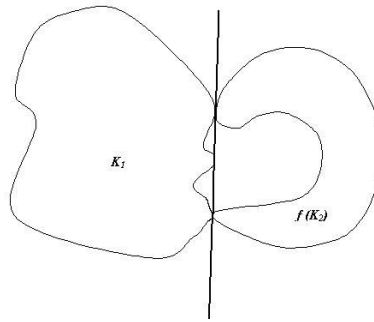


Рис. 10.

Теперь вернемся к доказательству теоремы 29.1. Если один из сомножителей выпуклый, то в случае, если он содержит внутренние точки, достаточно применить лемму 29.1, чтобы получить не ацикличное сечение либо гиперплоскостью, либо образом после гомотетии этого выпуклого сомножителя, который мало уклоняется от опорной гиперплоскости. Если же этот сомножитель не содержит внутренних точек, то он находится в некоторой действительной гиперплоскости пространства $\mathbb{H}$. Следовательно, его можно разместить в действительной опорной гиперплоскости к K_1, которая пересекает K_1 по некоторому ненулевому циклу. Теперь гомотетией компакта K_2 можно добиться ненулевого цикла в сечении $K_2 \cap f(K_2)$, которое топологически эквивалентно сечению исходного компакта гиперкомплексной прямой. Если оба сомножителя не выпуклые, то, согласно лемме 29.3, разместим сомножители во флагах так, чтобы циклы максимальной размерности лежали в соответствующих древках, а внутренности компактов в дополняющих флагах.

Если эти древка имеют разную размерность, то зафиксируем меньшую из них, пусть m, а в древке большей размерности выделим подпространство этой же размерности m, которое цикл древка разбивает. Это возможно, ведь мы показали, что ненулевой цикл разбивает древко. Так, согласно лемме 29.4, нам достаточно подобрать отображение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, внутренности компактов при этом пересекаться не будут. Теперь существование не ациклического пересечения подмножеств из древков, которое установлено в лемме 29.4, противоречит сильной гиперкомплексной выпуклости компакта K и завершает доказательство теоремы.

Глава 6

Комментарии и приложения

§ 30. Исторические справки, комментарии, проблемы

Многозначные отображения, как часть общей теории отображений, в последние годы находят все большие приложения в анализе, теории дифференциальных уравнений, математической экономике. Эти приложения показывают силу топологических методов, их универсальность. Они позволяют собрать ряд результатов в стройную теорию.

Многие глубокие свойства аналитических функций отражаются на топологических свойствах соответствующих им римановых поверхностей и множеств. Понятие римановой поверхности, введенное в замечательной работе Б. Римана [319], лежит в основе многих классических исследований геометрической теории функций. Плодотворное развитие этого направления связано с работами Ф. Клейна, А. Пуанкаре, П. Кебе [316]. Строгое очертание теория римановых поверхностей получила лишь после развития теории топологических многообразий на основании понятия абстрактной римановой поверхности, которое было предложено Г. Вейлем [326].

Дальнейшее проникновение топологических методов в теорию функций связано с работами Каратеодори и Кебе [269] по теории

простых концов. Топологический аспект этой теории, ее связь с конформно инвариантными компактификациями области глубоко изучены в последние десятилетия в работах Г.Д. Суворова и его учеников [152, 185, 207, 208].

С. Стоилов [205, 206] выделил топологический класс отображений, которые полностью описывают топологические характеристики голоморфных отображений одного комплексного переменного. Его известная теорема утверждает, что произвольное внутреннее (т. е. открытое и нульмерное) отображение одного двумерного ориентируемого многообразия на другое есть суперпозиция гомеоморфизма и мероморфного отображения; в частности, прообраз любой точки есть изолированное множество, причем вблизи каждой точки характер ориентации отображения один и тот же. Соединение идей С. Стоилова с идеями Г. Бора, Г. Лумана, Д.Е. Меньшова [259, 292, 301] позволило Ю.Ю. Трохимчуку [213, 214] построить стройную теорию множеств моногенности произвольных непрерывных функций на комплексной плоскости и, опираясь на нее, найти минимальные локально геометрические условия аналитичности функций. Многомерные аналоги этой теории построены в работах А.В. Бондаря и его учеников В.И. Сирика и В.Ю. Романенко [25–27, 192, 199]. Описание множеств моногенности липшицевых функций, существенно использующее многозначные отображения, получено автором и М. Атабаевым [109, 110].

При исследовании изолированных критических точек функций широко привлекается топологический аппарат теории Морса [166, 176] в вещественном случае и теории Пикара–Лефшеца [15] — в комплексном.

Проблема подсчета вычетов, начало исследования которой в многомерном случае положено А. Пуанкаре [316], а потом продолжено в работах А. Мартинелли [300], А.П. Южакова [245], А.К. Циха [237], использует двойственность Александера–Понтрягина, понятие степени отображения и другие топологические идеи.

Глубокое проникновение топологических методов в теорию функций многих комплексных переменных основано на аппарате теории пучков, который позволил придать теории Ока–Картана современную форму. На этом фундаменте основаны работы Г. Грауэрта и Р. Реммерта [277] по комплексным аналитическим пространствам. Достижения локальной теории комплексно аналитических множеств описаны в известных монографиях М. Эрве, Р. Ганнинга и Х. Росси

[248, 47]. Важнейшие достижения в геометрическом подходе к теории комплексных аналитических множеств и описание их глобальных свойств изложены в монографии Е.М. Чирки [240]. Граничное поведение аналитических множеств исследовалось С.И. Пинчуком [182].

Сравнительно новая ветвь выпуклого анализа, имеющая важные приложения в теории экстремальных задач и использующая топологический аппарат, посвящена изучению многозначных отображений: В.В. Береснев [20], Б.Н. Пшеничный [187–189], А.Д. Иоффе и В.М. Тихомиров [137]. Однако перенесение многих результатов выпуклого анализа на комплексный случай встречает ряд трудностей, основная из которых та, что комплексная гиперплоскость в многомерном комплексном пространстве не разбивает пространства.

Цель монографии — исследование ряда задач анализа, при которых естественно возникают многозначные отображения. Решения части этих задач позволяют перенести некоторые результаты выпуклого анализа на комплексный случай.

Работа в основном посвящена исследованию линейно выпуклых и сильно линейно выпуклых множеств. Линейная выпуклость при $n = 2$ впервые была введена в 1935 г. в работе Беенке и Пешля [257] и начала широко использоваться, благодаря работам А. Мартино и Л.А. Айзенберга [296, 3] с 60-х годов. Определения линейной выпуклости, данные Мартино и Айзенбергом, немного отличаются друг от друга, но если не ограничиваться областями и связными компактами, то определение из [3] выделяет одну связную компоненту множества, задаваемого определением из [296]. В монографии используется определение А. Мартино. Пример 15.3 представляет собой линейно выпуклый компакт, состоящий из счетного числа компонент, каждая компонента которого будет (по определению) линейно выпуклой по Айзенбергу и только одна из компонент — линейно выпукла. Аналогичный пример линейно выпуклого компакта, состоящего из конечного числа компонент, легко получить, если в построении примера 15.3 ограничиться конечным количеством шагов. Другой пример можно найти в [8]. В § 15 построен пример линейно выпуклого компакта, для которого никакая из компонент не является линейно выпуклой (этим решена положительно задача 30.1) [73].

Предложения 2.2–2.5, 2.8, 2.9, 2.12–2.16, 2.25–2.30 получены Л.А. Айзенбергом [3], в монографии для некоторых из этих предложений приводятся новые доказательства. Предложения 2.19–2.22 впервые установлены автором в [83], а предложение 2.10 — в [339].

Важная и часто используемая в дальнейших рассуждениях теорема 3.1 получена Е.Г. Скляренко [200] как обобщение сформулированного ниже классического результата Вьеториса–Бегла.

Пространство X называется ацикличным, если:

1) X непусто;

2) $H^q(X) = 0$ для всех $q \geq 1$;

3) $H^0(X) \approx \mathbb{Z}$.

Другими словами, пространство ациклично, если его когомологии совпадают с когомологиями одноточечного пространства. Отображение пар $f : (X, A) \to (Y, B)$ называется вьеторисовским, если:

1) f — собственное отображение;

2) $f^{-1}(B) = A$;

3) множество $f^{-1}(y)$ ациклично для всех $y \in Y$.

Теорема 30.1 (Вьеториса–Бегла). *Пусть X, Y — компактные пространства. Если $f : X \to Y$ — вьеторисовское отображение, то индуцированное отображение $f^* : H^*(Y) \to H^*(X)$ является линейным изоморфизмом* [322].

Результаты § 3 получены в [339], а § 4 — в [98]. Впервые линейно выпуклые множества применялись в разложениях голоморфных функций в ряды простейших дробей [3]

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_{jk}}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(a^p_{j_1} z_1 + \cdots + a^p_{j_n} z_n + b^p_j\right)}, \tag{31.1}$$

где $\sum\limits_{m=1}^{n} |a^p_{jm}|^2 = 1$, $j = 1, \ldots, n$, $p = 1, 2, \ldots$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |A_p| < \infty$, и в разделении особенностей голоморфных функций [1]. Понятие линейной выпуклости оказалось удобным и эффективным инструментом во многих задачах комплексного анализа.

Для функций, голоморфных в регулярной линейно выпуклой области $D = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \Phi(z, \overline{z}) < 0\}$, существует простое интегральное представление [1]

$$f(z) = \int\limits_{\partial D} f(\xi) \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w^k dw[k] \wedge d\xi}{(1 - \langle z, w \rangle)^n}, \tag{31.2}$$

где $w = (w_1, \ldots, w_n), dw[k] = dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{k-1} \wedge dw_{k+1} \wedge \cdots \wedge dw_n$,

$$w_i = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}(\xi)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}(\xi)}.$$

Сопряженные и линейно выпуклые множества применялись при обобщении на ряды от нескольких переменных метода суммирования Бореля [9], при установлении многомерного аналога теоремы Пойа о связи роста целой функции с расположением особенностей функции, ассоциированной с ней по Борелю [142], при изучении множества решений однородного уравнения в свертках [224] и решении некоторых других задач [4–6, 222]. Близкие вопросы, метрические характеристики множеств и их связи с характеристиками проекций в вещественном случае изучались В.П. Голубятниковым [54–58].

Линейно выпуклая оболочка E^{**} произвольного множества E строится довольно абстрактно. В каждом конкретном случае интересно было бы дать удобно проверяемый критерий того, что точка $z \in \mathbb{C}^n \backslash E$ не входит в линейно выпуклую оболочку множества E (*задача 30.1*). Для случая двух шаров K_1, K_2 с центрами, равноудаленными от начала координат, Г. Худайберганом [234] найдено соотношение радиусов шаров, при которых Θ принадлежит линейно выпуклой оболочке множества $E = K_1 \cup K_2$.

В связи с этим результатом интересен следующий вопрос.

Задача 30.2 (о тени). Какое минимальное число попарно непересекающихся шаров с центрами на сфере S^{n-1} достаточно чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Решение, предложенное в [234] для $n > 2$, ошибочно.

Результаты §§ 5, 6 получены автором в [77]. Взаимнооднозначные (не обязательно непрерывные) отображения, сохраняющие выпуклые множества, растяжения или углы, исследовались в работах А.В. Кузьминых [144–146]. Представляет интерес рассмотрение аналогичных вопросов в комплексном случае. Различные критерии мебиусовости отображения изучались Ю.Г. Решетняком [190], В. Асеевым и Кергиловой [18, 253, 254].

Хотя линейно выпуклые множества обладают многими достоинствами выпуклых множеств и в их терминах был решен целый ряд интересных задач комплексного анализа, это еще слишком большое

расширение класса выпуклых множеств. Для получения содержательных результатов необходимо было ограничиться более узким (на классе областей и компактов) классом сильно линейно выпуклых множеств, который изучается в главе II. Наиболее ярко свойства таких множеств проявились при описании пространства линейных непрерывных функционалов $H'(E)$ на пространстве функций $H(E)$, голоморфных в области или на компакте $E \subset \mathbb{C}^n$.

В случае функций одного комплексного переменного известная двойственность Кете–Гротендика–Себастьяо–Сильвы устанавливает изоморфизм пространства $H'(E)$ (где E — область или компакт в $\mathbb{C}^n$) с пространством $H(\overset{o}{\mathbb{C}^n}\setminus E)$ функций, голоморфных в дополнении к E. Согласно теореме Осгуда–Брауна [241], голоморфные функции многих комплексных переменных не могут иметь изолированных особенностей и, следовательно, не существует прямого аналога указанной двойственности.

А. Мартино [299] заметил, что если использовать сопряженное множество как аналог внешности, то можно установить аналогичную двойственность. Первые результаты по такой двойственности получены им для выпуклых областей и компактов и распространены Л.А. Айзенбергом на линейно выпуклые множества, удовлетворяющие некоторым условиям регулярности [2]. Позже А. Мартино назвал компакты и области, для которых справедлива двойственность $H(E) \approx H'(E^*)$, сильно линейно выпуклыми. Свойства сильной линейной выпуклости изучались в работах В.М. Трутнева [221–223], Л.Я. Макаровой [154–156], С.В. Знаменского [125, 127–131] и Л.Н. Знаменской [134–136]. В частности, С.В. Знаменским установлено, что сильная линейная выпуклость по Мартино для области эквивалентна тому, что пересечение ее всякой комплексной прямой связно и односвязно [125].

Отметим, что если D — сильно линейно выпуклая область, то функции, голоморфные в D и непрерывные на $\bar{D}$, допускают простое интегральное представление через свои значения на границе ∂D. Оно следует из формулы Коши–Фантаппье [7].

Сильно линейно выпуклые множества нашли применение при решении ряда задач многомерного комплексного анализа: разложения голоморфной функции на дроби более простого вида, чем (31.1),

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{(a^p_{p_1} z_1 + \cdots + a^p_{p_n} z_n + b_p)^n}, \tag{31.3}$$

где $\sum\limits_{m=1}^{n} |a_{pm}|^2 = 1$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |A_p| < \infty$ [3, 223], и в обобщенный ряд Лорана [222], при разделении особенностей [1, 223].

В работе А.П. Южакова и В.П. Кривоколеско [246] для ограниченных линейно выпуклых областей с гладкой границей показано, что они гомеоморфны шару, более того, что их сечения прямыми связны и односвязны, т. е. они сильно линейно выпуклы согласно цитируемому выше результату. Аналогичные результаты с некоторыми ослаблениями к требованию гладкости границы получены Л.Я. Макаровой [153]. В неограниченном случае было известно, что этот результат, вообще говоря, неверен.

В работах Х. Киселмана [286] и Л. Хермандера [280] исследуются возможности некоторого ослабления порядка гладкости границы области, при выполнении которого, заключение о сильной линейной выпуклости останется справедливым.

Полная топологическая классификация линейно выпуклых областей с гладкой границей, излагаемая в § 7, получена автором в [90]. Доказательство теоремы 7.3 изложено по работе А.П. Южакова и В.П. Кривоколеско [246], где оно приведено для случая ограниченной области. Этот случай подробно изучен в [246]. Разные обобщения данного результата — снятие ограничительного условия на гладкость во всех точках границы — получены Л.Я. Макаровой [153]. В ее работе допускалась негладкость границы на некоторых подмножествах $A \subset \partial D$. Теорема 7.7 включает в себя случаи, рассмотренные в [153], и усиливает их даже для ограниченных областей.

