

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Історія математики в культурній спадщині Європи

**Том III: Математика Європи
від Середньовіччя до XVII століття**

Наталія Іванова

Київ

2026

УДК 51(091), 51(092)

Затверджено до друку
Вченою радою Інституту математики НАН України
(протокол № 16 від 16 грудня 2025 р.)

Історія математики в культурній спадщині Європи Том III: Математика Європи від Середньовіччя до XVII століття. Київ: Інститут математики НАН України, 2026. 219 с.

Матеріал цього тому присвячений еволюції математичної думки в Європі від Середньовіччя до XVII століття. Простежено шлях від рецепції античних і східних джерел через університетську традицію та практичну математику пізнього Середньовіччя до наукових проривів доби Відродження. Завершується книга аналізом математики XVII століття — періоду становлення нових методів, символічної мови та внутрішньо впорядкованої наукової системи. Показано, як математика поступово перетворюється на самостійну дисципліну з власною логікою розвитку, що визначила подальшу історію науки. Книга адресована дослідникам історії науки й математики, викладачам і студентам відповідних спеціальностей, а також широкому колу читачів, зацікавлених історією математики та європейської культури.

Рецензенти:

Ірина ЄГОРЧЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, Інститут математики НАН України
Ярослав ПРИТУЛА, канд. фіз.-мат. наук, Львівський національний університет
імені Івана Франка

DOI <https://doi.org/10.3842/imath.2026.book01.3>

ISBN 978-617-14-0506-6 (загальний, електронне видання)

ISBN 978-617-14-0509-7 (Т. 3, електронне видання)

© Наталія Іванова

Зміст

Європейська математика Середньовіччя	6
Європа у IV–XII століттях: хранителі знань у «темні віки»	8
Чому християнство не відкинуло античну науку?	10
Боецій	13
Беда Преподобний	16
Алкуїн	18
Герберт Аврілакський	20
Становлення наукового мислення	22
Університети	23
Леонардо з Пізи (Фібоначчі).....	26
Йордан Неморарій	31
Математика готичної епохи	33
Томас Брадвардін	35
Річард Суайнсгед.....	37
Ніколя Орем	38
Розвиток фізики	40
Епоха Відродження.....	42
Винайдення книгодрукування в Європі.....	44
Йоганн Мюллер (Регіомонтан).....	46
Теорія перспективи	48
Леон Баттіста Альберті	51
Ніколя Шюке	53
Лука Пачолі	55
Леонардо да Вінчі	59
Альвар Томас	63
Франческо Мавроліко	64
Коссисти	65
Міхаель Штіфель.....	67
Миколай Коперник.....	68
Альбрехт Дюрер	70
Герард Меркатор.....	73
Розв'язання рівнянь третього й четвертого степенів.....	75
Рафаель Бомбеллі	77

Уявні величини.....	79
Франсуа Вієт	80
Сімон Стевін і десяткові дроби.....	81
Значення математики епохи Відродження.....	83
Математика XVII століття.....	85
Передумови математичного вибуху	86
Марен Мерсенн.....	88
Організація наукової праці.....	90
Галілео Галілей.....	92
Вінченцо Вівіані	94
Йоганн Кеплер	96
Пауль Гульдін	100
Джованні Домініко Кассіні	102
Логарифми	103
Жиль де Сен-Венсан	106
Арифметика і алгебра.....	108
Томас Гарріот	110
Альбер Жирар	112
Йоганн Фаульгабер	114
Пітер Роте.....	116
Юст Бюрги.....	117
Клод Гаспар Баше де Мезеріак	118
Рене Декарт	119
Теорія чисел.....	126
П'єр де Ферма	127
Блез Паскаль	130
Комбінаторика і теорія ймовірностей.....	137
Франс ван Схоотен.....	139
Крістіан Гюйгенс	140
Якоб Бернуллі.....	144
Геометрія	147
Жерар Дезарг.....	152
Еванджеліста Торрічеллі.....	153
Бонавентура Кавальєрі	154
Філіп де ла Гір.....	156
Джованні Чева	157

Ніколаус Меркатор.....	158
Вільям Нейл.....	159
Вільям Браункер.....	160
Джон Валліс	162
Ісаак Барроу.....	164
Джеймс Грегорі.....	167
Ісаак Ньютон	169
Готфрід Вільгельм Лейбніц	177
Інфінітезимальні методи	183
Диференціальне та інтегральне числення	192
Суперечка між Ньютоном і Лейбніцем	193
Жиль де Роберваль	195
Йоганн Худде	197
Крістофер Рен	199
Георг Мор	201
Секі Такакадзу.....	202
Еренфрід Вальтер фон Чірнауз.....	204
Мішель Ролль	205
П'єр Вариньон.....	206
Йоганн Бернуллі.....	208
Гійом Франсуа Лопіталь	209
Суперечка Лопіталя та Йоганна Бернуллі	210
Підсумки XVII століття.....	211
Замість епілогу.....	213
Використані джерела	215

Європейська математика Середньовіччя



Хільдегарда Бінгенська, Liber divinatorum operum, XII ст.

Після розпаду Західної Римської імперії у 476 році, коли останнього імператора Ромула Августула було повалено варварським вождем Одоакром, Європа вступила в епоху, яку традиційно називають Середньовіччям. Цей період, що охоплює приблизно тисячу років (від кінця V до кінця XV століття), часто сприймається як час культурного й наукового занепаду порівняно з античністю. Однак сучасна наука дедалі частіше підкреслює, що картина була складнішою: у Середні віки відбувалися важливі процеси, які заклали основи майбутнього розвитку європейської науки.

Що таке Середньовіччя? Сам термін указує на «середній», перехідний етап між античністю та добою Відродження. Відродження — це час, коли Європа знову звернулася до античної спадщини, сприйнявши її як щось утрачене й таке, що потребує «відродження». Таке розуміння виникло не випадково: упродовж перших століть Середньовіччя справді спостерігався різкий занепад і в мистецтві, і в науці. Цей час іноді називають «темними віками» — особливо період із V по X століття. Наука не просто сповільнила свій розвиток — вона в багатьох аспектах відкотилася назад, а разом із нею

занепали навички систематичного мислення, знання грецької мови та математичні традиції.

Після падіння централізованої влади Риму Європа опинилася розділеною на безліч варварських королівств — таких як королівство остготів в Італії, вестготів в Іспанії, франків у Галлії. Разом із утратою політичної єдності зникла й система античної освіти, пов'язана з риторикою, граматику, математику та філософією. Міська культура занепадала, школи закривалися, рівень грамотності падав. Латинська мова зберігалася в церкві та серед освічених верств, але поступово перетворювалася на «мертву» мову учених і духовенства.

