Редукція і точні розв'язки рівняння нелінійної теплопровідності

Анатолій Ф. Баранник [1], *Тетяна А. Баранник* [2], *Іван І. Юрик* [3]

[1)] *Поморський університет, Слупськ, Польща*
E-mail: *anatolij.barannyk@gmail.com*

[2)] *Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка, Україна*
E-mail: *barannykt@gmail.com*

[3)] *Національний університет харчових технологій, Київ, Україна*
E-mail: *i.yu@ukr.net*

Розглядається задача побудови точних розв'язків нелінійного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + H(u). \tag{1}$$

Це рівняння описує нестаціонарну теплопровідність у нерухомому середовищі, якщо коефіцієнт теплопровідності та швидкість реакції є довільними функціями температури. Групові властивості та інваріантні розв'язки рівнянь даного вигляду описано в [2]. Конкретні рівняння даного вигляду та їх розв'язки наведено в [6].

У роботі [3] проведено групову класифікацію рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{2}$$

і отримано вичерпний перелік інваріантних розв'язків цього рівняння. В [4] запропоновано метод пошуку функцій $F(u)$, для яких рівняння (2) має розв'язки вигляду

$$u = u(z), \quad z = xt^{-1/2}, \quad 0 \le x < \infty.$$

Ефективним методом побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики є метод узагальненого відокремлення змінних (див. [1,2,5,7]). Для побудови точних розв'язків із узагальненим відокремленням змінних рівняння (1) ми використовуємо підстановку

$$p(x) = \omega_1(t)\varphi(u) + \omega_2(t), \tag{3}$$

де $p(x)$є розв'язком рівняння

$$(p')^2 = ap^2 + b, \quad a \neq 0. \tag{4}$$

Означення. Будемо говорити, що рівняння (1) допускає підстановку (3), (4), якщо ця підстановка редукує рівняння (1) до системи двох звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $\omega_1(t)$ та $\omega_2(t)$.

Теорема. *Якщо рівняння* (1) *допускає підстановку* (3), (4), *то функції* $F(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються за формулами*

$$F(u) = \mu_1 + (\lambda_1 - 2\mu_2)\varphi - 2\lambda_2\varphi^2, \tag{5}$$

$$H(u) = \frac{1}{\varphi'}\left[\lambda_2 a\varphi^3 - (\lambda_1 - \mu_2)a\varphi^2 - (\mu_1 a - \lambda_2)\varphi + \mu_3\right], \tag{6}$$

де $\varphi = \varphi(u)$ *є розв'язком рівняння*

$$-\left[\mu_1 + (\lambda_1 - 2\mu_2)\varphi - 2\lambda_2\varphi^2\right]\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + \left[(\lambda_1 - 2\mu_2)\varphi' - 4\lambda_2\varphi\varphi'\right]\frac{1}{(\varphi')^2} = \lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'} + \mu_2\frac{1}{\varphi'}, \qquad (7)$$

де λ_i, μ_i *— дійсні числа.*

Підстановка (3), (4) редукує рівняння (1) до системи рівнянь

$$\frac{\omega_1'}{\omega_1} + \lambda_1 a\frac{\omega_2}{\omega_1} + \lambda_2 a\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + \lambda_2 b\frac{1}{\omega_1^2} + \lambda_3 = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{\omega_2'}{\omega_1} + \mu_1 a\frac{\omega_2}{\omega_1} + \mu_2 a\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + \mu_2 b\frac{1}{\omega_1^2} + \mu_3 = 0. \qquad (9)$$

Можна вважати , що F є однією з таких функцій:

1) $F = -2\lambda_2\varphi^2, \quad \lambda_2 \neq 0;$
2) $F = -2\lambda_2\varphi^2 + \mu_1, \quad \mu_1, \lambda_2 \neq 0;$
3) $F = (\lambda_1 - 2\mu_2)\varphi + \mu_1, \quad \lambda_1 - 2\mu_2 \neq 0;$
4) $F = \mu_1, \quad \mu_1 \neq 0.$

Інтегруючи систему рівнянь (8), (9), а також рівняння (7), знаходимо за допомогою формул (5), (6) і підстановки (3), (4) точні розв'язки рівняння (1).

Література

[1] Баранник А.Ф., Баранник Т.А., Юрик І.І., Точні розв'язки з узагальненими відокремленням змінних рівняння нелінійної теплопровідності з джерелом, *Укр. матем. журн.* **76** (2024), no. 2, 179–197.

[2] Dorodnitsyn V.A., Invariant solutions of the nonlinear heat equation with a source, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* **22** (1982), no. 6, 1393–1400.

[3] Ovsjannikov L.V. Group relations of the equation of non-linear heat conductivity, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **125** (1959), 492–495.

[4] Philip J.R., General method of exact solutions of the concentration-dependent diffusion equation, *Austral. J. Phys.* **13** (1960), no. 1, 1–12.

[5] Polyanin A.D., Functional separable solutions of nonlinear convection-diffusion equations with variable coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **73** (2019), 379–390.

[6] Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Handbook of nonlinear partial differential equations, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2012.

[7] Polyanin A.D., Zhurov A.I., Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: applications to reaction-diffusion type equations, *Appl. Math. Lett.* **100** (2020), 106055, 7 pp.