Результаты § 8 носят вспомогательный характер и используются при доказательстве линейной выпуклости сильно линейно выпуклых компактов и критериев выпуклости.

Теорема 9.1 получена в [86]. Вещественный аналог этой теоремы — теорема Ауманна [255] — утверждает выпуклость компакта, если его сечения всеми вещественными k-плоскостями ацикличны; для областей в вещественном евклидовом пространстве такой же результат получен Е. Щепиным [244]. Эта параллель показывает близость свойств сильно линейно выпуклых и выпуклых множеств. Заметим, что уже для линейно выпуклых множеств из линейной выпуклости сечений не следует линейная выпуклость множества. Это очевидно при $k = 1$, так как произвольное плоское множество линейно выпукло. С другой стороны, не известно, будет ли линейно выпуклым множеством $E \subset \mathbb{C}^n$, сечения которого k-плоскостями, $k \geq 2$, будут

линейно выпуклыми (*задача 30.3*). Однако, по-видимому, ответ на этот вопрос отрицателен (см. пример 30.1, комментирующий результаты § 16).

Теорема 10.1 доказана автором [86, 322]. Из нее следует теорема 10.2, дающая подтверждение одной из гипотез, изложенных в [2]. Отметим гипотезу и задачу из [2], которые до сих пор остались нерешенными.

Задача 30.4. Описать линейно выпуклые области (компакты), которые можно аппроксимировать изнутри (извне) ограниченными линейно выпуклыми областями с дважды гладкими границами.

Гипотеза 30.1. Ограниченная область (компакт) является сильно линейно выпуклой (выпуклым) тогда и только тогда, когда существует аппроксимация этой области (компакта), указанная в задаче 30.4.

В [135] показано, что сечения и проекции сильно линейно выпуклых множеств должны быть спирально связными. Отсюда сразу следует контрпример к гипотезе 30.1 для компактов, ведь ациклический компакт, лежащий в комплексной прямой, не обязан быть спирально связным и, следовательно, он не может быть аппроксимирован извне последовательностью сильно линейно выпуклых областей в комплексном пространстве размерности больше единицы. Поэтому в гипотезе для компактов нужно исследовать компакты, не лежащие в комплексной прямой, или компакты, которые априори удовлетворяют условию спиральной связности. Примеры 10.3, 10.4 построены в [134]. Они дают решения задач 30.5, 30.6, соответственно, из [73].

Сформулируем и другие задачи для линейно выпуклых множеств.

Задача 30.5. Пусть D — ограниченная сильно линейно выпуклая область с гладкой границей класса C^r. Определить класс гладкости границы проекций D на прямые.

Задача 30.6. Если D — область с гладкой границей, будет ли D^{**} областью с гладкой границей?

Теоремы 11.1 и 11.3 доказаны в [84]. Теорема 11.2 принадлежит Л.Я. Макаровой [154]. А. Мартино был установлен частный случай теоремы 11.3 [299] для компактов, лежащих в $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Результат § 12 связан с намерением автора показать, что сильно линейно выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$ (отличный от выпуклого) и содержащий $n+1$ аффинно независимую точку имеет непустую внутренность. Оказалось, что это предположение, в отличие от вещественно-

го случая, неверно (пример 12.1), однако для почти всех проекций (за исключением, может быть, одной) образ проекции имеет непустую внутренность (теорема 12.1). Доказательство существенно использует теорему 11.1.

Пример 13.1 и теорема 13.2 получены В.П. Кривоколеско и А.П. Южаковым [246], теорема 13.1 — Б.С. Зиновьевым [123]. Пример 13.2 построен В.А. Степаненко [204]. Некоторые обобщения таких результатов на гиперкомплексный случай сделаны Г.А. Мкртчяном [167–172]. То, что из локальной линейной выпуклости, в случае неограниченной области с гладкой границей не следует глобальная линейная выпуклость, показано автором в [91]. Аналоги теоремы 13.1 (аналитические условия обобщённой локальной выпуклости) для гиперкомплексного случая и для Клиффордовых пространств получены в работах [179–181].

Третья глава продолжает исследования сильно линейно выпуклых множеств. Здесь показано, что ряд классических теорем анализа, в подходящей интерпретации, останется справедливым, если выпуклость заменить на сильную линейную выпуклость. Известные комплексные варианты теоремы Хана–Банаха, например [34, с. 136], исходили из того, что существует вещественная гиперплоскость, не пересекающая исходного выпуклого множества. В случае сильной линейной выпуклости такой вещественной гиперплоскости нет, но, оказывается, есть комплексная гиперплоскость, что обеспечивает решение задачи.

В § 14 устанавливается комплексный вариант геометрической формы теоремы Хана–Банаха, которая впервые доказана автором [106].

Вопрос 30.1. Следует ли условие б) определения 14.1 из условия а)?

Для произвольного множества E можно найти его линейно выпуклую оболочку, т.е. минимальное линейно выпуклое множество E^{**}, содержащее его. Если же попытаемся найти сильно линейно выпуклую оболочку, то столкнемся с вопросом неединственности. Если сечения множества прямыми несвязны, то нет единственного ацикличного минимального множества, содержащего это сечение. Даже если сечения связны, то после присоединения к сечению ограниченных компонент дополнения, вообще говоря, не получается линейно выпуклое множество. Построение комплексной оболочки, приведенное здесь, основано на соображениях, позволяющих, с од-

ной стороны, максимально приблизить вновь полученное множество к сильно линейно выпуклым множествам, с другой — сохранить линейную выпуклость.

Результаты § 15 получены автором и его учениками и частично опубликованы в [88]. Отметим, что c-оболочки компактов будут всегда полиномиально выпуклыми компактами, но, вообще говоря, не будут сильно линейно выпуклыми множествами.

Комплексный анализ теоремы Кли получен в [175].

Вопрос 30.2. Верна ли теорема 15.4 для сильно линейно выпуклых компактов в комплексных топологических векторных пространствах?

Было бы интересно, в связи с результатами § 15, ввести понятие экспонированных точек (точек множества для которых пересечение множества и опорной к нему плоскости состоит из одной точки) и получить аналог теоремы Страшевича [150] о представлении c-оболочки через множество таких точек. Сложность вопроса в комплексном случае в отсутствии пока хороших аппроксимационных теорем. Вопрос аппроксимации линейно выпуклых множеств множествами такого же класса, но с дополнительными условиями регулярности границы, некоторые попытки изучения которого сделаны в конце § 15 и работах [42, 46], упирается в неизученный массив задач относительно строения гиперпространства линейно выпуклых множеств и плотных в нем подмножеств. Здесь желательны результаты, похожие на исследования Л. Базилевич [19], но трудность комплексного случая, в отличие от вещественного анализа, в нелинейной структуре таких гиперпространств. Неясно также как по двум (сильно) линейно выпуклым множествам построить некий аналог суммы Минковского [150], играющей важную роль в выпуклом анализе.

Варианты исследования экстремальных точек, предпринятые в [267, 309, 310], заслуживают внимания на предмет их обобщения на комплексный случай.

Исследования § 16 связаны, с одной стороны, с желанием получить геометрическое доказательство (не зависимое от того, что линейно выпуклый компакт приближается областями голоморфности [3]) тривиальности групп когомологий линейно выпуклого компакта в размерностях, больших n. С другой стороны, они вызваны пожеланиями С.Г. Гиндикина, высказанными автору на одной из конференций, получить оценки групп когомологий q-линейно выпуклых компактов, дополнения к которым будут q-линейно вогнуты-

ми областями, решение $\overline{\partial}$-проблемы в которых исследовалось в [53]. Задача решается в общей постановке для компактов в евклидовом пространстве, что позволяет одновременно: ответить на упомянутые выше вопросы, оценить группы когомологий гиперкомплексно выпуклых компактов, введенных Г.А. Мкртчяном [169], дать оценку групп когомологий для конечных объединений перечисленных объектов. Результаты данного параграфа опубликованы в [100].

Из теоремы 16.3 и следствия 16.2 получаем, что для линейно выпуклого компакта $K \subset \mathbb{C}^n$, у которого K^* связно, $H^j(K) = 0$ при $j \geq n$. С другой стороны, строя декартовы произведения $\underbrace{K \times \cdots \times K}_{m} \subset \mathbb{C}^{2m}$, где K — компакт из примера 3.1, легко убедиться, что существуют линейно выпуклые компакты $K \subset \mathbb{C}^{2m} \subset \mathbb{C}^n$ со связным множеством K^*, для которых $H^m(K) \neq 0$, где $m = [n/2]$.

Вопрос 30.3. Существует ли линейно выпуклый компакт $K \subset \mathbb{C}^n$, удовлетворяющий условию, что K^* связно, и для которого $H^j(K) \neq 0$ для какого-нибудь j, где $[\frac{n}{2}] < j < n$?

Отметим, что при изучении m-выпуклых множеств, $m < n-1$, нельзя использовать сопряженное множество или поляру, так как грассманово многообразие m-плоскостей в $\mathbb{R}^n$ уже не будет n-мерным многообразием.

В работах [117, 348] изучен подход к m-выпуклости через изучение свойств обобщённо выпуклых множеств на грассмановых многообразиях. Скажем, что пара многообразий (M, M^*) порождает (n,m)-выпуклость, если одно из этих многообразий — евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а другое — некомпактное грассманово многообразие $G'(m,n)$ m-плоскостей в $\mathbb{R}^n$ [193]. Очевидно, что существует естественное соответствие между этой парой многообразий, а именно: каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ соответствует компактное подмногообразие $l(x) = G(n,m) \subset G'(n,m)$, которое представляет собой грассманово многообразие m-плоскостей, проходящих через точку x, а каждой точке $y \in G'(n,m)$ соответствует m-плоскость $l(y)$ в $\mathbb{R}^n$. Далее m-плоскостями в грассмановом многообразии считаем подмногообразия $l(x)$. Естественно множество будем называть (n,m)-выпуклым, если через каждую точку его дополнения проходит m-плоскость, которая множество не пересекает. Для таких множеств в [117, 348] установлены свойства, аналогичные результатам § 2. Поскольку в евклидовом случае (n,m)-выпуклое множество будет m-выпуклым, то очевидна его $(n, m-1)$-выпуклость.

Вопрос 30.4. Будет ли $(n, m-1)$-выпуклым (n, m)-выпуклое подмножество грассманового многообразия?

Очевидно, как естественно ввести аналогичную выпуклость на комплексных и гиперкомплексных грассмановых многообразиях.

Отметим также, что другой подход к определению выпуклости на подмножествах грассмановых многообразий предложен в [275, 276], однако предложенные там методы трудно перенести на комплексный или гиперкомплексный случай.

Понятие m-выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$, $0 \leq m < n$, позволяет с единой точки зрения взглянуть на некоторые обобщения выпуклости, в том числе и на линейную выпуклость, которая подробно изучается в монографии. Из других обобщений упомянем гиперкомплексную выпуклость [167–172] и сильную гиперкомплексную выпуклость. В силу некоммутативности поля квартернионов, Г.А. Мкртчяну приходится различать соответственно право- и левовыпуклые множества. Здесь установлен ряд обобщений результатов линейной выпуклости. Показано, что: 1) в гладком случае из локальной гиперкомплексности следует глобальная [167]; 2) из сильной гиперкомплексной выпуклости компакта следует его гиперкомплексная выпуклость [172].

Изучение свойств $(n-1)$-выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ проводилось В.Л. Мельник [160–165], а при некоторых дополнительных условиях — А.И. Герасиным [48–51].

Отметим интересную гипотезу для m-выпуклых множеств.

Гипотеза 30.2. Если K — m-выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и $H^j(K) \neq 0$, то в каждом целочисленном полуинтервале $(0; n-m-1], (n-m-1; 2(n-m-1)], \ldots, (j(n-m-1); i]$ существует целое число k такое, что группа $H^k(K) \neq 0$, где $(j+1)(n-m-1) \geq i$?

Пример 16.2 является моделью, которая косвенно подтверждает справедливость гипотезы. Частными случаями этой гипотезы будут следующие два вопроса.

Вопрос 30.5. Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклый компакт с нетривиальной группой когомологий $H^i(K) \neq 0$. Верно ли, что группы когомологий $H^j(K)$ тоже нетривиальны для всех j, $0 < j < i$?

Для всех известных примеров это справедливо.

Вопрос 30.5а (*проблема сферы*). Существует ли линейно выпуклый компакт в $\mathbb{C}^2$ (или 2-выпуклый компакт в $\mathbb{R}^4$), все группы когомологий которого совпадают с соответственными группами двумерной сферы?

Существование такого компакта было бы контрпримером к гипотезе 30.2 и вопросу 30.5.

Вопросы линейно выпуклого вложения множества в комплексное пространство тесно переплетаются со следующей задачей К. Борсука [31], когда компакт K можно вложить в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ так, чтобы произвольная вещественная k-плоскость пересекала его не более чем по $k+1$ точке (такие вложения называются k-регулярными). В этом направлении получено ряд оценок [22–24, 195].

Задачу К. Борсука можно обобщить. Введем несколько определений.

Определение 30.1. Вложение компакта K, $\dim K = n$, в $\mathbb{R}^m$ назовем k-нульмерно-регулярным, если всякая k-плоскость пересекает K по не более чем нульмерному множеству.

Задача 30.7. Найти наибольшее m_0, такое, что никакой компакт размерности n не вкладывается k-нульмерно-регулярно в $\mathbb{R}^n$ при $n < m_0$.

Введем обозначения: $m_0(n,k)$ — максимум m_0 для k-регулярных вложений; $M_0(n,k)$ — максимум m_0 для k-нульмерно-регулярных вложений.

Легко устанавливаются соотношения

$$\begin{gathered}
m_0(n,k) \geq M_0(n,k),\\
m_0(n,k) \leq m_0(n,k+1), \quad m_0(n,k) \leq m_0(n+1,k),\\
M_0(n,k) \leq M_0(n,k+1), \quad M_0(n,k) \leq M_0(n+1,k),\\
M_0(n,k) \geq \max(n+1,k+1) \quad \text{при } n>0,\ k>0,\\
M_0(n,0) = m_0(n,0) = n, \quad M_0(0,k) = m_0(0,k) = k.
\end{gathered}$$

В [85] показано, что $M_0(n,k) \leq n(k+1)$. Более точные оценки автору не известны.

Определение 30.2. Назовем вложение компакта K в $\mathbb{R}^m$ k-ациклично-регулярным, если для произвольного сечения k-плоскостью L

$$H^i(K \cap L) = 0, \quad 0 < i < k.$$

Искать, аналогично задаче 30.9, максимум m_0 для произвольного компакта не имеет смысла, так как каждый единичный диск вложен в $\mathbb{R}^n$ k-ациклично-регулярно. Поэтому представляет интерес нахождение минимума для компактов с дополнительными условиями.

Задача 30.8. Найти минимальное $m = N(n,k)$, при котором существует компакт со свойством $H^n(K) \neq 0$, который вкладывается в $\mathbb{R}^m$ k-ациклично-регулярно.