Найстійкішою структурою цього часу стала християнська церква. Саме церква взяла на себе збереження решток античного знання. У монастирях переписували латинські тексти, хоча здебільшого це були твори релігійного характеру. Проте саме завдяки монастирським скрипторіям до нас дійшли й деякі праці античних філософів і математиків — наприклад, Боеція (бл. 480–524), останнього римського вченого.

Тут ми стикаємося з парадоксом. З одного боку, саме зі зміцненням влади християнської церкви починаються переслідування язичницької спадщини. Академію Платона, що проіснувала майже тисячу років, було закрито як осередок єресі та язичництва. Звинувачення в язичництві чи поклонінні дияволу ставали реальною загрозою для кожного, хто займався світською наукою. Наука на території Європи майже повністю припиняє свій розвиток, а вчені або змушені діяти потай, або тікати — найчастіше до ісламського світу, де античні знання не лише зберігалися, а й активно розвивалися.

З іншого боку, якщо наука в Європі й зберігалася бодай у якомусь вигляді — то лише завдяки церкві. Саме в монастирях і кафедральних школах можна було знайти доступ до залишків античних текстів. Саме духовні особи мали час і освіту, щоб вивчати філософію, арифметику та логіку — хоча й у вузьких межах і під суворим церковним контролем. Таким чином, церква одночасно і знищувала, і рятувала науку — забороняючи вільну думку, але зберігаючи книги та грамотність.

Боецій, наприклад, намагався передати грецьку наукову спадщину латинському Заходу, перекладав твори Арістотеля, Евкліда, Порфирія та писав власні трактати, особливо важливі для розуміння античної арифметики й музики. Його діяльність символізує спробу «врятувати» античну культуру в темряві, що насувалася на раннє Середньовіччя.

У VIII столітті, з утвердженням династії Каролінгів і особливо за імператора Карла Великого (коронованого у 800 році), у Західній Європі починається поживлення інтересу до освіти. Це явище відоме як Каролінзьке відродження. При дворі Карла та в монастирях створюються школи, у яких викладають «сім вільних мистецтв»: граматику, риторіку, діалектику (тривіум), а також арифметику, геометрію, астрономію й музику (квадривіум). Освіта, як і раніше, залишалася привілеєм духовенства, проте саме в цей період було закладено основи середньовічної латинської ученості.

Тут варто згадати Алкуїна (бл. 735–804) — англосаксонського вченого, запрошеного Карлом Великим для реформи освіти. Він зробив значний внесок у розвиток навчальних програм і поширення латинської грамотності.

Попри окремі спалахи активності, упродовж більшої частини раннього Середньовіччя (V–XI століття) Європа залишалася культурно ізольованою від грецько-візантійського та арабо-ісламського світу, де антична спадщина активно розвивалася. Грецьку мову на Заході забули, і доступ до оригінальних праць античних авторів було втрачено. Короткі латинські компіляції — часто неповні й спотворені — довгий час замінювали повноцінні наукові тексти.



Християнин і мавр грають у шахи, з «Книги ігор» Альфонсо X, близько 1285 р.

Ситуація змінилася лише з XII століття, коли внаслідок контактів з ісламським світом — через Іспанію, Сицилію та хрестові походи — почалася масштабна передача арабських (а через них і грецьких) наукових текстів до Європи. Цей процес став важливим поштовхом для інтелектуального піднесення, відомого як «високе Середньовіччя».

Європа у IV–XII століттях: хранителі знань у «темні віки»

З падінням Західної Римської імперії у 476 році Західна Європа вступає в довгий і тривожний період політичної нестабільності, соціальних потрясінь і культурного занепаду. Території колишньої імперії опиняються поділеними між різними «варварськими» королівствами. Континент стає ареною безперервних вторгнень і

спустошень: на зміну готам приходять франки, потім вторгаються гуни, вікінги, араби, угорці та нормани. Міста занепадають, торгівля завмирає, стара система освіти руйнується. Наука у звичному для нас розумінні зникає.



Бог, що створює Всесвіт за допомогою циркуля. Мініатюра з французької Біблії, 1220–1230 роки

Розвиток математики практично припиняється. Потреба в обчисленнях обмежується суто прикладними завданнями — лічбою, веденням господарства, календарними розрахунками. Основна увага приділяється визначенню дат християнських свят — передусім Великодня, пов'язаного зі складним місячно-сонячним календарем. Вивчення арифметики, там, де воно ще зберігалось, спиралося на латинський переклад античного підручника Нікомаха Гераського, зроблений у VI столітті римським філософом Боецієм. Цей переклад був істотно скорочений порівняно з оригіналом, а сам текст Нікомаха — радше філософський, ніж практичний трактат.

Попри це, навіть у цей час повного розпаду й «темряви» — умовно званий раннім Середньовіччям — зберігається слабке, але безперервне полум'я інтелектуальної традиції. Воно підтримується зусиллями окремих мислителів і християнських учених, які, як правило, діяли в монастирях. Саме завдяки цим «хранителям знань» Європа не втратила повністю зв'язок із античною спадщиною. Найвідомішими серед них були Боецій, Беда Преподобний, Алкуїн і Герберт Аврілакський.

Чому християнство не відкинуло античну науку?

На перший погляд це може здаватися парадоксальним: християнська культура Середньовіччя, що активно відкидала язичництво й часом руйнувала пам'ятки античної культури, водночас із благоговінням ставилася до праць давньогрецьких авторів — особливо таких, як Аристотель, Евклід, Птолемей чи Гален. Як сталося, що в суспільстві, де вважалося, що поза християнством немає істини, переклади та коментарі до творів язичницьких філософів стали основою середньовічної освіти?

Відповідь полягає в особливому ставленні християнських мислителів до знання як такого. Уже з ранньохристиянських часів сформувалася ідея, що істина — універсальна, а отже, навіть язичники могли торкнутися часткової істини, якщо вона узгоджується з християнським ученням. У цьому сенсі античні тексти, особливо з галузей логіки, математики, астрономії та природознавства, розглядалися не як носії ворожої філософії, а як інструменти, придатні для тлумачення та зміцнення християнського світогляду.

Особливу роль у цьому процесі відіграв ранньохристиянський мислитель Августин Блаженний¹. Він стверджував, що істинна філософія не може суперечити християнській вірі, а тому окремі елементи язичницької вченості можна використовувати — як, за його метафорою, давні євреї взяли в єгиптян золото, щоб ужити його на славу Бога. Так само й християни могли «позичити» у греків знання, очищене від язичницького духу, і звернути його на служіння істині.