Некоторые оценки чисел $N(n,k)$:

$$N(n,1) = n+1, \quad (n+1)(k+1) \geq N(n,k) \geq n+k, \quad N(1,k) = k+1$$

получены в [85].

Задача 30.9. Решить задачу 30.7 в классе компактов с $H^n(K) \neq 0$.

П р и м е р 30.1. Пусть $K = \{(x,y,z) \,|\, x = \cos z,\ y = \sin z\}$ — винтовая линия в $\mathbb{R}^3$. Легко проверить, что любое сечение K вещественной двумерной плоскостью γ содержит конечное число точек и поэтому будет 1-выпуклым в γ. Однако K не будет 2-выпуклым в $\mathbb{R}^3$, иначе, в силу связности K, оно должно бы быть выпуклым.

Пример 30.1 дает косвенное подтверждение того, что линейная выпуклость сечений может еще не обеспечить линейной выпуклости множества. Однако аналога примера 30.1 для линейно выпуклых множеств автор не знает. В связи с этим примером интересен следующий вопрос.

Пусть для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ сечения его произвольной вещественной l-мерной плоскостью будут m-выпуклыми, $n > l > m \geq 0$. Очевидно, что K также будет m-выпуклым. При каких дополнительных ограничениях на l и m K будет по крайней мере $(m+1)$-выпуклым? (*Задача 30.10*).

В приведенном понятии m-выпуклого множества рассматривалось определение обобщенной выпуклости с помощью существования не пересекающей множество m-плоскости (внешнее определение). С другой стороны, для обобщения выпуклости можно, как при определении выпуклости или сильной линейной выпуклости, пользоваться ограничениями на сечения исходного множества (внутреннее определение). В этом направлении, а также в направлении связи между различными выпуклостями, почти нет результатов. Некоторые попытки установить такие связи изложены в [97].

Описание глобальных свойств множества по свойствам его пересечений с некоторым семейством выделенных множеств можно считать геометрической ветвью интегральной геометрии. Интегральная геометрия связывает в один узел вопросы анализа (выпуклого, комплексного), геометрии и теории вероятностей. Первые исследования геометрических вероятностей начались в связи с хорошо известной

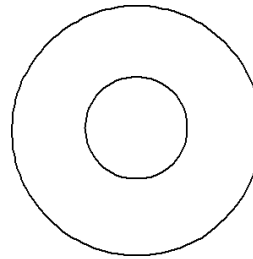


Рис. 11.

проблемой Бюффона об игле и связанными с ней парадоксами Бертрана.

Рассмотрим чуть подробнее суть этих парадоксов. Пусть известно, что игла, которую будем рассматривать, как вещественную прямую, пересекает круг $B \subset \mathbb{R}^2$, лежащий в евклидовой плоскости. Какова вероятность, что эта игла пересечет меньший концентричный круг $B_1 \subset B$ (рис. 11)?

Пусть имеем следующее соотношение радиусов кругов $R = r_B = 2r_{B1}$. В этом случае задача эквивалентна следующей: найти вероятность того, что хорда, привязанная к точке границы, будет длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника. На первый взгляд, задача имеет несколько возможных решений.

Первое решение. Выберем на граничной окружности две точки и измерим расстояние между ними. Очевидно, что существенным здесь будет положение второй точки по отношению к первой. Выбор первой точки A может быть произвольным. Если мы ее зафиксируем, то нам достаточно рассматривать только хорды, исходящие из нее. В этом случае, очевидно, что только треть хорд имеют длину больше стороны вписанного равностороннего треугольника. Отсюда искомая вероятность равна $1/3$ (рис. 12).

Второе решение. Длина хорды однозначно определяется положением ее центра в круге. Хорды длиной больше стороны вписанного равностороннего треугольника имеют центры внутри меньшего круга, радиус которого вдвое меньше радиуса исходного круга. Следовательно, его площадь равна четверти площади большего круга. Отсюда искомая вероятность равна $1/4$ (рис. 13).

Третье решение. Длина хорды однозначно определяется положением ее центра. Те хорды, длина которых больше стороны впи-

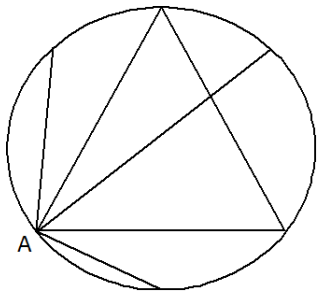


Рис. 12.

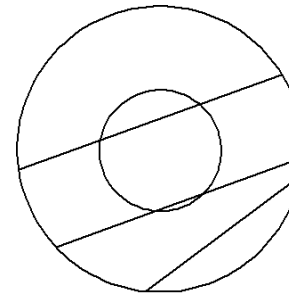


Рис. 13.

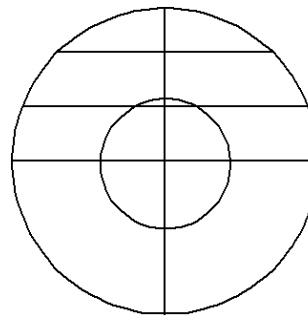


Рис. 14.

санного равностороннего треугольника, находятся на расстоянии от центра меньшем, чем половина радиуса большого круга. Если центры хорд распределены равномерно на радиусе (а не относительно площади, как во втором решении), то искомая вероятность равна $1/2$ (рис. 14).

Следовательно, если рассматривать иглу как вещественную прямую, то задача сводится к поиску инвариантной относительно движений меры множества. Вопросы интегральной геометрии, связанные с мерой (особенно вещественный случай), подробно изучены в монографиях [13, 159, 196]. Хорошо известно, что для плоских выпуклых множеств такой инвариантной мерой будет длина их периметра и, следовательно, в случае кругов для подсчета вероятности имеем формулу

$$p = \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{r}{R}.$$

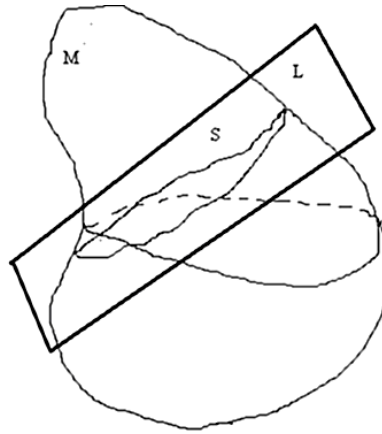


Рис. 15.

Обобщение этой конструкции на высшие размерности приводит к рассмотрению семейств линейных подмногообразий евклидова пространства, которые пересекают исходное множество. Вещественный случай хорошо исследован. В случае комплексных и более общих пространств, как отмечено в [196], ситуация далека от завершения.

Некоторые задачи этой тематики тесно связаны с широко известной проблемой Улама из Шотландской книги [335].

Проблема Улама. Пусть M^n — n-мерное многообразие в евклидовом пространстве и каждое сечение M^n произвольной гиперплоскостью L гомеоморфно $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1}. Верно ли, что M^n есть n-мерная сфера (рис. 15)?

Решение этой проблемы получено А. Косинским в 1962 г. [335]. Повторение этого результата есть в Л. Монтехано в 1990 г. [302]. Изучение геометрических и топологических свойств множеств по известным сечениям линейными подмножествами изложено в предыдущих главах. Однако задачу можно обобщить, рассматривая не только сечения линейными подмножествами, а и другими семействами множеств. Выделим здесь следующую проблему, известную в литературе как проблема Мизеля.

Проблема Мизеля (характеризация окружности). Будет ли окружностью выпуклая кривая в двумерной евклидовой плоскости, если из того, что на ней лежат три вершины произвольного пря-

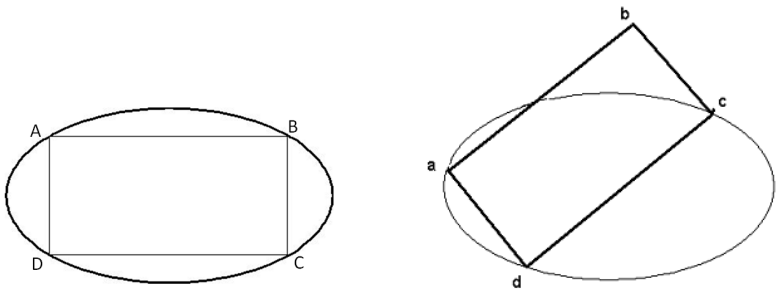


Рис. 16.

моугольника, следует, что четвертая вершина прямоугольника тоже лежит на ней (рис. 16)?

Эта проблема решена положительно А. Безиковичем в 1961 году [268]. Модифицированные доказательства этого утверждения изложены в работах Л. Данцера [271], А. Ватсона [325], В. Коэнена [290], К. Нэш-Вильямса [311].

В 1989 году Т. Замфиреску [327] доказал похожий результат для жордановой кривой (априори не выпуклой) и для прямоугольника с инфинитезимальным отношением сторон

$$\left|\frac{ad}{ab}\right| \leq \varepsilon > 0.$$

В 2006 году М. Ткачук [211, 212] получил наиболее общий результат в этой области. Он показал, что проблема Мизеля справедлива для произвольного компакта $C \subset \mathbb{R}^2$, который разбивает плоскость.

Естественно, что требование компактности необходимо, иначе прямая линия удовлетворяет требуемому условию. Если же не требовать разбиения плоскости, то многие из следующих множеств, например: множество из трех точек на плоскости, которые не являются вершинами прямоугольного треугольника; собственная дуга полуокружности или множество точек плоскости с рациональными (иррациональными) координатами, тоже подходят.

В связи с отмеченной проблемой возникает ряд других проблем, тесно связанных с ней и с тематикой настоящей книги.

Задача 30.11. Пусть C — такая замкнутая жорданова кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$, что для произвольной алгебраической замкнутой кривой L порядка n из свойства "пересечение $C \cap L$ содержит m точек"

следует, что $C \cap L$ содержит не менее чем $m+1$ точек. Существует ли такое число m, что выполнение указанного условия влечет за собой то, что C будет алгебраической кривой порядка n?

Задача 30.12. Пусть в предыдущей задаче кривая L будет окружностью и $m = 3$. Верно ли, что C тоже будет окружностью?

Задача 30.13. Пусть в задаче 30.11 кривая L будет эллипсом и $m = 5$. Верно ли, что C тоже будет эллипсом?

Задача 30.14. Будет ли сферой компакт C в $\mathbb{R}^n$, если C разбивает пространство и из принадлежности компакту C $n+1$ вершины произвольного прямоугольного параллелепипеда следует, что, как минимум, еще одна его вершина тоже лежит на C? Последняя задача интересна даже в случае, когда C будет $(n-1)$-мерным многообразием или границей выпуклого множества.

Задача 30.15. Пусть C будет $(n-1)$-мерным многообразием (или границей выпуклой области) в $\mathbb{R}^n$ и не существует $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1} такой, что пересечение $C \cap S^{n-1}$ содержит ровно $n+1$ точку. Верно ли, что C есть $(n-1)$-мерная сфера?

Следующий пример показывает, что в задачах 30.12, 30.13 нельзя вместо кривой, по аналогии с результатом Ткачука, исследовать компакт, разбивающий плоскость.

П р и м е р 30.2. Рассмотрим замкнутую область $\overline{D}$ на плоскости, ограниченную окружностью S^1. Вырежем из неё всюду плотное в D бесконечное множество открытых кругов D_i, которые попарно не пересекаются, не имеют общих точек границы и не касаются окружности S^1. Мы получим фрактальное компактное множество $K = \overline{D} \setminus \cup D_i$ типа "голландского сыра" без внутренних точек, которое разбивает плоскость на счетное количество компонент. Легко убедиться, что произвольная окружность может пересекать K или по единственной точке, или по бесконечному множеству точек (см. рис. 17).

Другие примеры получим, если области $D(D_i)$ будут областями, ограниченными эллипсами или квадратами (рис. 18). В этом случае пересечения с эллипсом или окружностью могут содержать одну, две, четыре или бесконечное множество точек, но никогда три точки. Одним из таких примеров будет ковер Серпинского. Эти примеры дают отрицательный ответ на проблему 8 из [335] о возможности замены в результате Ткачука вершин прямоугольника на пересечения с окружностью. Очевидно, как эти примеры можно обобщить на высшие размерности.

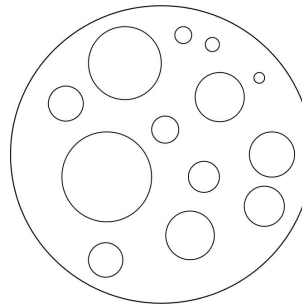


Рис. 17.

Задача 30.16. Будет ли верен результат Т. Замфиреску [327], если вместо жордановой кривой рассматривать компакт $C \subset \mathbb{R}^2$, который разбивает плоскость?

Задача 30.17. Будут ли цитируемые результаты и задачи 30.11-30.15 верными, если одна из точек пересечения должна принадлежать некоторому выделенному не всюду плотному в C подмножеству $E \subset C$? Какая минимальная мощность этого множества для верности задач?

П р и м е р 30.3. Пусть $C = F \cup S^1$, где S^1 — единичная окружность на плоскости, а F — произвольное компактное подмножество оси ординат, все точки которого удалены от начала координат больше чем на единицу. Если выделенное множество состоит из пары точек $E = (0,1) \cup (0,-1)$, то, очевидно, что компакт C удовлетворяет условию проблемы Мизеля для вершин прямоугольника, одна из вершин которого лежит на множестве E, но окружностью не является.

Из этого примера следует, что выделенное множество задачи 30.17 должно содержать не менее трёх точек или ограничиться исследованием компактов, которые априори есть жордановыми кривыми.

Другие связанные с этой проблемой задачи можно найти в работах [278, 335, 349].

В теореме 17.1 изучаются системы связных компактных множеств в $\mathbb{C}^n$, замкнутые относительно пересечений и комплексно аффинных преобразований. Показано, что такие системы состоят из выпуклых множеств. Аналогичный результат в вещественном случае установлен В.С. Рублевым [195]. Существенное отличие комплексного случая в том, что система не обязана содержать отрезки веще-

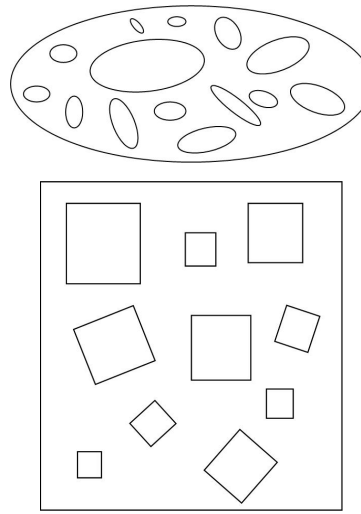


Рис. 18.

ственных прямых, соединяющих пары точек, принадлежащих подмножествам системы.

Задача 30.18. Пусть Σ — система множеств в $\mathbb{C}^n$, замкнутая относительно пересечений и такая, что все связные компоненты множества $A \in \Sigma$ — сильно линейно выпуклые множества. Описать такие системы.