Беноццо Гоццолі, «Св. Августин навчає в Римі», розпис церкви Сант-Агостіно в Сан-Джиміньяно, 1464–1465 рр.

¹ Святому Августину належить і така цитата: «Добрий християнин не повинен вірити математикам та всім іншим, хто виголошує пусті пророцтва... Є ймовірність, що математики вже уклали союз із дияволом, аби затьмарювати душі й навіки скувати людину кайданами пекла». У цьому контексті, звісно, термін «математики» стосується астрологів, яких у той час часто звинувачували в чаклунстві та ересі.

Надзвичайно важливим був і внесок Боеція в передачу античного знання християнському світові. Боецій поставив собі грандіозну мету: зберегти й передати латинському Заходу філософську та наукову спадщину греків, особливо твори Платона й Аристотеля. Хоча він не встиг здійснити весь задум, його переклади й коментарі до логічних, математичних і музичних текстів стали наріжними каменями середньовічної ученості.

Боецій не лише перекладав античні тексти, а й активно адаптував їх до християнської інтелектуальної традиції. Він одним із перших виклав концепцію семи вільних мистецтв, поділених на тривіум (граматика, риторика, логіка) і квадрівіум (арифметика, геометрія, музика, астрономія) — схему, яка стала основою освітньої системи аж до пізнього Середньовіччя. Математичні дисципліни в межах квадрівіуму сприймалися не як язичницька спадщина, а як шлях до пізнання порядку й гармонії створеного світу, тобто як інструмент для розуміння Божого задуму.



Йос ван Гент, Педро Берругете, «Боецій», близько 1472–1476 рр.

Показово, що у своєму найвідомішому творі — «Утіха філософією» — Боецій взагалі не посилається на християнські тексти, розмірковуючи про долю, справедливість і сенс життя мовою античної стоїчної та платонівської філософії. Це не означало відступу від віри — навпаки, він показував, що розум і віра можуть співіснувати, і що філософія, навіть язичницького походження, може бути моральною опорою для християнина. Таке ставлення до античної думки, попри всю обережність і вибірковість, допомогло християнській культурі сприйняти математику та інші науки не як загрозу, а як засіб виховання розуму й волі.

Боецій писав у переломну епоху, коли зв'язок із грецькою освіченістю стрімко слабшав. Його праці стали єдиним джерелом знайомства з античною логікою та математикою для багатьох поколінь середньовічних учених. Саме через нього античне знання — уже осмислене в межах християнської філософії — увійшло до світогляду Середньовіччя й зберегло свою легітимність і цінність.

Однак було б помилково вважати, що саме авторитет окремих мислителів, як-от Августина чи Боеція, сам по собі запобіг відкиданню античної науки. Навпаки — це було лише частиною ширшої та складнішої системи чинників, які разом сприяли тому, що математика залишилася в інтелектуальному житті Середньовіччя.

Насамперед саме розуміння математики в християнському Середньовіччі розвивалося в руслі платонізму та неоплатонізму. Числа, форми, гармонія розглядалися не просто як абстрактні конструкції людського розуму, а як відображення раціонального порядку, установленого Богом. Ця ідея чудово узгоджувалася з уявленням про створений всесвіт як логічний, впорядкований механізм. Математика таким чином ставала не язичницькою наукою, а, навпаки, одним із шляхів пізнання Бога.

Ця думка була особливо важливою для монастирської освіти, у якій квадривіум — система чотирьох наук (арифметика, геометрія, музика й астрономія) — сприймався як ключ до розуміння гармонії творіння. Кожна з цих дисциплін уважалася гідною вивчення, оскільки допомагала бачити красу й порядок Божого світу.

Античні тексти, такі як твори Евкліда, Платона, Аристотеля, Птолемея, не сприймалися як «язичницькі» у тому сенсі, в якому могли сприйматися, наприклад, римські поеми чи міфологічні твори. Навпаки, філософські й математичні праці античних авторів розглядалися як носії раціонального знання, яке, на думку багатьох християнських учених, могло бути використане на славу Бога. Евклід став взірцем логічного викладу, Аристотель — авторитетом у міркуваннях про природу, а Птолемей — свідченням величчя людського розуму в поясненні руху небесних тіл. Цей підхід виражався в концепції *praeparatio evangelica* — ідеї про те, що навіть нехристиянська мудрість могла готувати ґрунт для християнської істини.

Отже, античні твори не просто зберігалися, а й переосмислювалися в нових, теологічних і філософських рамках. Найяскравішим прикладом такого переосмислення стало вчення Фоми Аквінського, який у XIII столітті на основі праць Аристотеля створив струнку систему християнської філософії, інтегрувавши в неї елементи логіки, фізики й метафізики. Це показало, що раціональне знання й християнська віра не протистоять одне одному, а можуть бути узгоджені.

Варто пам'ятати, що значна частина античної математичної спадщини повернулася до християнської Європи не безпосередньо, а через арабський світ. У період IX–XII століть мусульманські вчені не лише зберегли, а й розвинули античні ідеї, зокрема в математиці. Твори Евкліда, Архімеда, Птолемея й Діофанта були перекладені арабською мовою, прокоментовані, доповнені, а згодом повернулися до Європи в латинських перекладах.

Цей шлях відіграв важливу роль: отримуючи тексти з ісламського світу, християни сприймали їх не як частину «язичницького» минулого, а як раціональне знання, перевірене й удосконалене вченими, яких часто шанували як «філософів Сходу». Перекладачі, такі як Адельард із Бата, Герард Кремонський та інші, ретельно адаптовували ці праці, надаючи їм форму, прийнятну для християнської освіти.

Нарешті, математика виявилася необхідною для розв'язання конкретних завдань християнського життя: обчислення церковного календаря, особливо дати Великодня, вимагало складних підрахунків; архітектура соборів — геометричних знань; музика літургії — теорії пропорцій і гармонії; астрономія — для орієнтації храмів, складання календарів і богословських тлумачень руху небесних тіл.

Ці практичні потреби зробили математику невід'ємною частиною церковної та монастирської освіти. Уже в Каролінзьку добу (VIII–IX ст.) квадживіум міцно входить до системи *liberal arts* — основи загальної освіти. Із XIII століття, з розвитком університетів, цей курс стає базовим елементом філософських факультетів, а математика — одним із обов'язкових предметів для богословів і лікарів.

Отже, середньовічне християнство поєднувало відкинення язичницького культу з пошаною до античної науки. Воно очищало античну спадщину від «омани», тлумачило її крізь призму християнської теології й наголошувало, що істинне знання, навіть якщо воно спочатку прийшло від язичників, може служити справі віри.