Очевидно, что при $n = 1$ задаче удовлетворяет произвольный набор множеств, имеющих ацикличные компоненты, и их всевозможных пересечений. При $n > 1$ из примера 15.1 следует, что произвольный набор, состоящий из сильно линейно выпуклых множеств и их пересечений, уже не удовлетворит задачу.

Задача 30.19. Пусть Σ_0 — комплексно инвариантная подсистема системы Σ из задачи 30.18. Описать такие подсистемы.

В силу замкнутости Σ относительно пересечений, очевидна единственность минимального носителя. Теперь легко проверить, что минимальные носители: в теореме 17.1 — отрезок, соединяющий заданную пару точек; в замечании 17.1 — комплексная прямая через заданную пару точек.

П р и м е р 30.4. Пусть Σ — система всех шаров фиксированного радиуса r в $\mathbb{R}^2$ и их всевозможных пересечений. Легко убедиться, что

минимальный носитель пары точек a, b получается пересечением пары шаров, центры которых находятся на перпендикуляре к отрезку, соединяющему точки a, b.

Задача 30.20. Исследовать связь между системой Σ и минимальным носителем пары точек.

В главе IV перешли к изучению многозначных линейно выпуклых функций, графики которых задаются линейно выпуклыми множествами. Вещественные аналоги результатов данной главы подробно изучены в целом ряде монографий [137, 148, 188, 189]. Однако комплексные варианты не исследовались, так как они требуют по существу применения многозначных отображений и линейно выпуклых множеств. Их изучение уже нельзя редуцировать к однозначным отображениям. Это позволяет найти комплексный аналог выпуклых функций, хотя в [131] существование такого аналога ставилось под сомнение.

В § 18 вводятся понятия линейно выпуклых, опорных, индикаторных функций. Легко убедиться, что вводимые понятия в вещественном случае сведутся к надграфикам аналогичных объектов. Следовательно, они представляют собой естественное продолжение понятий выпуклого анализа на комплексный случай.

По аналогии с вводимым здесь понятием можно и в вещественном случае определить n-выпуклую (выпуклую) многозначную функцию $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, график которой будет n-выпуклым (выпуклым) множеством в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ряд результатов для n-выпуклых функций, аналогичных изучаемым здесь, исследован в [120].

П р и м е р 30.5. Пусть $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — функция, заданная соотношениями

$$F(x) = \begin{cases} [x], & x \geq 0, \\ -[|x|] - 1, & x < 0, \end{cases}$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Легко проверить, что заданная вещественная функция будет 1-выпуклой, так как для произвольной точки, не принадлежащей графику $\Gamma(F)$, существует вещественная линейная функция, проходящая через эту точку и не пересекающая $\Gamma(F)$.

Если же рассматривать непрерывную однозначную функцию $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, выпуклую в определенном выше смысле, то несложно убедиться, что такая функция непременно будет линейной.

Вопрос 30.6. Пусть $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — непрерывная однозначная линейно выпуклая функция. Верно ли, что F — линейная функция?

Если не требовать непрерывности, то не вызывающее трудностей обобщение примера 30.5 даст контрпример к вопросу.

В § 19 для произвольной многозначной функции определяется сопряженная к ней функция, которая уже будет линейно выпуклой. Впервые комплексный аналог теоремы Фенхеля–Моро опубликован в [92, 105]. Перед тем как задать правила дифференцирования многозначных функций комплексного переменного, в § 20 изучаются дифференциальные свойства вещественных многозначных функций со связными образами, заданных на отрезке. С разными способами введения дифференцирования многозначных отображений можно ознакомиться в обзоре [28].

В монографии предлагается такое понятие производной функции, при котором операция дифференцирования замкнута, т.е. не выводит из класса многозначных полунепрерывных сверху отображений со связными образами. Следовательно, все функции этого класса (в том числе и все однозначные непрерывные) будут бесконечное число раз дифференцируемы (в многозначном смысле, конечно).

Классическим способом можно показать, что на этот способ дифференцирования переносятся многие классические теоремы дифференцирования (теоремы Ферма, Дарбу, Ролля, Лагранжа, Коши) [226].

Некоторые идеи § 20 развиты В.Х. Хачатряном [229–232].

Изложенные в § 21 результаты являются первым приближением к построению теории (суб)дифференцирования линейно выпуклых функций. Желательно дальнейшее изучение этих вопросов и нахождение применения их к теории экстремальных задач.

В главе V автором и его учениками изучались вопросы, идеи которых навеяны предыдущими главами. Они тесно связаны с комплексной выпуклостью. Задача классификации обобщенно выпуклых множеств с гладкой границей в вещественном случае естественно возникла после получения аналогичного результата в комплексном варианте, описанного в седьмом параграфе. Теорема 22.1, которая устанавливает такую классификацию, установлена В.Л. Мельник в [164]. В § 23 изучены подмножества вещественного евклидового пространства (в их число входят и невыпуклые!) для которых справедлив аналог теоремы Хана–Банаха. Лемма 23.1 и теорема 23.1 получены А.И. Герасиным [49]. В §§ 24, 25 обобщены

классические теоремы выпуклого анализа, которые также относятся и к комбинаторной топологии. Уточнение теоремы Каратеодори — теорема 24.1 опубликована в [113]. Исследования, связанные с теоремой Хелли, получили толчок после оценок групп когомологий для линейно выпуклых множеств и их объединений и опубликованы в [107]. Это распространение теоремы типа Хелли на семейство выпуклых компактов в евклидовом пространстве, когда пересекается небольшое число компактов. В этом направлении заслуживает внимания обзорная статья Р.Н. Карасева [138]. Изложенные в ней результаты могут дать толчок для установления их комплексных аналогов.

На оценки линейно выпуклых по слоям множеств натолкнула описанная в § 22 классификация. Теорема 22.1 позволила получить в теореме 26.1 гомологическое описание границы послойно обобщенно выпуклой области с гладкой границей. Показано, что такая граница имеет топологический тип когомологической сферы. Результат получен совместно автором и М.В. Ткачуком [121]. Цель §§ 27, 28 показать, что в случае ацикличных компактов для справедливости результатов § 9 достаточно обладать информацией о сечениях компакта не всеми плоскостями, а только опорными. Эти результаты и результаты § 29 изложены согласно работеЁ[115]. Теорема 29.1 посвящена перенесению теоремы 11.1 на гиперкомплексный случай. Для ее получения пришлось применить более тонкие, чем в § 11, рассуждения относительно возможных пересечений пары компактов.

Отметим ряд важных результатов в этой тематике, не вошедших в монографию. В [127] приведен пример сильно линейно выпуклой области с неспрямляемой границей. В работе Н. Николова, П. Пфлюга, В. Звонека [312] построен пример ограниченной сильно линейно выпуклой области, которая не биголоморфно эквивалентна выпуклой области. Инвариантные расстояния и метрики на сильно линейно выпуклых областях, автоморфизмы бидисков и близкие к ним вопросы изучались в [270, 273, 282, 284, 291, 313, 317, 328]. Вопросы комплексной интерполяции Кергина, использующие линейную выпуклость, изучены в работе [252]. Другие нерешенные задачи, относящиеся к обобщённой выпуклости можно найти в работах [2, 67, 95, 128, 249, 250, 345, 347]. Заслуживает пристального внимания ряд работ [36, 138, 184, 267, 281, 293, 294, 302–308] на предмет обобщения этих результатов на комплексный случай.

§ 31. Приложение

Парой топологических пространств (X, A) называется пара, состоящая из топологического пространства X и его подпространства $A \subset X$. Отображением пар $f : (X, A) \to (Y, B)$ называется непрерывное отображение $f : X \to Y$, такое, что $f(A) \subset B$. Если подпространство A пусто $(A = \varnothing)$, то не будем различать пару (X, A) и пространство X.

Два отображения $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ называются гомотопными, если есть отображение (гомотопия)

$$h : \ (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \to (Y, B),$$

такое, что $h(x, 0) = f(x)$ и $h(x, 1) = g(x)$ для всех $x \in X$. Гомотопия называется изотопией, если для каждого t отображения $h(x, t)$ гомеоморфны.

Непрерывное отображение $g : Y \to X$ называется гомотопически обратным непрерывному отображению $f : X \to Y$, если композиции gf и fg гомотопны тождественным отображениям пространств X и Y соответственно. Непрерывное отображение, обладающее гомотопически обратным, называется гомотопической эквивалентностью. Гомотопическая эквивалентность разбивает топологические пространства на классы гомотопически эквивалентных пространств. Эти классы называются гомотопическими типами.

Пусть каждой паре (X, A) сопоставлено семейство абелевых групп $H^p(X, A)$, p — целое, а всякому отображению пар $f : (X, A) \to (Y, B)$ — семейство гомоморфизмов $f^* : H^p(Y, B) \to H^p(X, A)$. Далее, пусть для каждого пространства $A \subset X$ задан некоторый гомоморфизм $\delta : H^p(A) \to H^{p+1}(X, A)$. Эти три объекта H^p, f^*, δ должны удовлетворять следующим аксиомам.

Аксиома 1. Если $f : (X, A) \to (X, A)$ — тождественное отображение пространства X, то f^* — тождественное отображение группы $H^p(X, A)$.

Аксиома 2. Если $h = gf$, то $h^* = f^* g^*$.

Аксиома 3. Если f гомотопно g, то $f^* = g^*$.

Аксиома 4. Для любого отображения пар $f : (X, A) \to (Y, B)$

имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^p(B) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(Y,B) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H^p(A) & \xrightarrow[\delta]{} & H^{p+1}(X,A), \end{array}$$

т.е. $f^*\delta = \delta f^*$.

Аксиома 5. Пусть для пары (X, A) открытое подмножество U таково, что $\overline{U} \subset \operatorname{int} A$, тогда отображение вырезания $j : (X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$ индуцирует изоморфизм

$$j^* : \ H^p(X, A) \approx H^p(X \setminus U, A \setminus U).$$

Аксиома 6. Когомологическая последовательность пары (X, A), т.е. последовательность

$$\cdots \to H^p(X, A) \to H^p(X) \to H^p(A) \to H^{p+1}(X, A) \to \cdots$$

точна, т.е. в каждом ее члене образ входящего гомоморфизма равен ядру выходящего.

Если не оговорено другое, будем рассматривать группы когомологий с коэффициентами в группе целых чисел $\mathbb{Z}$.

Аксиома 7. Для одноточечного пространства $*$ имеет место изоморфизм

$$H^0(*) \approx \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad H^p(*) = 0 \quad \text{при} \ \ p > 0.$$

Иногда для удобства будем использовать приведенные группы когомологий

$$H^p(*) = 0 \quad \text{для всех} \ \ p \geq 0.$$

В случае выполнения аксиом 1–7 будем говорить, что задана некоторая теория когомологий.

Триадой $(X; A, B)$ называется локально компактное пространство X с двумя замкнутыми подпространствами A и B. Для такой триады точна когомологическая последовательность

$$\cdots \xrightarrow{i^*} H^{p-1}(A, A \cap B) \xrightarrow{\delta} H^p(X, A \cup B) \xrightarrow{f^*} H^p(X, B) \xrightarrow{i^*} \cdots .$$

Если в триаде имеет место включение $A \supset B$, то такая триада называется тройкой (X, A, B) и точная последовательность когомологий сводится к

$$\cdots \xrightarrow{i^*} H^{p-1}(A, B) \xrightarrow{\delta} H^p(X, A) \xrightarrow{f^*} H^p(X, B) \xrightarrow{i^*} \cdots .$$

Точная последовательность Майера–Вьеториса определяется для триад $(X; A, B)$ вида $X = A \cup B$

$$\cdots \to H^{p-1}(A \cap B) \to H^p(X) \to H^p(A) \oplus H^p(B) \to \cdots .$$

Теорема Кюннета. *Для любых двух локально компактных пространств X и Y существует точная последовательность*

$$0 \to \sum_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(Y) \to H^n(X \times Y) \to$$
$$\to \sum_{p+q=n+1} \operatorname{Tor}(H^p(X), H^q(Y)) \to 0.$$

Если M — n-мерное топологическое многообразие, то для замкнутого подмножества $F \subset M$, $F \neq M$,

$$H^n(F) = 0,$$

а для открытой области $D \subset M$

$$H^n(\overline{D}, \partial D) \approx \mathbb{Z}.$$

Если же, аналогично предыдущему, каждой паре (X, A) сопоставлено семейство абелевых групп $H_p\,(X, A)$, отображению $f : (X, A) \to (Y, B)$ — семейство гомоморфизмов $f_* : H_p(X, A) \to H_p(Y, B)$ и подпространству $A \subset X$ — граничный гомоморфизм $\partial : H_p(X, A) \to H_{p-1}(A)$, то H_p , f_* и ∂ должны удовлетворить системе аксиом.

Аксиома 1′. Аксиома 1.

Аксиома 2′. Если $h = gf$, то $h_* = g_* f_*$.

Аксиома 3′. Аксиома 3.

Аксиома 4′. Для отображения пар $\partial f_* = f_* \partial$.

Аксиома 5′. j_* — изоморфизм.

Аксиома 6′. Точна гомологическая последовательность пары

$$\cdots \to H_p(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A) \to H_{p-1}(X) \to H_{p-1}(X, A) \to \cdots .$$

Аксиома 7′. Аксиома 7.

Тогда говорят, что задана некоторая теория гомологий (под совпадением аксиом понимаем их совпадение при замене f^* на f_*, а $H^p(\cdots)$ на $H_p(\cdots)$).

Такие теории гомологий и когомологий, вообще говоря, неединственны, но в монографии используется только тот факт, что они существуют, удовлетворяют перечисленным свойствам и, более того, существуют теории, для которых справедливо следующее утверждение.

Теорема 31.1 ([202], двойственность Александера). *Пусть A — компактное подмножество пространства R^n. Тогда для всех чисел p имеет место изоморфизм*

$$\widetilde{H}_p(R^n \backslash A) \approx H^{n-p-1}(A).$$

Зададим в $(p+1)$-мерном евклидовом пространстве R^{p+1} p-мерный стандартный симплекс σ^p как множество точек

$$\{x = (x_0, \ldots, x_p) \,|\, x_0 + x_1 + \cdots + x_p = 1,\ x_i \geq 0\}.$$

Определим отображение стандартного симплекса σ^{p-1} на грань σ^p следующим образом. Пусть σ_i^{p-1} — грань σ^p, задаваемая условием $x_i = 0$. Назовем вершиной e_m точку с координатой $x_m = 1$ и положим

$$h_i(e_m) = e_m \quad (m < i), \quad h_i(e_m) = e_{m+1} \quad (i \leq m \leq p-1).$$

Дальше доопределим h_i в отдельных точках σ_i^{p-1} как аффинное отображение, принимающее заданное значение в вершинах. Назовем p-мерным симплексом топологического пространства X любое непрерывное отображение $t^p : \sigma^p \to X$. Назовем p-мерной цепью X формальную конечную линейную комбинацию с целочисленными коэффициентами симплексов t_i^p:

$$c_p = \sum n_i t_i^p.$$

Множество $|c_p| = \cup t_i^p(\sigma^p) \subset X$ называют телом цепи.