Боецій

Одним із ключових посередників між античним і середньовічним знанням був Аніцій Манлій Северин Боецій (бл. 480 — 524) — філософ-неоплатонік, державний діяч і вчений, чия діяльність мала вирішальний вплив на інтелектуальний розвиток Європи в ранньому Середньовіччі. Освічений у дусі пізньоантичної елліністичної традиції, Боецій прагнув зберегти й передати латинському світові найкраще з грецької науки та філософії. Його можна назвати останнім римлянином і першим учителем Середньовіччя — «шкільним наставником Європи», як пізніше висловився історик Р. В. Саутерн.



Боецій замислив масштабний проєкт: перекласти латиною та забезпечити коментарями всі твори Аристотеля й Платона, а також праці з дисциплін квадживію — арифметики, геометрії, астрономії та музики. Повністю здійснити

цей задум він не встиг, однак навіть та частина спадщини, що залишилася, визначила структуру середньовічної освіти на багато століть.



«Боецій з монохордом». Фрагмент книжкової мініатюри в кембриджській рукописі, бл. 1150 р.

У трактатах «Основи арифметики» (*De institutione arithmetica libri II*) та «Основи музики» (*De institutione musica libri V*, незавершений) Боецій виклав учення піфагорійської школи й Нікомаха Герасського в адаптованій, доступній формі. Ці праці стали базовими підручниками з математики та музичної теорії в монастирських школах аж до XII століття. У трактаті з арифметики він класифікував числа й числові відношення, починаючи з понять парного й непарного, і запровадив складну термінологію, що заклала основу європейської числової теорії. У *De musica* він розробив ставший класичним для Середньовіччя поділ музики на три види: *musica mundana* (гармонія космосу), *musica humana* (гармонія людської душі й тіла) та *musica instrumentalis* (звучна музика). Цей поділ не лише відображав античні уявлення про світ як числово-музично впорядкований, але й формував спосіб мислення, у якому музика й математика — два аспекти єдиного космічного закону.

Боецій, імовірно, працював також над латинськими версіями геометрії Евкліда й астрономії Птолемея, однак ці переклади до нас не дійшли або збереглися лише у фрагментах. Попри це, його виклад Начал Евкліда, навіть без строгих доведень, відіграв важливу роль у збереженні уявлення про евклідову геометрію в латинській Європі.

Не менш значущим був внесок Боеція у розвиток логіки. Він переклав і прокоментував цілу низку аристотелівських творів — від Категорій до Аналітик і Топіки, а також двічі коментував «Вступ» Порфирія, у якому розглядалася одна з центральних проблем

середньовічної філософії — проблема універсалій. Коментарі Боеція виходили за межі простого перекладу: у них він розвивав власні поняття, викладав складні місця своїми словами, створював схеми й навіть пропонував оригінальні логічні конструкції. Сам Боецій писав: «Я не йду покірно за задумом іншого [автора] й не зв'язую себе найсуворішим законом перекладу, а, трохи вільніше відхиляючись від чужої дороги, ступаю не слід у слід».



«Margarita Philosophica» (1503). Титульна сторінка четвертої книги, присвяченої арифметиці.
Зображено змагання Піфагора (праворуч) і Боеція (ліворуч), суддею якого виступає
персоніфікована Арифметика.

Філософська та богословська спадщина Боеція також мала величезний вплив. Його пізній твір «Утіха філософією», написаний у в'язниці незадовго до страти, став одним із найчитаніших текстів Середньовіччя. Хоча в ньому немає християнської термінології, це діалог між самим Боецієм і алегоричною постаттю Філософії, витриманий у дусі античного стоїцизму та неоплатонізму. Твір спонукав середньовічних читачів до роздумів про долю, розум і людські страждання.

Боеція було страчено з політичних мотивів — за звинуваченням у державній зраді при дворі остготського короля Теодоріха. Згодом його визнали мучеником і навіть канонізували, а його інтелектуальна спадщина стала наріжним каменем середньовічної освіти.

Отже, Боецій — не стільки оригінальний учений, скільки великий хранитель античної спадщини. Завдяки його працям латинський Захід не втратив зв'язку з грецькою наукою, і саме через Боеція ідеї Піфагора, Платона, Арістотеля й Нікомаха увійшли до канону середньовічної культури, підготувавши ґрунт для майбутнього відродження наук у XII столітті.

Беда Преподобний

Беда Преподобний (прибл. 672/673 — 735) жив і працював у монастирі святих Петра і Павла в Монквермуті та Джарроу (на території сучасної Північної Англії), де здобув класичну освіту за римською традицією. Беда був людиною виняткової ерудиції для свого часу, і його вплив на розвиток європейської науки відчувався протягом століть.

Хоча Беда найбільш відомий як автор «Церковної історії народу англів» — першої систематичної історичної праці, написаної в Англії, його заслуги у галузі наук квадрили (особливо астрономії, арифметики та хронології) не менш значущі. Він не був новатором у математиці, але його роль як хранителя й систематизатора античного знання робить його важливою постаттю для розуміння того, як антична наука проникала до ранньосередньовічної Європи.



Бартоломе Роман, «Святой Беда», середина XVII століття

У творі «Про обчислення часу» (*De temporum ratione*, 725), написаному латинською мовою, Беда об'єднав богословські, астрономічні й арифметичні знання в єдину працю, покликану допомогти монахам точно визначати дати християнських свят — передусім Великодня.

Задача обчислення дати Великодня, як це не дивно, вимагала досить складних математичних і астрономічних міркувань. Великдень мав припадати на першу неділю після першої повні, що настає після весняного рівнодення. Але Місяць і Сонце

рухаються за нерівномірними циклами: місячне коло повторюється кожні 19 років, сонячне — кожні 28, і лише через 532 роки (так званий великий круг) календарний цикл повністю збігається. Беда систематизував ці знання, виклав правила обчислень і, по суті, застосував методи розв’язання невизначених лінійних рівнянь у цілих числах задовго до того, як це стало частиною офіційної математичної традиції.

Його методи обчислення Великодня та інших свят були настільки точними й зручними, що використовувалися по всій латинській Європі протягом століть і зберігалися навіть після переходу від юліанського до григоріанського календаря.

Беда не лише обчислював дати свят — він прагнув вписати природні явища у християнську картину світу, поєднуючи античну науку, ранньохристиянську традицію та практичне монастирське життя. Його цікавив рух небесних тіл, устрій календарів різних народів (римського, юдейського, англосаксонського), тривалість пір року й чергування днів тижня. Беда детально описує «арифметику часу» — як, наприклад, обчислюється кількість днів між повнями або скільки років минуло від Створення світу до пришествя Христа (за різними системами).