Такие цепи образуют свободную абелеву группу p-мерных цепей $\mathbb{C}_p(X)$. Элементы прямой суммы $\mathbb{C}(X) = \bigoplus \mathbb{C}_p(X)$ назовем цепями. Граничный гомоморфизм ∂ достаточно задать на образующих. Положим

$$\tau_i t^p = t^p \eta_i, \quad \partial t^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \tau_i t^p.$$

Легко проверить, что $\partial\partial t^p = 0$, следовательно, $\partial^2 = 0$. Очевидно, $\partial(\mathbb{C}_p(X)) \subset \mathbb{C}_{p-1}(X)$.

Определим подгруппы

$$Z_p(X) = \operatorname{Ker}\partial \cap \mathbb{C}_p(X) \subset \mathbb{C}_p(X),$$
$$Z(X) = \oplus Z_p(X) \subset \mathbb{C}(X),$$
$$B_p(X) = \operatorname{Im}\partial \cap \mathbb{C}_p(X) \subset \mathbb{C}_p(X),$$
$$B(X) = \oplus B_p(X) \subset \mathbb{C}(X),$$

где Ker, Im — ядро и образ гомоморфизма.

Группу $Z_p(X)$ называют группой p-мерных циклов, $B_p(X)$ — группой p-мерных границ. Геометрически циклы можно представлять себе как замкнутые ориентированные поверхности, а границы — как границы ориентированных поверхностей.

Фактор группа

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$$

дает пример группы гомологий пространства X.

Пусть z^p и z^{n-p-1} — два цикла с непересекающимися телами. Скажем, что эти циклы зацеплены друг с другом, если цикл z^{n-p-1} определяет ненулевой элемент группы $H_{n-p-1}(R^n \setminus V^p)$, где V^p — тело цикла z^p.

Под ε-сдвигом зацепленного цикла понимаем такую гомотопию цикла на расстояние ε, меньшее расстояния между телами циклов, которая не меняет зацепленности.

Пусть $p : X \to B$ — непрерывное отображение, для которого прообразы $f^{-1}(b)$ всех точек $b \in B$ гомеоморфны одному и тому же пространству F. Если X — прямое произведение $B \times F$, то проекция на сомножитель $p(b, y) = b$, $b \in B$, $y \in F$, дает пример такого отображения.

Локально тривиальным расслоением называется система (X, B, F, p) из трех пространств X, B, F и отображения $p : X \to B$, обладающая следующим свойством: какова бы ни была точка $b \in B$, существует такая окрестность U точки b относительно B и такой гомеоморфизм $q_U : p^{-1}(U) \to U \times F$, что $pq_U^{-1}(b, y) = b$.

Если для пространства X существует гомотопия

$$h : \ X \times [0, 1] \to X,$$

такая, что $h(x, 0) = x$, а $h(x, 1)$ постоянно, то X называется стягиваемым пространством.

Теорема 31.2 ([236]). *Локально тривиальное расслоение (X, B, F, p) над стягиваемой базой B тривиально (т.е. изоморфно прямому произведению).*

Лемма 31.3 ([236]). *Если задана коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов*

$$\begin{array}{ccccccccc} G_5 & \longrightarrow & G_4 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_5} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_4} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_3} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1} \\ H_5 & \longrightarrow & H_4 & \longrightarrow & H_3 & \longrightarrow & H_2 & \longrightarrow & H_1, \end{array}$$

в которой каждая строка точна, и γ_1, γ_2, γ_4 и γ_5 — изоморфизмы, то γ_3 — тоже изоморфизм.

Литература

[1] *Айзенберг Л.А.* Линейная выпуклость в $\mathbb{C}^n$ и разделение особенностей голоморфных функций // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. math. astron. et phys. – 1967. – **15**, № 7. – С. 487–495.

[2] *Айзенберг Л.А.* Линейные функционалы в пространствах аналитических функций и линейная выпуклость в $\mathbb{C}^n$ // Исследования по линейным операторам в теории функций. 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа: Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – Ленинград: Наука, 1978. – Т. 81. – С. 29–32.

[3] *Айзенберг Л.А.* О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби // Сиб. мат. журн. – 1967. – **8**, № 5. – С. 1124–1142.

[4] *Айзенберг Л.А.* Полиномы, ортогональные голоморфным функциям многих комплексных переменных, и обобщение теорем Гартогса и Риссов // Голоморфные функции многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1972. – С. 5–19.

[5] *Айзенберг Л.А., Губанова А.С.* Об областях голоморфности функций с действительными или неотрицательными тейлоровскими коэффициентами // Теория функций, функционал. анализ и их прилож. – 1972. – **15**. – С. 50–55.

[6] *Айзенберг Л.А., Даутов Ш.А.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. – Новосибирск: Наука, 1975. – 114 с.

[7] *Айзенберг Л.А., Южаков А.П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1979. – 368 с.

[8] *Айзенберг Л.А., Южаков А.П., Макарова Л.Я.* О линейной выпуклости в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 4. – С. 731–746.

[9] *Айзенберг Л.А., Трутнев В.М.* Об одном методе суммирования Бореля n-кратных степенных рядов // Сиб. мат. журн. – 1971. – **12**, № 6. – С. 1398–1403.

[10] *Александров П.С.* Введение в гомологическую теорию размерности. – Москва: Наука, 1975. – 368 с.

[11] *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. – Москва: Наука, 1973. – 576 с.

[12] *Александров А.Д.* Выпуклые многогранники. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950. – 428 с.

[13] *Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штойян Д.* Введение в стохастическую геометрию. – Москва: Наука, 1989. – 400 с.

[14] *Апанасов Б.Н.* Дискретные группы преобразований и структуры многообразий. – Новосибирск: Наука, 1983. – 240 с.

[15] *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. В 2-х т. – Москва: Наука, 1982. – Т. 1. – 304 с.; 1984. – Т. 2. – 336 с.

[16] *Аронов А.М., Зиновьев Б.С.* Об аналитических условиях обычной и линейной выпуклости областей с гладкими границами // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 8. – С. 11–15.

[17] *Асеев В.В.* Об экстремальных отображениях двугранных клинов // Докл. АН СССР. – 1991. – **316**, № 4. – С. 788–791.

[18] *Асеев В.В., Кергилова Т.А.* Четырехточечный критерий мебиусовости гомеоморфизма плоских областей // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 5. – С. 776–787.

[19] *Базилевич Л.Е.* Топология гиперпространства выпуклых тел постоянной ширины // Матем. заметки. – 1997. – **62**, № 6. – С. 813–819.

[20] *Береснев В.В.* Об отображениях, сопряженных к выпуклым многозначным отображениям // Кибернетика. – 1973. – № 5. – С. 79–83.

[21] *Бержe М.* Геометрия. В 2-х т. – Москва: Мир, 1984. – Т. 1. – 560 с.; Т. 2. – 368 с.

[22] *Болтянский В.Г.* Отображение компактов в евклидовы пространства // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**, № 6. – С. 871–892.

[23] *Болтянский В.Г.* Решение проблемы Борсука о k-регулярных вложениях // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 2. – С. 222.

[24] *Болтянский В.Г., Рышков С.С., Шашкин Ю.А.* О k-регулярных вложениях и их применениях к теории приближения функций // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 6. – С. 125–132.

[25] *Бондарь А.В.* Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.

[26] *Бондарь А.В.* Множества моногенности и критерии голоморфности для функций многих комплексных переменных // Десятая математическая школа. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1974. – С. 361–381.

[27] *Бондарь А.В.* Об условиях гомеоморфности голоморфных отображений с особенностями // Теория функций и топология. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1983. – С. 7–12.

[28] *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Многозначные отображения // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ. – 1982. – **19**. – С. 127–230.

[29] *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* О новых результатах в теории многозначных отображений. I. Топологические характеристики и разрешимость операторных соотношений // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ. – 1987. – **25**. – С. 123–198.

[30] *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // Успехи мат. наук. – 1980. – **35**, № 1. – С. 59–126.

[31] *Борсук К.* Замечания к вложимости множеств в евклидовы пространства // Тр. III Всесоюз. мат. съезда. – Москва: Мат. ин-т АН СССР, 1959. – **4**. – С. 193–194.

[32] *Борсук К., Косинский А.* Семейства ациклических компактов в n-мерном евклидовом пространстве // Бюл. Польской АН, отд. III. – 1955. – **3**, № 6 – С. 289–293.

[33] *Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А.* Достаточные признаки выпуклости // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – Ленинград: Наука, 1974. – Т. 45. – С. 3–52.

[34] *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1959. – 412 с.

[35] *Бурбаки Н.* Теория множеств. – Москва: Мир, 1965. – 456 с.

[36] *Бурдюк В.Я.* Многозначные непрерывные отображения пространств фигур // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – **41**, № 4. – С. 53–66.

[37] *Ван дер Варден Б.А.* Алгебра. – Москва: Наука, 1976. – 648 с.

[38] *Владимиров В.С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. – Москва: Наука, 1964. – 412 с.

[39] *Владимиров В.С.* Аналитические методы в математической физике // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **175**. – С. 113–133.

[40] *Выговская И.Ю.* Критерий выпуклости области евклидова пространства // Міжнар. конф. до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди. 8–13 червня, 2009. – Тези доп. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2009. – С. 209–210.

[41] *Выговская И.Ю.* О выпуклых и $\mathbb{C}$-выпуклых компактах // "Complex analysis and its applications" devoted to 70-th anniversary of A.F. Grishin, Kharkiv, August 15-18, 2011. – 2011. – С. 45.

[42] *Выговская И.Ю.* О $\mathbb{C}$-квазивыпуклых множествах // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – Київ: Ін-т матем. НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 331–334.

[43] *Виговська І.Ю.* Екстремальні властивості лінійних функцій на комплексних поліедрах // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – Київ: Ін-т матем. НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 332–338.

[44] *Виговська І.Ю.* Екстремальні властивості функцій на комплексних поліедрах // Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу", 30 вересня-3 жовтня, 2010. – Тези доп. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2009. – С. 49–50.

[45] *Виговська І.Ю., Зелінський Ю.Б.* Комбінаторні теореми в комплексному аналізі // Міжнародна конф. "Аналіз і суміжні питання". Тези доп. – Львів, 2005. – С. 112.

[46] *Выговская И.Ю., Зелинский Ю.Б.* О приближении $\mathbb{C}$-выпуклых компактов $\mathbb{C}$-квазивыпуклыми полиэдрами // Intern. Conf. Approximation and applications, Dnepropetrovsk, June 14–17, 2010. – P. 35.

[47] *Ганинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. – Москва: Мир, 1969. – 396 с.

[48] *Герасин А.И.* Об $(n-1)$-выпуклых множествах // Некоторые вопросы анализа и дифференциал. геометрии. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1988. – С. 8–14.

[49] *Герасин А.И.* Обозримость $(n-1)$-выпуклых множеств // Комплексный анализ, алгебра и топология. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1990. – С. 20–28.

[50] *Герасин А.И.* Об инвариантных мерах. – Киев, 1994. – 5 с. – (Препр. НАН Украины. Ин-т матем., 94.3).

[51] *Герасин А.И.* О мерах на $(n-1)$-выпуклых множествах. – Киев, 1994. – 29 с. – (Препр. НАН Украины. Ин-т матем., 94.1).

[52] *Герасін О.І.* Про геометричні ймовірності // Вісник ун-ту УКРАЇНА. – 2008. – **6**. – С. 86–90.

[53] *Гиндикин С.Г., Хенкин Г.М.* Интегральная геометрия для $\overline{\partial}$-когомологий в q-линейно вогнутых областях $\mathbb{C}P^n$ // Функционал. анализ и его прил. – 1981. – **12**, № 4. – С. 6–23.

[54] *Голубятников В.П.* Восстановление обозримых множеств по их проекциям // Всесоюзн. конф. по геометрии в "целом". – Новосибирск,

28–30 сентября 1987 г. – Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1987. – С. 31.

[55] *Голубятников В.П.* Об однозначной восстановимости выпуклых и обозримых компактов по их проекциям // Матем. сб. – 1991. – **182**, № 5. – С. 611–621.

[56] *Голубятников В.П.* Об однозначном определении обозримых тел по их проекциям // Сиб. мат. журн. – 1983. – **29**, № 5. – С. 92–96.

[57] *Голубятников В.П.* О восстановлении формы тела по его проекциям //Докл. АН СССР. – 1982. – **262**, № 3. – С. 521–522.

[58] *Голубятников В.П.* О выпуклости области с двумя выпуклыми томографическими проекциями // Математические труды. – 2008. – **11**, № 2. – С. 107–114.

[59] *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. – 175 с.

[60] *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. – Москва: Наука, 1971. – 96 с.

[61] *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли.– Москва: Мир, 1968. – 160 с.

[62] *Даутов Ш.А., Степаненко В.А.* Простой пример ограниченной линейно выпуклой, но невыпуклой области с гладкой границей // Голоморфные функции многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1972. – С. 175–179.

[63] *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. – Москва: Мир, 1976. – 468 с.

[64] *Елин М.М.* Некоторые свойства обобщенной линейной выпуклости // Комплексный анализ и математическая физика. Тез. докл. шк.-семинара: Дивногорск, 28 июня – 5 июля 1987 г. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1987. – С. 30.

[65] *Елин М.М.* Об одном виде выпуклости в многомерном комплексном анализе // Комплексный анализ и математическая физика. Тез. докл. шк.-семинара: Дивногорск, 28 июня – 5 июля 1987 г. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1987. – С. 31.

[66] *Елин М.М.* "Распространение" ядер Сеге и обобщение линейной выпуклости // XI Всесоюз. шк. по теории операторов в функционал. пространствах. Ч. II. – Челябинск: Челябин. политехн. ин-т, 1986. – С. 43.

[67] *Зелінсъкий Ю.Б.* Деякі нерозв'язані питання комплексного лінійноопуклого аналізу // Матем. студії. – 2008. – **30**, № 2. – С. 195–197.

[68] *Зелинский Ю.Б.* Дифференциальные свойства линейно выпуклых функций // Экстремальные задачи теории приближения и их приложения: Тез. докл. респ. науч. конф., Киев, 29–31 мая 1990 г. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1990. – С. 62.

[69] *Зелинский Ю.Б.* Комплексный анализ и многозначные отображения // IV Тираспол. симпоз. по общей топологии и ее приложениям. – Кишинев: Штиинца, 1979. – С. 43–46.

[70] *Зелинский Ю.Б.* Комплексные аспекты выпуклого анализа // Тез. докл. шк.-семинара "Актуал. вопр. компл. анализа". – Ташкент: Ташк. ун-т, 1989. – С. 42.

[71] *Зелинский Ю.Б.* Линейно выпуклый анализ // Междунар. конф. 100-летию Б.Я. Левина. – Харьков. – 2006. – С. 49.

[72] *Зелинский Ю.Б.* Линейно выпуклые области с гладкими границами // XI Всесоюз. шк. по теории операторов в функционал. пространствах. II. – Челябинск: Челябин. политехн. ин-т, 1986. – С. 51.

[73] *Зелинский Ю.Б.* Многозначные отображения в анализе // Киев: Наукова думка. – 1993. – 264 с.

[74] *Зелинский Ю.Б.* Многозначные отображения в комплексном анализе // Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1988. – 25 с.