Дж. Д. Пенроуз, Останній розділ (Преподобний Беда диктує Євангеліє від Іоанна на смертному ложі), 1902 р.

У тому ж трактаті *De temporum ratione* він подає докладний опис лічби на пальцях — системи, у якій різні положення пальців позначали одиниці, десятки, сотні, тисячі й навіть мільйони. Цей метод походив з античності й став основою характерного поділу чисел у середньовічній арифметиці: *digiti* (пальці) — одиниці, *articuli* (суглоби) — десятки, *numeri compositi* — складені числа. Це було не просто описання жестів — це була система подання чисел до появи арабської нотації, доступна й наочна для монаха, ученого та переписувача.

Беда свідомо мислив себе як ланку в ланцюгу передання знань. Він писав, що його метою було «корисне викладення давніх знань для навчання молодих монахів». Його твори поширювалися по всій Каролінзькій Європі та справили глибокий вплив на інтелектуальну програму Карла Великого. Значною мірою завдяки працям Беди в VIII–IX століттях формується уявлення про монастирську школу як хранительку наукової традиції — хоч і в спрощеній, але живій формі.

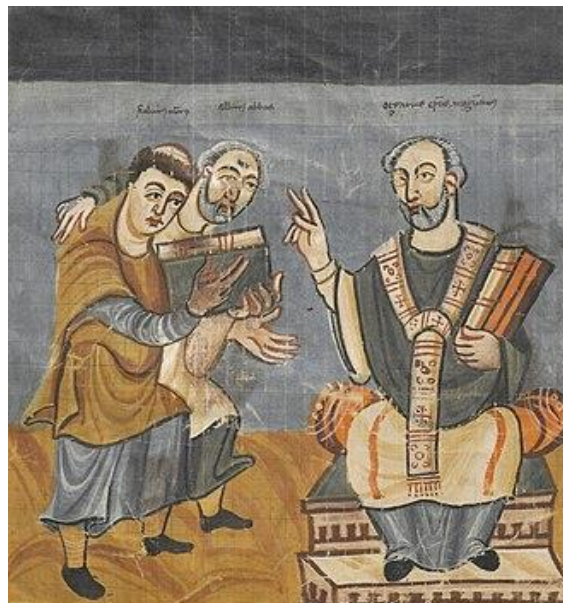
Алкуїн

Алкуїн Йоркський (прибл. 735–804) — одна з ключових постатей Каролінзького відродження, культурного та освітнього піднесення, пов'язаного з ім'ям імператора Карла Великого. Родом з Англії, учень відомої Йоркської школи, Алкуїн став не лише богословом, граматистом і поетом, а й організатором освіти, автором підручників і популяризатором елементарної математики.



Він був не стільки вченим-відкривачем, скільки просвітителем, який прагнув пристосувати античні знання до потреб нової християнської Європи, а отже, зберегти, адаптувати й передати основи раціонального мислення в епоху, коли наука ще лише формувалася як частина інтелектуальної культури.

Карл Великий поставив перед собою амбітну мету: відродити науку й ученість у своїй імперії. Він запрошував до двору найкращих інтелектуалів свого часу — і Алкуїн став його головним радником з питань освіти. Саме Алкуїн очолив дворцову школу в Ахені, де навчав як самого імператора, так і його синів, приближених, майбутніх єпископів і абатів. Він брав участь у реформі письма (каролінзьке мінусколо), складанні підручників і розробці програм за «семи вільними мистецтвами» — граматикою, риторикою, діалектикою, арифметикою, геометрією, астрономією та музикою.



Рабан Мавр (ліворуч) і Алкуїн (посередині) підносять свої книги єпископу Отгару Майнцькому, мініатюра з рукопису Фулденса, бл. 836 р.

Математиці в цій системі належала особлива роль: арифметика й геометрія були не просто корисними навичками, а засобами проникнення в гармонію світу, створеного Богом. Алкуїн, слідуючи традиції Боеція, уявляв числа як основу порядку. У своєму творі «Задачі для загострення розуму юних» (*Propositiones ad acuendos juvenes*) він зібрав збірник задач-головоломок, які пропонувалися учням у рамках навчання арифметиці та логіці.

Багато з цих задач мали форму діалогів між учителем і учнем і нерідко були логічними загадками або вправами на кмітливість. Наприклад, одна з найвідоміших: «На березі річки стоять вовк, коза і капуста. Як переправити їх через річку, якщо човен вміщує лише одного пасажера, і не можна залишати вовка з козою, а козу з капустою?»

Ці та інші задачі, відомі до сьогодні, не стільки тренували обчислювальні навички, скільки розвивали здатність до міркування, планування та аналізу умов. Таким чином, Алкуїн розглядав математику не як абстрактну дисципліну, а як частину загального виховання розуму.



Св. Алкуїн, статуя на даху Віденського собору (фото з [сайту Вікіпедія](#))

Алкуїн не створював оригінальної математичної теорії, але переосмислював античні джерела, роблячи їх доступними для учнів свого часу. Він працював із працями Боеція, Нікомаха та інших пізньоантичних авторів, спрощував і переказував їхні положення. Його твори допомогли підтримати елементарну математичну грамотність у монастирях і при дворі, а завдяки його зусиллям базові знання про числа й геометрію збереглися в шкільних програмах на багато століть.

В історії науки Алкуїн — це не відкривач, а посередник і організатор, свого роду міст між античним знанням і середньовічною культурою. Його постать демонструє, наскільки важливими в Середньовіччі були не лише самі ідеї, а й їхнє передання, пояснення, адаптація для нової аудиторії.

Без таких учителів, як Алкуїн, Європа, можливо, не змогла б зберегти й переосмислити античну наукову традицію — і, зрештою, підготуватися до справжнього розквіту математики у пізньому Середньовіччі та Відродженні.

Герберт Аврілакський

Герберт з Оріяка (прибл. 946–1003), більш відомий як папа Сильвестр II, — постать легендарна і символічна. Він був не просто вченим у часи, коли саме слово «вчений» ще не мало стійкого значення, а й одним із перших європейців, хто свідомо вивчав науку в арабському світі, переймаючи звідти математичні знання та інструменти, які змінять інтелектуальний ландшафт Європи.

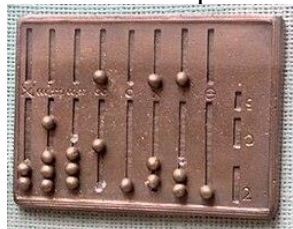


У 999–1003 рр. він обіймав папський престол, ставши першим французом на Святому Престолі. Однак передусім він залишився в історії як людина, що сприяла відродженню інтересу до античних знань і переданню арабської наукової традиції до Латинської Європи.