[75] *Зелинский Ю.Б.* Некоторые применения многозначных отображений в комплексном анализе // Conf. on analytic functions, Kozubnik, April 18–26, 1979, Abstracts. – Lodz: University of Lodz, 1979. – P. 71.

[76] *Зелинский Ю.Б.* Некоторые вопросы многозначных отображений и их приложений к комплексному анализу// Междунар. тополог. конф., Москва, 25–29 июня 1979 г. – Москва: Мат. ин-т АН СССР, 1979. – С. 45.

[77] *Зелинский Ю.Б.* Об инвариантных на подмножествах отображениях // Теория приближения и смежные вопросы анализа и топологии. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1987. – С. 25–35.

[78] *Зелинский Ю.Б.* Об областях с ациклическими сечениями // Обобщенно выпуклые множества на грассмановых многообразиях. – Київ: Ін-т матем. НАН України. – 2003. – С. 3–11.

[79] *Зелинский Ю.Б.* Об областях, сопряженное множество которых состоит из сильно линейно выпуклых компонент // Моногенные функции и отображения. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1982. – С. 48–51.

[80] *Зелинский Ю.Б.* Об областях с регулярными сечениями // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1420–1423.

[81] *Зелинский Ю.Б.* Обобщенная выпуклость в комплексном анализе // Бакинская междунар. тополог. конф. Ч. II. – Баку: Ин-т матем. и мех. АзССР, 1987. – С. 122.

[82] *Зелинский Ю.Б.* Обобщенно выпуклые множества в комплексном анализе// Міжнар. конф. "Аналіз і топологія". – Львів, 26 травня – 7 червня, 2008. – С. 75–76.

[83] *Зелинский Ю.Б.* Об одном критерии сильной линейной выпуклости // Геометрическая теория функций и топология. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1981. – С. 18–29.

[84] *Зелинский Ю.Б.* Об условии выпуклости сильно линейно выпуклых множеств // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1984. – С. 64–71.

[85] *Зелинский Ю.Б.* О вложении компактов в евклидово пространство // Теория функций и ее применения. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 102–111.

[86] *Зелинский Ю.Б.* О геометрических критериях сильной линейной выпуклости // Докл. АН СССР. – 1981. – **261**, № 1. – С. 11–13.

[87] *Зелинский Ю.Б.* О дифференцировании многозначных функций // Теория функций и топология. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1983. – С. 33–42.

[88] *Зелинский Ю.Б.* О комплексных оболочках // II Всесоюз. конф. "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике". – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1985. – С. 95–97.

[89] *Зелинский Ю.Б.* О комплексных оболочках // Всесоюз. конф. по геометр. теории функций: Тез. докл. – Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1988. – С. 41.

[90] *Зелинский Ю.Б.* О линейно выпуклых областях с гладкими границами // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 53–58.

[91] *Зелинский Ю.Б.* О локально линейно выпуклых областях // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 2. – С. 280–284.

[92] *Зелинский Ю.Б.* О многозначных линейно выпуклых функциях // Комплексный анализ, алгебра и топология. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1990. – С. 52–61.

[93] *Зелинский Ю.Б.* О некоторых свойствах сильно линейно выпуклых множеств // Комплексные методы в математической физике. – Донецк: Ин-т прикладной матем. и мех. АН УССР, 1984. – С. 143.

[94] *Зелинский Ю.Б.* О применении гомологических методов при изучении сопряженных множеств в $\mathbb{C}^n$ // Комплексный анализ и многообразия. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1978. – С. 149–152.

[95] *Зелинский Ю.Б.* О проблематике в теории линейно выпуклых множеств // V Тираспол. симпоз. по общ. топологии. – Кишинев: Штиинца, 1985. – С. 101–102.

[96] *Зелинский Ю.Б.* О проекциях сильно линейно выпуклых множеств // Исследования по теорет. и прикл. вопросам матем. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1986. – С. 16–18.

[97] *Зелинский Ю.Б.* О различных обобщениях понятия выпуклости // Метрические вопр. теории функций. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 28–32.

[98] *Зелинский Ю.Б.* О связи свойств множеств со свойствами их сечений и проекций // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, № 6. – С. 158–162.

[99] *Зелинский Ю.Б.* О сильно линейно выпуклых множествах // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикладной математики им. И.Н. Векуа. – Тбилиси: Тбил. ун-т, 1988. – **3**, № 1. – С. 76–79.

[100] *Зелинский Ю.Б.* О строении k-выпуклых компактов // Некотор. вопросы анализа и дифференциальной топологии. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1988. – С. 29–38.

[101] *Зелинский Ю.Б.* Отображения, инвариантные на подмножествах // Комплексный анализ и мат. физика. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1987. – С. 39.

[102] *Зелинский Ю.Б.* Применения многозначных отображений в комплексном анализе // Conf. on analytic functions, Blażejewko, August 19–27, 1982, Abstracts. – Lodz: University of Lodz, 1982. – P. 63.

[103] *Зелинский Ю.Б.* Применения многозначных отображений в анализе // Ленингр. междунар. тополог. конф: Тезисы. – Ленинград: Наука, 1982. – С. 174.

[104] *Зелинский Ю.Б.* Сильно линейно выпуклые множества в топологических векторных пространствах // Тез. науч. сообщ. шк.-семинара. – Тбилиси: Тбил. ун-т, 1985. – С. 6.

[105] *Зелинский Ю.Б.* Субдифференциалы и экстремальные точки // III интерн. симпоз. Комплексный анализ, Херцег Нови, май 1988: Тез. докл. – Югосл. мат. союз, 1988. – С. 31.

[106] *Зелинский Ю.Б.* Теорема Хана-Банаха для сильно линейно выпуклых областей // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикладной математики. – Тбилиси: Тбил. ун-т, 1985. – **1**, № 1. – С. 56–58.

[107] *Зелинский Ю.Б.* Теорема Хелли и смежные вопросы // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 125–128.

[108] *Зелинский Ю.Б.* Экстремальные точки линейно выпуклых множеств // Тез. докл. всесоюз. семинара. – Ташкент: Ташк. ун-т, 1985. – С. 46–47.

[109] *Зелинский Ю.Б., Атабаев М.* О множествах моногенности липшицевых функций // Геометрическая теория функций и топология. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1981. – С. 29–37.

[110] *Зелинский Ю.Б., Атабаев М.* О производных множествах липшицевых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 421–427.

[111] *Зелінський Ю.Б., Виговська І.Ю.* Геометричні теореми Гана-Банаха для узагальнено опуклих множин // Міжнар. конф. присвячена 125 річниці від дня народження Г. Гана. Тез. доп. – Чернівці, 2004. – С. 36–37.

[112] *Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю.* Двойственные задачи на комплексно линейных включениях // Intern. conf. on complex analysis and potential theory, Kiev. – 2001. – С. 72–73.

[113] *Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю.* О теореме Каратеодори // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – Київ: Ін-т матем. НАН України. – 2005. – **2**, № 3. – С. 123–129.

[114] *Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю.* Критерий выпуклости области евклидова пространства // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 709–711.

[115] *Зелінський Ю.Б., Виговська І.Ю., Ткачук М.В.* Про деякі критерії опуклості компактів // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 4. – С. 466–471.

[116] *Зелинский Ю.Б., Мельник В.Л.* О линейно выпуклых областях и аналитических полиэдрах. Киев, 1993. – 21 с. – (Препр. НАН Украины. Ин-т матем., 93.34).

[117] *Зелинский Ю.Б., Момот И.В.* О (n, m)-выпуклых множествах // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 422–427.

[118] *Зелинский Ю.Б., Момот И.В.* Некоторые вопросы обобщенно выпуклых множеств // Обобщенно выпуклые множества на грассмановых многообразиях. – Київ: Ін-т матем. НАН України. – 2003. – С. 12–31.

[119] *Зелинский Ю.Б., Мкртчян Г.А.* Об экстремальных точках и гиперкомплексно выпуклых областях // Докл. АН СССР. – 1990. – **311**, № 6. – С. 1299–1302.

[120] *Зелинский Ю.Б., Навоян В.Х.* О некоторых свойствах сопряженной функции к действительной многозначной функции // Вопр. анализа и приближения. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1989. – С. 62–66.

[121] *Зелинский Ю.Б., Ткачук М.В.* О послойной линейной выпуклости // Комплексний аналіз і течії з вільними границями // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – Київ: Ін-т матем. НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 366–373.

[122] *Зелинский Ю.Б., Ткачук М.В.* О приближении функций многих комплексных переменных простыми дробями // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – Київ: Ін-т матем. НАН України. – 2005. – **2**, № 3. – С. 130–136.

[123] *Зиновьев Б.С.* Аналитические условия и некоторые вопросы аппроксимации линейно выпуклых областей с гладкими границами в пространстве $\mathbb{C}^n$ // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 6. – С. 61–69.

[124] *Зиновьев Б.С.* Некоторые теоремы линейной выпуклости // Голоморфные функции многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1972. – С. 63–73.

[125] *Знаменский С.В.* Геометрический критерий сильной линейной выпуклости // Функционал. анализ и его прил. – 1979. – **13**, № 3. – С. 83–84.

[126] *Знаменский С.В.* О существовании голоморфных первообразных по всем направлениям. – Красноярск, 1983. – 8 с. – (Препр. / СО АН СССР. Ин-т физики; №23 М); Мат. заметки. – 1989. – **45**, № 1. – С. 16–19.

[127] *Знаменский С.В.* Пример сильно линейно выпуклой области с неспрямляемой границей //Матем. заметки. – 1994. – **57**, № 6. – С. 851–861.

[128] *Знаменский С.В.* Семь задач о $\mathbb{C}$-выпуклости // Комплексный анализ в современной математике: к 80-летию со дня рождения Б.В. Шабата (Редактор Е. Чирка). – Москва: ФАЗИС, 2001. – С. 123–132.

[129] *Знаменский С.В.* Сильная линейная выпуклость. I. Двойственность пространств голоморфных функций // Сиб. мат. журн. – 1985. – **26**, № 3. – С. 31–43.

[130] *Знаменский С.В.* Сильная линейная выпуклость. II. Существование голоморфных решений линейных систем уравнений // Сиб. мат. журн. – 1988. – **29**, № 6. – С. 49–65.

[131] *Знаменский С.В.* Сильная линейная выпуклость // Комплексный анализ и математическая физика. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1988. – С. 35–52.

[132] *Знаменский С.В.* Томография в пространствах аналитических функционалов // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 5. – С. 1037–1040.

[133] *Знаменский С.В., Зелинский Ю.Б.* Когда пересечение опор аналитических функционалов является опорой // Докл. РАН. – 1993. – **328**, № 1. – С. 16–18.

[134] *Знаменский С.В., Знаменская Л.Н.* Проективная выпуклость в $\mathbb{C}P^n$ // Сиб. мат. журн. – 1997. – **38**, № 4. – С. 790–806.

[135] *Знаменский С.В., Знаменская Л.Н.* Спиральная связность сечений и проекций $\mathbb{C}$-выпуклых множеств // Матем. заметки. – 1996. – **59**, № 3. – С. 359–369.

[136] *Знаменская Л.Н., Знаменский С.В.* Условия сильной линейной выпуклости компактов Гартогса с криволинейным основанием // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 12. – С. 32–35.

[137] *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – Москва: Наука, 1974. – 480 с.

[138] *Карасёв Р.Н.* Топологические методы в комбинаторной топологии. – http://www.rkarasev.ru/works/.

[139] *Картан А.* Комплексно аналитические многообразия и когомологии // Расслоенные пространства и их приложения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – С. 352–362.

[140] *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – Москва: Наука, 1979. – 382 с.

[141] *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. – Москва; Ленинград: Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. – Т. 2. – 444 с.

[142] *Красикова Н.С., Трутнев В.М.* Об одном многозначном аналоге теоремы Полиа // О голоморфных функциях многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1976. – С. 78–86.

[143] *Кудрявцев Л.Д.* О свойствах дифференцируемых отображений областей евклидовых пространств // Мат. сб. – 1953. – **32**(**74**), № 4. – С. 493–514.

[144] *Кузьминых А.В.* Аффинность выпукло инвариантных отображений // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, № 6. – С. 1198–1204.

[145] *Кузьминых А.В.* Об отображениях, почти сохраняющих углы // Сиб. мат. журн. – 1988. – **24**, № 4. – С. 99–105.

[146] *Кузьминых А.В.* Отображения, почти сохраняющие выпуклость // Сиб. мат. журн. – 1988. – **24**, № 4. – С. 106–110.

[147] *Куратовский К.* Топология. В 2-х т. – Москва: Мир, 1966. – Т. 1. – 596 с.; Т. 2. – 624 с.

[148] *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Субдифференциальное исчисление. – Новосибирск: Наука, 1987. – 224 с.

[149] *Кутателадзе С.С.* Основы функционального анализа. – Новосибирск: Наука, 1983. – 222 с.

[150] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – Москва: Наука, 1985. – 336 с.

[151] *Линичук Р.С.* Многозначные отображения и непрерывность разбиений топологических пространств // Десятая мат. школа. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1974. – С. 308–329.

[152] *Луферепко В.П., Суворов Г.Д.* О понятии тела простого конца в теории Каратеодори // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 71–79.

[153] *Макарова Л.Я.* Достаточные условия линейной выпуклости областей с почти гладкой границей // О голоморфных функциях многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1976. – С. 87–96.

[154] *Макарова Л.Я.* Достаточные условия сильной линейной выпуклости для полиэдров // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1980. – С. 89–94.

[155] *Макарова Л.Я.* О дополнительных линейно выпуклых оболочках // Сиб. мат. журн. – 1970. – **11**, № 3. – С. 547–551.

[156] *Макарова Л.Я.* Применение обобщенных функций к исследованию линейной выпуклости // Многомерный комплексный анализ. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1985. – С. 241–243.

[157] *Макарова Л.Я., Худайберганов Г., Черкашин В.П.* Заметка о полиномиальной и линейной выпуклости // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1973. – № 1. – С. 36–42.

[158] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 2. – Москва: Наука, 1968. – 624 с.

[159] *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. – Москва: Мир, 1978. – 320 с.

[160] *Мельник В.Л.* Дослідження умови гладкості межі для сильної лінійної опуклості області // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1710–1713.

[161] *Мельник В.Л.* Лінійно опуклі області з особливостями на межі // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 403–408.

[162] *Мельник В.Л.* Об обобщенно выпуклых множествах. – Киев, 1991. – 9 с. – (Препр. АН УССР. Ин-т матем.; 91.1).

[163] *Мельник В.Л.* Про лінійно опуклі області з гладкими межами // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1747–1751.

[164] *Мельник В.Л.* Топологічна класифікація $(n-1)$-опуклих множин // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 9. – С. 1236–1243.

[165] *Мельник И.М.* К топологическим методам теории функций комплексного переменного // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 5. – С. 1015–1018.

[166] *Милнор Д.* Теория Морса. – Москва: Мир, 1965. – 184 с.

[167] *Мкртчян Г.А.* Гиперкомплексно выпуклые области с гладкой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 3. – С. 14–17.