Герберт був пристрасним шукачем античних текстів і одним із перших європейських учених, які отримали доступ до математичних і астрономічних знань арабського світу. У юності він навчався в Каталонії — у монастирі Санта-Марія де Ріполь та в єпископа Аттона у місті Вік, неподалік Барселони. Ці монастирі мали тісні зв'язки з мусульманською

Іспанією та володіли широкими бібліотеками, що містили арабські переклади грецьких і римських праць, а також твори мусульманських учених, особливо з Кордови — одного з найбільших інтелектуальних центрів Європи. Саме там Герберт уперше познайомився з передовою арабською математикою та астрономією, що справило на нього незабутнє враження. Особливо його вразили християнські мозараби — судді та єпископи, які говорили арабською, носили східний одяг і досконало знали науки, що викладалися в ісламських медресе.

У 972–982 рр. Герберт викладав у Реймсі, де прославив місцеву кафедральну школу. Там він навчав предметам квадривію — арифметиці, геометрії, астрономії та музиці, і ввів у навчання елементи нової для латинського Заходу математики. Він намагався популяризувати наукові знання та заохочував до вивчення природи за допомогою розуму. Приблизно у 994 р. він спорудив у Магдебурзі сонячний годинник, спостерігаючи за Полярною зіркою. Одночасно Герберт почав збирати та замовляти книги, створюючи велику бібліотеку — про що свідчать його листи до абатів та єпископів із проханням надіслати рукописи з арифметики, астрономії та філософії.



Головним досягненням Герберта стало відродження в Європі використання абака (різновид рахункової дошки) — приладу, запозиченого через арабську традицію й удосконаленого з урахуванням десяткової системи числення. Хоча він, ймовірно, ще не знав або не використовував нуль, його версія абака

дозволяла проводити обчислення значно швидше, ніж римськими цифрами. Історик Вільгельм Мальмсберійський писав, що Герберт запозичив саму ідею у вченого мавра — можливо, з університету аль-Карауїн у Фесі. Його абак був поділений на 27 стовпців і використовував 9 знаків (без нуля); символи вирізалися з рогу та розміщувалися на дошці. За описами його учня Ріхера Реймського, Герберт із дивовижною швидкістю розв’язував задачі, які іншим здавалися майже неможливими — і це справляло таке сильне враження, що його навіть звинувачували в чаклунстві. На що він одного разу відповів із іронією: «Якби я був магом, то давно став би королем, а не математиком!»



Сильвестр II і диявол. Середньовічна ілюстрація

Герберту приписують кілька математичних трактатів, серед яких *Libellus de numerorum divisione* («Книжка про ділення чисел») і *Regula de abaco computi* («Правила рахунку на абакі»). Останній відіграв важливу роль у популяризації обчислювальних методів у Західній Європі. Його праця з геометрії, що дійшла до нас у рукописах XII століття, містить елементарні відомості з землемірства та обчислення фігурних чисел (многокутних і пірамідальних), а також вказує на зв’язок Герберта з античною традицією.

Крім того, Герберт відродив в Європі й астролябії, й армілярну сферу — прилади, що дозволяли моделювати рух небесних тіл. Його армілярна сфера, про яку збереглися листи та описи учнів, показувала небесний екватор, екліптику, полюси та паралелі. У конструкції передбачалися трубки-наводки для спостережень за зірками. Він навіть пропонував метод визначення положення Полярної зірки за допомогою сфери. Все це робило її важливим навчальним інструментом для викладання астрономії. Герберт усвідомлював значення спостережень і геометричних побудов для розуміння устрою світу і прагнув передати це своїм учням.

Становлення наукового мислення

Після століть, протягом яких у Західній Європі панувала духовна освіта і книжкові знання зберігалися переважно в монастирях, настав переломний момент. Починаючи з XII століття, Європа поступово повертається до наукового мислення — і особливе місце в цьому процесі займає математика. Ця трансформація не була миттєвою і не проходила прямою лінією. Вона стала результатом перетину кількох великих культурних, економічних і освітніх змін.

Одним із ключових факторів, що відкрили шлях до нової європейської математики, стало знайомство з десятковою позиційною системою числення, що надійшла через арабське посередництво. Замість громіздкої римської нумерації, з якою було важко виконувати навіть прості обчислення, європейці вперше отримали справді зручний інструмент для рахунку — дев'ять цифр та особливий знак для нуля. Саме він, спочатку званий у латинських текстах *figura nihili* («знак нічого»), а пізніше — *nullus*, дав початок сучасному поняттю нуля та термінам на кшталт «цифра» і «шифр».

Індійсько-арабська система числення прийшла до Європи не стільки з абстрактного інтересу до математики, скільки з реальних практичних потреб: торгівлі, бухгалтерії, розрахунків. Поширенню цієї системи сприяли переклади з арабської на латину праць з арифметики, передусім робіт Мухаммада аль-Хорезмі. Його ім'я в латинській формі — *Algorismus* — стало позначенням нової, «алгоримічної» арифметики, яка згодом почала витісняти рахунки та обчислення на абаку, традиційні для «абацистів».

Паралельно почався підйом світської освіти. З XII століття в містах Італії, а згодом і в інших регіонах Європи, з'являються школи абака — приватні навчальні заклади, де юнаки, що готувалися до кар'єри в торгівлі, банківській справі або адміністрації, навчалися прикладної арифметики, основ геометрії та ведення ділової документації. Уже до середини XIV століття лише у Флоренції налічувалося шість таких шкіл, кожна з яких приймала до 1200 учнів. Під «абаком» тут розуміли не лічбу, а всю практичну математику. Ці школи, по суті, стали першою масовою системою світської математичної освіти в Європі.

На формування нової математичної культури також вплинуло оживлення торгових зв'язків. Розширення торгівлі, ріст міст і поява складних фінансових операцій вимагали точного обліку, валютних курсів, процентних розрахунків. Математика виходила за межі теологічних дискусій і монастирських стін, стаючи інструментом повсякденного життя. Не випадково одним із перших великих європейських математиків пізнього Середньовіччя став людина з торгового світу — Леонардо Пізанський, більш відомий під іменем Фібоначчі. Його внесок у розвиток європейської математики буде детально розглянутий у наступному розділі.

Таке «повернення» математики стало можливим також завдяки інтелектуальному обміну, що відбувався на півдні Європи. Особливо важливим центром стала Іспанія, де після взяття Толедо у 1085 році почали активно перекладати арабські тексти латинською мовою. Саме в перекладах європейці вперше ознайомилися з працями Евкліда, Архімеда, Птолемея, а також з алгеброю, тригонометрією і новими методами обчислень, розвиненими в ісламському світі. Епоха перекладів надала європейській культурі не

просто доступ до давніх знань, а й імпульс до власного осмислення й розвитку математичної думки.

Таким чином, «повернення» математики до Європи в XII–XIII століттях було не лише інтелектуальним процесом, а й культурним, соціальним та економічним зрушенням. Це повернення відбувалося не у вигляді абстрактної науки, а як практичне знання, необхідне для нового міського та торгового життя, що відкрило шлях до більш складних і теоретично насичених форм наукового мислення, яке отримає подальший розвиток із заснуванням університетів.

Університети

Одним із найважливіших подій в інтелектуальному житті європейського Середньовіччя стало виникнення університетів — особливих форм організації знань і освіти, які значною мірою визначили подальший розвиток науки, зокрема й математики. Перші університети з'явилися в XI–XII століттях, і їхнє виникнення тісно пов'язане з ростом міст, потребою в освічених кадрах (передусім для церкви та адміністративного апарату) і поживавленням культурного життя Західної Європи.

Перші університети — у Болоньї (заснований бл. 1088 р.), Паризький (бл. 1150 р.), Оксфордський (бл. 1167 р.), Кембриджський (1209), у Саламанці (1218), у Падуї (1222) та інші — не були засновані як школи математики. Вони виростили з церковних і монастирських шкіл, але отримали особливий юридичний статус і внутрішню автономію. Університети стали спільнотами викладачів і студентів, об'єднаних прагненням до знання, яке сприймалося як шлях до пізнання божественного порядку світу.



Зустріч докторів у Паризькому університеті, середньовічний манускрипт

Найдавніший у Європі університет — медичний — було засновано в Салерно не пізніше першої половини XI століття. Проте ще раніше, у IX столітті, на території Візантії було засновано Константинопольський університет — Магнаврську школу, організовану ученим Левом Математиком за підтримки державного діяча Варди. Тут викладали не лише граматику й риторичку, а й арифметику, геометрію, музику, астрономію та медицину. Цей візантійський центр існував до XV століття, до падіння Константинополя. Аналогічну долю мав і університет у Кордові — один із найвизначніших центрів арабської науки в Європі, що виник у X столітті та припинив своє існування в XV столітті після завершення Реконкисти.

У XI столітті було відкрито університет у Болоньї, спочатку як школа, де на основі римського права розробляли юридичні норми, інтерес до яких зростав через розвиток міст. Приблизно в цей же час з'являються й інші університети, і вже наприкінці XII століття на базі кількох монастирських шкіл виник Паризький університет, що об'єднав кафедральну школу, школи абатств св. Женев'єви і св. Віктора, а також професорів, які викладали «вільні мистецтва». Незабаром були засновані Оксфордський та Кембриджський університети (останній — у 1209 р. після конфлікту між студентами та жителями Оксфорда), а також університети в Саламанці (1218), Падуї (1222), Неаполі (1224), Тулузі (1229), Орлеані, Лісабоні та інших містах.

У XIV столітті з'являються університети в Празі (1348), Кракові (1364), Вені (1365), Гейдельберзі (1385), згодом у Лейпцигу (1409), Базелі (1459) тощо. Усі ці університети, на відміну від перших двох, не були вузькопрофесійними школами. Зазвичай університет складався з чотирьох факультетів: мистецтв, богослов'я, права та медицини. Студент, часто підліток, вступав передусім на факультет мистецтв, де навчався близько шести років (аналог сучасного бакалаврату), і після випробувань міг перейти на інший факультет. Найпопулярнішим і найвпливовішим був богословський факультет, де навчання тривало близько восьми років і завершувалося іспитом та диспутом. Іноді освіта в університеті тривала двадцять років і більше: учні переходили з одного університету в інший у пошуках кращих викладачів, рідкісних книг або більш сприятливих умов навчання.



Франческо Пезелліно, «Сім вільних мистецтв», 1450–1456 рр.

Навчальний план базувався на системі семи вільних мистецтв, що походила з античної традиції і збереглася завдяки латинським авторам пізньої античності та раннього Середньовіччя. Ці мистецтва поділялися на тривіум (граматика, риторика, діалектика) і квадрівіум (арифметика, геометрія, музика та астрономія). Саме в межах квадрівіуму

вивчалися математичні дисципліни, причому не стільки як прикладні науки, скільки як частина універсального знання про числа, гармонію та устрій космосу.

У середньовічних університетах навчання будувалося переважно навколо двох форм занять — лекцій і диспутів. Ці заняття мали строго регламентований характер і підпорядковувалися канонічним традиціям викладання, що склалися в схоластичній культурі.

Лекції були основною формою передачі знань. Їх проводили професори (магистри) у строго визначений час, зазвичай вранці. Як пише Лоренц Брокліс: «П'ять днів на тиждень професор читав годинну або півторагодинну лекцію, що складалася з трьох частин. Передусім — з першоджерела: його читав професор, а копія тексту (рукописна або друкована) лежала на колінах студентів, що сиділи перед ним на лавках. Потім він давав свої коментарі, представляючи різні інтерпретації прочитаного: відкидав одні, перевіряв інші, пропонував власні і, нарешті, робив висновки. Ця частина лекції вважалася найважливішою і займала левову частку часу. Лекція закінчувалася питаннями й відповідями, що дозволяли професору перевірити, наскільки правильно його зрозуміли. Варто, правда, зазначити, що нерідко (про що свідчить чимало фактів) таким заключним опитуванням нехтували, особливо коли студентів було багато».

Диспути, або *questiones*, були другою, не менш важливою формою занять. У них студенти активно брали участь, обговорюючи заздалегідь задані питання під керівництвом професора. Основною метою диспуту було не стільки виявлення істини, скільки відточування навичок аргументації, логічного аналізу та правильного цитування авторитетних джерел — передусім Аристотеля, а також отців Церкви і глосаторів. Диспути проводилися як у формі регулярних *ordinariae disputationes*, так і в урочистій формі — *quodlibetales*, на яких обговорювали будь-які запропоновані питання. Участь у диспутах була невід'ємною частиною навчання та підготовки до іспитів.

Протягом кількох століть математика залишалася лише допоміжною дисципліною. Окремих кафедр і викладачів математики не було. Ймовірно, першим, хто спеціалізувався на викладанні виключно математичних наук, був магістр Віденського університету Йоганн із Гмундена (бл. 1380–1442), який з 1412 року читав лекції з «алгоритму цілих чисел і дробів», оптики, сферики, календарних розрахунків та астрології.