[168] *Мкртчян Г.А.* О гиперкомплексной выпуклости // V Тираспол. симпоз. по общ. топологии. – Кишинев: Штиинца, 1985. – С. 177.

[169] *Мкртчян Г.А.* О гиперкомплексно выпуклых множествах // Препринт / АН УССР 87.42. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1987. – 17 с.

[170] *Мкртчян Г.А.* О группах когомологий некоторых гиперкомплексно выпуклых множеств // Комплексный анализ и математическая физика. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1987. – С. 78.

[171] *Мкртчян Г.А.* О локально гиперкомплексно выпуклых областях // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1986. – С. 30.

[172] *Мкртчян Г.А.* О сильной гиперкомплексной выпуклости // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 182–187.

[173] *Момот И.В.* Геометрическая форма теоремы Хана-Банаха для обобщённой выпуклости // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 10. – С. 125–128.

[174] *Момот И.В.* О линейно выпуклых множествах с гладкой границей// Intern. Conf. on complex analysis and potential theory, August 7–12, 2001. – Kiev: Inst. of Math. NAS of Ukraine, 2001. – P. 78–79.

[175] *Момот И.В.* Теорема Кли для линейно выпуклых множеств // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 125–128.

[176] *Морс М.* Топологические методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1951. – 248 с.

[177] *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – Москва: Мир, 1988. – 510 с.

[178] *Ореховский З.Б.* Гомологии и когомологии пространства $\mathbb{C}^n$, из которого удалено конечное число аналитических плоскостей // Голоморфные функции многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1972. – С. 119–127.

[179] *Осіпчук Т.М.* Аналітичні умови локальної лінійної опуклості в $\mathbb{H}^n$ // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – Київ: Ін-т матем. НАН України, 2006. – **3**, № 4. – С. 244–254.

[180] *Осінчук Т.М., Зелінський Ю.Б., Ткачук М.В.* Аналітичні умови локальної узагальненої опуклості в $C^m_{0,q}$ // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – Київ: Ін-т матем. НАН України, 2010. – **7**, № 2. – С. 393–401.

[181] *Осінчук Т.М., Ткачук М.В.* Аналітичний критерій лінійної опуклості для областей Гартокса з гладкою межею в $\mathbb{H}^2$ // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 266–277.

[182] *Пинчук С.И.* О граничном поведении аналитических множеств и алгеброидных отображений // Докл. АН СССР. – 1983. – **268**, № 2. – С. 296–298.

[183] *Пинчук С.И.* Существование голоморфной первообразной // Докл. АН СССР. – 1972. – **204**, № 2. – С. 292–294.

[184] *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – Москва: Физматгиз, 2004. – 416 с.

[185] *Помельников Ю.В., Суворов Г.Д.* Новое семейство конформно-инвариантных метризуемых расширений плоской области // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 3. – С. 144–161.

[186] *Пономарев В.И.* О свойствах топологических пространств, сохраняющихся при многозначных непрерывных отображениях // Мат. сб. – 1960. – **51**, № 4. – С. 515–536.

[187] *Пшеничный Б.Н.* Выпуклые многозначные отображения и им сопряженные // Кибернетика. – 1978. – № 3. – С. 94–102.

[188] *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – Москва: Наука, 1980. – 320 с.

[189] *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. – Москва: Наука, 1969. – 150 с.

[190] *Решетняк Ю.Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. – Новосибирск: Наука, 1982. – 230 с.

[191] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – Москва: Мир, 1973. – 470 с.

[192] *Романенко В.Ю.* О монотонности в гильбертовом пространстве. – Киев, 1989. – 40 с. – (Препр./ АН УССР. Ин-т матем.; 89.56).

[193] *Рохлин В.А., Фукс Д.Б.* Начальный курс топологии. – Москва: Наука, 1977. – 488 с.

[194] *Рублев В.С.* Об одном характеристическом свойстве класса выпуклых множеств // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 3. – С. 319–323.

[195] *Рышков С.С.* О k-регулярных вложениях // Докл. АН СССР. – 1959. – **127**, № 2. – С. 272–273.

[196] *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. – Москва: Наука, 1983. – 360 с.

[197] *Симонженков С.Д.* Об описании сопряженного пространства к пространству функций, голоморфных в области одного специального вида // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 2. – С. 218–221.

[198] *Симонженков С.Д.* К задаче о разделении особенностей // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1980. – С. 139–146.

[199] *Сирик В.И.* Об асимптотической моногенности непрерывных отображений // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1988. – С. 87–92.

[200] *Скляренко Е.Г.* О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 6. – С. 47–70.

[201] *Солтан В.П.* Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 224 с.

[202] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – Москва: Мир, 1971. – 680 с.

[203] *Степаненко В.А.* Об обобщении понятия линейной выпуклости и его приложениях // Некоторые свойства голоморфных функций многих компл. переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1973. – С. 123–138.

[204] *Степаненко В.А.* Об одном примере ограниченной линейно выпуклой, но невыпуклой области с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ // О голоморфных функциях многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1976. – С. 200–202.

[205] *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного в 2-х т. – Москва: ИЛ, 1962. – Т. 1. – 362 с. – Т. 2. – 416 с.

[206] *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – Москва: Наука, 1964. – 227 с.

[207] *Суворов Г.Д.* Семейства плоских топологических отображений. – Новосибирск: РИО СО АН СССР, 1965. – 266 с.

[208] *Суворов Г.Д., Иванов О.В.* Полные решетки конформно-инвариантных компактификаций области. – Киев: Наук. думка, 1982. – 196 с.

[209] *Тамразов П.М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 270 с.

[210] *Ткачук М.В.* Міра на просторі комплексних прямих // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – Київ: Ін-т матем. НАН України, 2010. – **7**, № 2. – С. 416–420.

[211] *Ткачук М.В.* Характеризація кола типу Безиковича–Данцера // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 6. – С. 862–864.

[212] *Ткачук М.В.* Характеризація кола типу Безиковича–Данцера // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. – Київ: Ін-т матем. НАН України, 2006. – **3**, № 4. – С. 366–373.

[213] *Трохимчук Ю.Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. – Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 2008. – 530 с.

[214] *Трохимчук Ю.Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 212 с.

[215] *Трохимчук Ю.Ю.* О непрерывных отображениях областей евклидова пространства // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 2. – С. 196–211.

[216] *Трохимчук Ю.Ю.* О дифференциальных свойствах комплексных функций // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 4. – С. 465–469.

[217] *Трохимчук Ю.Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.

[218] *Трохимчук Ю.Ю., Бондарь А.В.* О локальной степени нульмерного отображения // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1969. – С. 221–241.

[219] *Трохимчук Ю.Ю., Зелинский Ю.Б., Шарко В.В.* О некоторых результатах в топологии многообразий, теории многозначных отображений и теории Морса // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1983. – **154**. – С. 222–230.

[220] *Трутнев В.М.* Инвариантные подпространства и сюръективность дифференциальных операторов // Исследования по линейным операторам в теории функций. 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа: Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – Ленинград: Наука, 1978. – Т. 81. – С. 128–129.

[221] *Трутнев В.М.* Некоторые свойства функций, голоморфных на сильно линейно выпуклых множествах // Успехи мат. наук. – 1972. – **27**, № 5. – С. 253–254.

[222] *Трутнев В.М.* Об одном аналоге ряда Лорана для функций многих комплексных переменных, голоморфных на сильно линейно выпуклых множествах // Голоморфные функции многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1972. – С. 139–152.

[223] *Трутнев В.М.* О свойствах функций, голоморфных на сильно линейно выпуклых множествах // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1973. – С. 139–155.

[224] *Трутнев В.М.* Уравнения свертки в выпуклых областях типа конуса в $\mathbb{C}^n$ // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1980. – С. 161–172.

[225] *Урысон П.С.* Труды по топологии и другим областям математики. – Т. 1. – Москва: Гостехиздат, 1951. – 991 с.

[226] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 1. – Москва: Наука, 1966. – 607 с.

[227] *Фукс Б.А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – Москва: Физматгиз, 1962. – 420 с.

[228] *Хачатрян В.Х.* О выпуклых многозначных отображениях // V Тираспол. симпоз. по общ. топологии. – Кишинев: Штиинца, 1986. – С. 241.

[229] *Хачатрян В.Х.* О дифференциальных свойствах многозначных отображений // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1986. – С. 47.

[230] *Хачатрян В.Х.* О некоторых свойствах производных множеств // Комплексный анализ и мат. физика. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1987. – С. 116.

[231] *Хачатрян В.Х.* Теорема о смешанных производных для многозначных отображений // Теория приближений и смежные вопросы. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1987. – С. 94–96.

[232] *Худайберганов Г.* Заметка о линейной выпуклости // Голоморфные функций многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1972. – С. 205–208.

[233] *Худайберганов Г.* Некоторые замечания о полиномиальной выпуклости в $\mathbb{C}^n$ // Науч. тр. – Ташкент: Ташк. ун-т, 1972. – Вып. 418. – С. 330–337.

[234] *Худайберганов Г.* Об одной задаче Грауэрта // Докл. АН УзССР. – 1975. – № 3. – С. 7–8.

[235] *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 – 85 Деп.

[236] *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. – Москва: Мир, 1970. – 444 с.

[237] *Цих А.К.* Один случай распространения теоремы о разложении Фруассара и его применение к вычетам некоторых рациональных функций // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1973. – С. 167–180.

[238] *Чернавский А.В.* Дополнение к статье "О конечнократных открытых отображениях многообразий" // Мат. сб. – **66**, № 3. – С. 471–472.

[239] *Чирка Е.М.* О приближении голоморфных функций на гладких многообразиях // Мат. сб. – 1969. – **78**, № 1. – С. 101–124.

[240] *Чирка Е.М.* Комплексные аналитические множества. – Москва: Наука, 1985. – 272 с.

[241] *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – Москва: Наука, 1969. – 576 с.

[242] *Шарко В.В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). – Киев: Наук. думка, 1990. – 196 с.

[243] *Шеффер Х.* Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1971. – 360 с.

[244] *Щепин Е.В.* Критерий выпуклости открытого множества // III Тираспол. симпоз. по общ. топологии и ее прилож. – Кишинев: Штиинца, 1973. – С. 146.

[245] *Южаков А.П.* К теории вычетов функций двух комплексных переменных// Учен. зап. МОПИ. Математика. – 1960. – **60**, № 7. – С. 153–162.

[246] *Южаков А.П., Кривоколеско В.П.* Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. мат. журн. – 1971. – **12**, №2. – С. 452–458.

[247] *Эдвардс Р.Т.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – Москва: Мир, 1969. – 1072 с.

[248] *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. – Москва: Мир, 1965. – 166 с.

[249] *Aizenberg L.A.* Linear functionals on spaces of analytic functions and the linear convexity in $\mathbb{C}^n$ // Lect. Notes Math. – 1984. – **1043**. – P. 41–49.

[250] *Aizenberg L.A.* Linear functionals on spaces of analytic functions and the linear convexity in $\mathbb{C}^n$ // Lect. Notes Math. – 1994. – **1573**. – P. 45–48.

[251] *Andersson M., Passare M., Sigurdsson R.* Complex convexity and analytic functionals. – Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verlag, 2005. – 160 p.

[252] *Andersson M., Passare M.* Complex Kergin interpolation // J. Approx. Theory. – 1991. – **64**. – P. 214–225.

[253] *Aseev V., Kergylova T.* Moebius transformations preserving fixed anharmonic ratio. – 2008. – Arxiv preprint arXiv:0810.4433.

[254] *Aseev V., Kergylova T.* On transformations that preserve fixed anharmonic ratio // Tokyo J. Math. – 2010. – **33**, № 2. – P. 365–371.

[255] *Aumann G.* On a topological characterization of compact convex point sets // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 3. – P. 443–447.

[256] *Begle E.G.* The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces// Ann. Math. – 1950. – **51**, № 3. – P. 534–543.

[257] *Behnke H., Peschl E.* Zur der Theorie der Functionen mehrer komplexer Veränderlichen. Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen // Math. Ann. – 1935. – **111**, № 2. – S. 158–177.

[258] *Bohr H.* Ueber streckentreue und konforme Abbildung // Math. Zeitschr. – 1918. – **1**, № 4. – S. 403–420.

[259] *Borel A.* Seminar on transformation groups. – Princeton: Princeton University Press, 1960. – 245 p.

[260] *Borsuk K.* On the k-independed subsets of the Euclidean spaces and of the Hilbert space // Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III. – 1957. – **5**, № 4. – P. 351–356.

[261] *Borsuk K., Kosinski A.* Families of acyclic compacta in Euclidean n-space // Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III. – 1955. – **3**, № 6. – P. 289–293.

[262] *Bourgin D.G.* Vietoris-Begle type theorems // Rend. Mat. (6). – 1970. – **3**. – P. 19–31.

[263] *Bourgin D.G.* A generalization of the mapping degree // Can. J. Math. – 1974. – № 5. – P. 1109–1117.

[264] *Braun R.B.* Caushy – Fantappie Formeln und Dualität in der Functiontheorie // Diss. Doktorgrades der Math. – Göttingen, 1972. – 58 S.

[265] *Beer G.* Topologies on closed and closed convex sets. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1993. – **268**. – xii+340 p.

[266] *Beltagy M., Shenawy S.* A note on Convexity and Starshapedness // Appl. Math. Sci. – 2010. – **4**, № 53. – P. 2599–2608.

[267] *Bracho J., Montejano L.* Helly-type theorems on the homology of the space of transversals // Discrete and Computational Geometry. – 2002. – **27**(3). – P. 387–393.

[268] *Besicovitch S.* A problem on a circle // J. London Math. Soc. – 1961. – **36**. – P. 241–244.

[269] *Caratheodory C.* Über die Begrenzug einfach zusammenhängender Gebiete // Math. Ann. – 1913. – **73**. – S. 323–370.

[270] *Costara C.* The symmetrized bidisk and Lempert's theorem// Bull. London Math. Soc. – 2004. – **36**. – P. 656–662.

[271] *Danzer L.W.* A Characterization of the Circle// Amer. Math. Soc., Providence, RI. Convexity, Proc. Symposia in Pure Math. – 1963. – **VII**. – P. 99–100.

[272] *Debrunner H.E., Mani-Levitska P.* Can you cover your shadows? // Discrete and Computational Geometry. – 1986. – **1**(1). – P. 45–58.

[273] *Edigarian A., Zwonek W.* Geometry of the symmetrized polydisc//Arch. Math. – 2005. – **84**. – P. 364–374.

[274] *Fabian M., Háyek P., Montesinos V., Zizler V.* A quantitative version of Krein's Theorem // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2005. – **21**, № 1. – P. 237–248.

[275] *Goodmen F.E.* When is a set of lines in space convex? // Notices Amer. Math. Soc. – 1998. – **45**, № 2. – P. 222–232.

[276] *Goodmen F.E., Pollack R.* Foundations of a theory of convexity on affine Grassmann manifolds // Mathematika. – 1995. – **42**. – P. 305–328.

[277] *Grauert H., Remmert R.* Komplexe Räume // Math. Ann. – 1958. – **136**, № 2. – P. 245–318.

[278] *Grünbaum B.* Characterization of circles and spheres // Amer. Math. Soc., Providence, RI. Convexity, Proc. Symposia in Pure Math. – 1963. – **VII**. – P. 497.

[279] *Hörmander L.* Notions of convexity. – Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser Verlag, 1994. – 416 p.; second ed. 2007. – 414 p.

[280] *Hörmander L.* Weak linear convexity and a related notion of concavity // Math. Scand. – 2008. – **102**. – P. 73–100.

[281] *Hug D., Mani-Levitska P., Schätzle R.* Almost transversal intersections of convex surfaces and translative integral formulae// Math. Nach. – 2002. – **246**–**247**. – P. 121–155.

[282] *Jacquet D.* $\mathbb{C}$-convex domains with C^2 boundary // Complex variables and Elliptic Equations. – 2006. – **51**. – P. 303–312.

[283] *Jarnitzki M., Pflug P.* On automorphism of the symmetrized bidisc//Arch. Math. – 2004. – **83**. – P. 264–266.

[284] *Jarnitzki M., Pflug P.* Invariant distances and metrics in complex analysis-revisited // Dissertationes Math. – 2005. – **430**. – P. 1–192.

[285] *Kallin E.* Polymomial convexity: The three spheres problem // Proc. of the Conf. on complex Analysis. – Minneapolis, 1964. – P. 301–304.

[286] *Kiselman Ch.O.* A differential inequality characterizing weak lineal convexity//Math. Ann. – 1998. – **311**, № 1. – P. 1–10.

[287] *Kiselman Ch.O.* Duality of functions defined in lineally convex sets// Universitatis Iagellonicae Acta Math. – 1997. – **35**. – P. 7–36.

[288] *Kiselman Ch.O.* Lineally convex Hartogs domains // Acta Math. Vietnamica. – 1996. – **21**. – P. 69–94.

[289] *Kiselman Ch.O.* Sur la convexité linéele // Ann. Acad. Brasil. Ciênc. – 1978. – **50**, № 4. – P. 453–458.

[290] *Koenen W.H.* Characterizing the circle // Amer. Math. Montly. – 1971. – **78**. – P. 993–996.

[291] *Lempert L.* Intrinsic distances and holomorphic retracts//Complex analysis and applications. – Sofia: Bulg. Acad. Sci. – 1984. – P. 341–364.

[292] *Looman H.* Über die Cauchy – Riemanschen Differentialgleichungen // Nachr. Ges. Wiess. Göttingen. – 1923. – S. 97–108.

[293] *Mani-Levitska P.* Convex surfaces which intersect each congruent copy of themselves in a connected set// Israel J. Math. – 1986. – **54**(1). – P. 71–80.

[294] *Mani-Levitska P., Vrećica S., Živaljević R.* Topology and combinatorics of partitions of masses by hyperplanes // Advances in Math. – 2006. – **207**(1). – P. 266–296.

[295] *Martineau A.* Indicatrices des fonctions analytiques et invertion de la transformation de Laplace // C. r. Acad. Sci. – 1962. – **255**, № 22. – P. 2888–2890.

[296] *Martineau A.* Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes // Math. Ann. – 1966. – **163**, № 1. – P. 62–88.

[297] *Martineau A.* Équations differentielles d'ordre infini // Bull. Soc. Math. de France. – 1967. – **95**. – P. 109–154.

[298] *Martineau A.* Sur les équations aux dérivées partielles à coefficients avec second membre dans le champ complexe // C. r. Acad. Sci. – 1967. – **264**, № 4. – P. 400–401.

[299] *Martineau A.* Sur la notion d'ensemble fortement lineairement convexe // Ann. Acad. Brasil. Ciênc. – 1968. – **40**, № 4. – P. 427–435.

[300] *Martinelli E.* Contributi alla teoria dei residui per le funsioni di due variabili complesse // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**, № 4. – P. 335–345.

[301] *Menchoff D.* Sur les conditions suffisantes pour qu'une fonction univalente soit holomorphe // Мат. сб. – 1933. – **40**, № 1. – С. 3–23.

[302] *Montejano L.* About a problem of Ulam concerning flat sections of manifolds // Comment. Math. Helvetici. – 1990. – **65**(1). – P. 462–473.

[303] *Montejano L.* A characterization of the euclidean ball in terms of concurrent sections of constant width// Geometriae Dedicata. – 1991. – **37**(3). – P. 307–316.

[304] *Montejano L., Karasev R.N.* Topological transversals to a family of convex sets// Discrete and Computational Geometry. – 2011. – **46**(2). – P. 283–300.

[305] *Montejano L., Morales E.* Characterization of ellipsoids and polarity in convex sets // Mathematika. – 2003. – **50**(1–2). – P. 63–72.

[306] *Montejano L., Morales-Amaya E.* Variations of classic characterizations of ellipsoids and a short proof of the false centre theorem // Mathematika. – 2007. – **54**(1-2). – P. 35–40.

[307] *Montejano L., Oliveros D.* Tolerance in Helly-type theorems// Discrete and Computational Geometry. – 2011. – **45**(2). – P. 348–357.

[308] *Montejano L., Shchepin E.* Topological tomography in convexity// Bull. London Math. Soc. – 2002. – **34**(3). – P. 353–358.

[309] *Monterde I., Montesinos V.* Convex-compact sets and Banach discs // Czechoslovak Math. J. – 2009. – **59**(134), № 3. – P. 773–780.

[310] *Montesinos V., Zizler P., Zizler V.* Some remarks on farthest points // Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM. – 2011. – **105**, № 1. – P. 119–131.

[311] *Nash-Williams C.St.J.A.* Plane curves with many inscribed rectangles // J. London Math. Soc. (2). – 1972. – **5**. – P. 417–418.

[312] *Nikolov N., Pflug P., Zwonek W.* An example of a bounded $\mathbb{C}$-convex domain which is not biholomorphic to a convex domain// Math. Scand. – 2008. – **102**, № 1. – P. 149–155.

[313] *Nikolov N., Pflug P., Zwonek W.* Estimates for invariant metrics on $\mathbb{C}$-convex domains // Trans. Amer. Math. Soc. – 2011. – **363**, № 12. – P. 6245–6256.

[314] *Neumann J. von.* Über ein ökonomisches System und eine Verallgemeinerung des Browerschen Fixpunktsatzes // Ergebnisse eines Mathematischen Kolloqueiums, 8, 1935–36. – Leipzig, Wein, 1937. – P. 73–83.

[315] *Oeuvres de A. Martineau.* – Paris: CNRS, 1977. – 880 p.

[316] *Poincare H.* Sur les résidus des integrales doubles // C.r. Acad. Sci. – 1886. – **102**. – P. 202–204.

[317] *Pflug P., Zwonek W.* Exhausting domains of the symmetrized bidisc. – arXiv:1008.4010.

[318] *Rado T., Reichelderfer P.T.* Continuous transformation in analysis. – Berlin: Springer, 1955. – 441 p.

[319] *Riemann B.* Theorie der Abelschen Functionen // Borchardt's Journ. für reine und angewandte Math. – 1867. – **54**. – S. 81–135.

[320] *Scott P.R.* Planar rectangular sets and Steiner symmetrization // Elem. Math. – 1998. – **53**, № 1. – P. 36–39.

[321] *Stolzenberg G.* A hull with no analytic structure // J. Math. Mech. – 1963. – **12**, № 1. – P. 103–111.

[322] *Vietoris L.* Über den höheren Zusammenhang kompacter Raume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen // Math. Ann. – 1927. – **97**. – S. 454–472.

[323] *Vygovska I.Yu.* Combinatorial theorems for generalized convex set // Bogolubov readings 2007 dedicated to Yu.A. Mitropolskii, 19 August – 2 September 2007, Kiev: Institute of Math. NASU. – P. 58.

[324] *Vygovska I.Yu.* Some property of convex and $\mathbb{C}$-convex sets. – http://www.impan.pl/BC/Arch/2011/GMCAII.

[325] *Watson A.G.D.* On Mizel's problem // J. London Math. Soc. – 1961. – **37**. – P. 307–308.

[326] *Weyl H.* Die Idee der Riemanschen Fläche. – Stuttgard: Springer, 1955. – 162 s.

[327] *Zamfirescu T.* An infinitesimal version of the Besicovitch–Danzer Characterization of the Circle // Geometriae Dedicata. – 1988. – **27**. – P. 209–212.

[328] *Zapalowski P.* Geometry of symmetrized ellipsoids// Universitatis Iagellonicae Acta Math. – 2008. – **46**. – P. 105–116.

[329] *Zieliński Jerzy.* Calkowita geometria zespolona // Szósty symp. neliniowej analizy. – Toruń, 7–9.09.2011. – P. 49.

[330] *Zelinskii Yu.B.* Caratheodory theorem for linearly convex sets//Classical Analysis. Proc. 6th Intern. Sympos. – London: World Scientific. – 1992. – P. 122–124.

[331] *Zelinskii Yu.B.* Combinatorial theorems of complex analysis // Complex analysis and Potential Theory. Proc. of Conference Satellite to ICM 2006. – London: World Scientific, 2007. – P. 145–148.

[332] *Zelinskij J.B.* Compacts with strongly linearly convex components of their conjugate sets // Complex analysis and application'85. – Sofia: Bulg. Acad. Sci., 1986. – P. 783–791.

[333] *Zelinskii Yu.B.* Geometry of linearly convex sets// Int. conf. "Rimannian geometry and applications", 8–11.6.2008. – Brasov, Romania. – P. 18.

[334] *Zelinskii Yu.B.* Geometry of $\mathbb{C}$-convex sets. – https://www.msu.edu/suceavad/abstractsRIGA2007.html.

[335] *Zelinskii Yu.* Integral complex geometry //Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform. – 2010. – **60**, № 3.– P. 73–80.

[336] *Zelinskii Yu.B.* Integral complex geometry. – http://imath-kiev.academia.edu/YuriZelinski/Talks/69150/Integral complex geometry.

[337] *Zelinskii Yu.B.* Linearly convex complex analysis// Int. conf. "Complex analysis and related topics", 14–19.8.2008. – Alba Iulia, Romania. – P. 47.

[338] *Zelinskii J.B.* Multi-valued mappings in analysis // Colloq. on topology. Eger. August 9 – 13, 1983. Abstracts. – Budapest: Janos Bolyai Math. Soc., 1983. – P. 109.

[339] *Zelinskij Yu.B.* On connection between properties of a compact set in $\mathbb{C}^n$ and its conjugate set // Lect. Notes Math. – 1980. – **798**. – P. 465–476.

[340] *Zelinskij J.B.* On the geometric criteria of strong linear convexity // Complex analysis and application. – Sofia: Bulg. Acad. Sci., 1984. – P. 533–537.

[341] *Zelinsky J.B.* On the structure of linearly convex set // Intern. Conf. on complex analysis and appl. Varna. May 10–17, 1987. Abstracts. – Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 1987. – P. 88.

[342] *Zelinsky J.B.* On the strongly linear convexity // Intern. Conf. on complex analysis and appl. Varna. Sept. 20–27, 1981. Abstracts. – Sofia: Bulg. Acad. Sci., 1981. – P. 198.

[343] *Zelinskij J.B.* On strongly linear convex sets // Intern. Conf. on complex analysis and appl. Varna. May 5–11, 1985. Abstracts. – Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 1985. – P. 76.

[344] *Zelinskii Yu.B.* Some property of $\mathbb{C}$-convex sets. – http://www.impan.pl/BC/Arch/2011/GMCAII/Z-B.pdf; http://bcc.impan.pl/11GMCAII/uploads/Z-B.pdf; http://imath-kiev.academia.edu/YuriZelinski/Talks/46414/Some property of $\mathbb{C}$-convex sets.

[345] *Zelinskii Yu.B.* Some open questions of theory of mappings and complex linearly convex analysis. – http://imath-kiev.academia.edu/YuriZelinski/Talks/69151/Some open questions of theory of mappings.

[346] *Zelinsky Yu.B.* Sur quelques questions des applications multiformes // Colloq. on topology. August 7–12, 1978. Abstracts. – Budapest: Janos Bolyai Math. Soc., 1978. – P. 98.

[347] *Zelinskii Yu.* Some questions of integral complex geometry // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź, Sér. Rech. Déform. – 2011. – **61**, № 3. – P. 15–22.

[348] *Zelinskii Yu.B., Gretsky A.S., Momot I.V.* Some results on generalized convex sets // Classical analysis. Proc. 10-th intern. sympos. Poland, 1999. – Warsaw, 2001. – P. 113–124.

[349] *Zelinskii Yu.B., Tkachuk M.V., Klishchuk B.A.* Integral geometry and Mizel's problem. – arXiv:1204.6287.

[350] *Zelinsky Yu.B., Vygovska I.Yu.* Helly's theorem and its applications// Intern. Conf. on approximation and its applications, Kiev, 26–31 May, 1999. – P. 93.

Оглавление

От редактора **5**

Предисловие **7**

1 Линейно выпуклые множества **15**

1. Основные понятия 15
2. Свойства сопряженных и линейно выпуклых множеств . 21
3. Применение гомологических методов при изучении сопряженных множеств 34
4. Свойства сечений и проекций линейно выпуклых множеств 48
5. Отображения, сохраняющие линейную выпуклость 54
6. Внутренняя характеристика мебиусовых отображений . . 62

2 Сильно линейно выпуклые множества **65**

7. Линейно выпуклые области с гладкими границами 65
8. Ацикличные многозначные отображения многообразий Грассмана 76
9. Геометрические свойства сильно линейно выпуклых множеств 81

10. Множества, для которых все компоненты сопряженного множества сильно линейно выпуклы 93
11. Случаи совпадения с выпуклостью 105
12. Проекции сильно линейно выпуклых компактов 120
13. Локальная линейная выпуклость 124

3 Комплексные оболочки **135**
14. Теорема Хана–Банаха 135
15. Комплексные оболочки (теорема Крейна–Мильмана) . . 138
16. О строении m-выпуклых компактов 152
17. Семейства связных инвариантных относительно пересечений множеств 162

4 Многозначные функции **165**
18. Линейно выпуклые функции 165
19. Сопряженные функции 167
20. Дифференцирование многозначных функций 175
21. Производные по направлениям и субдифференциалы . . 182

5 Обобщенно выпуклые множества **187**
22. Топологическая классификация $(n-1)$-выпуклых множеств с гладкой границей 187
23. Связь $(n-1)$-выпуклости с $(n-1)$-обозримостью 194
25. Вариации к теореме Каратеодори 197
25. Вариации к теореме Хелли 201
26. О послойной линейной выпуклости 206
27. Критерий выпуклости компакта 211
28. Критерий сильной линейной выпуклости компакта . . . 214
29. Декартовы произведения компактов в многомерном гиперкомплексном пространстве 216

6 Комментарии и приложения **223**

30. Исторические справки, комментарии, проблемы 223

31. Приложение 247

Литература **253**

Наукове видання

Юрий Борисович Зелинский

ВЫПУКЛОСТЬ
ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ

Редактор *М.В. Ткачук*

Комп'ютерний набір *Л.І. Грибович*

Підписано до друку 4.12.2012. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк. Фіз. друк. арк. 17,5. Умов. друк. арк. 16,27. Зам. № 120. Тираж 300 пр.

Інститут математики НАН України
01601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3