Допоміжна роль математики в університетах негативно впливала на рівень знань студентів. Наприклад, у теоретичній геометрії вони часто не просуvalися далі кількох перших теорем I книги «Начал». Ще на початку XVI століття в Паризькому університеті кандидати на ступінь магістра мистецтв замість іспиту з геометрії мали присягнути, що прослухали лекції з перших шести книг Евкліда. Проте, незважаючи на панування авторитарного духу схоластики і підпорядковане становище математики, університети були важливими центрами поширення і розвитку математичних знань — переважно у більш абстрактних напрямках.

Саме в надрах схоластичної науки відбувалася боротьба між передовими мислителями та ортодоксами. Так, в Оксфордському університеті працювали Роберт Гроссетест і його учень Роджер Бекон, які закликали покласти в основу природознавства досвід і математичну дедукцію. І хоча підготовка математиків не була спеціальною метою

університетів, саме вони підготували таких видатних учених, як Томас Брадвардін в Англії, Ніколь Орем у Франції, Йоганн Мюллер (Регіомонтан) у Німеччині та Миколай Коперник у Польщі.



Мартін де Вос, «Алегорія семи вільних мистецтв», 1590 р.

Виникнення університетів у Середньовіччі було пов'язане не лише з розвитком міст, а й із культурними контактами з арабським і візантійським світами — через Сицилію, Іспанію та хрестові походи. Деякі університети (Празький, Краківський) засновувалися за ініціативою королів, інші (наприклад, Кельнський і Ельфуртський) — за підтримки міських властей. Рання університетська культура, завдяки латині, була по-справжньому міжнародною — студенти вільно переміщалися від одного навчального центру до іншого в пошуках знань.

Таким чином, незважаючи на серйозні обмеження, середньовічні університети заклали основи майбутнього наукового підйому Європи, включно зі становленням систематичної математичної освіти.

Леонардо з Пізи (Фібоначчі)

Леонардо з Пізи, більш відомий під прізвиськом Фібоначчі (від *filius Bonacci* — «син Боначчі»), народився в італійському місті Піза приблизно у 1170-ті роки, хоча в деяких джерелах вказано точнішу дату — 1180 рік. Його батько, Гільермо (або Гульєльмо) Боначчі, був пізанським купцем і митним чиновником. У 1192 році Гільермо був

призначений представником торгових інтересів Пізи в Беджайї — важливому порту на північноафриканському узбережжі, на території сучасної Алжирської Республіки.



Слідуючи за батьком, юний Леонардо переїхав до Беджайї. За наполяганням Гільєрмо, який хотів, щоб син став вправним торговцем, Леонардо почав вивчати «мистецтво лічби» у місцевих арабських вчителів. Саме тут він вперше познайомився з індійською системою числення, яка згодом стала відомою як «арабські цифри». Ці заняття визначили його подальше життя: він не лише захопився математикою, а й усвідомив значну перевагу східних методів обчислень над традиційною європейською практикою, заснованою на римських цифрах і рахівниці.

У наступні роки Леонардо подорожував по Східному Середземномор'ю: відвідав Єгипет, Сирію, Візантію, Сицилію та, ймовірно, Прованс. Ці поїздки дозволили йому глибше ознайомитися з різними системами числення та накопичити обширні математичні знання, особливо в арифметиці та прикладних обчисленнях.

Близько 1200 року Леонардо повернувся до Пізи і незабаром приступив до створення свого першого великого твору — Liber abaci («Книга абака»), завершеного у 1202 році. У цій праці він виклав переваги індійсько-арабської позиційної системи числення та її застосування в торговій і фінансовій практиці.



За життя Леонардо вже здобув відомість у наукових колах. У 1225 році його запросили до двору імператора Священної Римської імперії Фрідріха II під час його візиту до Пізи. Один із придворних, філософ Домінікус Гіспанус, запропонував познайомити імператора з працями Фібоначчі. Під час зустрічі придворний учений Йоанн Палермський запропонував Леонардо низку задач, деякі з яких той згодом включив у свої твори. Завдяки цим успіхам Леонардо отримав покровительство Фрідріха II і деякий час провів при імператорському дворі.

У той самий період він створив одне з найоригінальніших своїх творів — Книгу квадратів (1225), присвячену діофантовим рівнянням другого ступеня.

Після 1228 року згадки про нього стають рідкісними. Остання відома дата його біографії — 1240 рік, коли влада Пізанської республіки призначила йому пенсію за внесок у розвиток міста та викладання математики.

Фібоначчі не залишив після себе автобіографії, а єдиний відносно особистий фрагмент міститься в другому абзаці Книги абака. У ньому він описує, як за волею батька почав навчання у арабських вчителів, полюбив мистецтво лічби та вирішив викласти свої знання у праці, щоб передати латинському світу «найточніші відомості про мистецтво обчислень».

Леонардо з Пізи, ймовірно, помер між 1240 і 1250 роками в рідній Пізі. За життя зображень Фібоначчі не збереглося, а всі відомі портрети є пізніми художніми реконструкціями.



Наукова спадщина Леонардо з Пізи найбільш повно відображена в його головному творі — «Книзі абака» (Liber abaci), написаному у 1202 році та переробленому у 1228 році. До наших днів дійшла саме друга версія. Незважаючи на назву, книга не пов'язана з абаком як фізичним пристроєм; у той час слово abacus латинською означало будь-які арифметичні обчислення.

Основною метою Liber abaci було викладення та популяризація десяткової позиційної системи числення, запозиченої у індійських та арабських математиків. Фібоначчі називає цей підхід *modus Indorum* — «індійський метод». Особливу увагу він приділяє арифметичним операціям з новими цифрами, включно з нулем (вперше розглянутим як самостійне число і позначеним словом *zephirum* — від арабського ас-сифр, «пусто»).

Книга складається з 15 розділів і охоплює майже всі відомі на той час арифметичні та алгебраїчні знання, викладені з винятковою повнотою та систематичністю. Перша частина праці (розділи I–V) присвячена основам десяткової арифметики: тут викладено правила додавання, віднімання, множення і ділення цілих чисел, а також методи перетворення чисел із римської системи в арабо-індійську. Далі (розділи VI–VII) розглядаються операції з звичайними дробами, у тому числі в складних формах, зручних для використання в торгівлі, де переважали змішані міри та валюти.

Особлива увага приділяється практичному застосуванню математики: розділи VIII–X містять комерційні задачі — розрахунки прибутків, відсотків, обмінів валют і мір. Ці розділи демонструють, як десяткова арифметика спрощує повсякденні обчислення, і адресовані передусім купцям.

Наприклад, в одній із задач розглядається обмін валют: «Один флорин дорівнює 7 сольдо турецьких, і один сольдо турецький дорівнює 30 денаріям. Скільки денаріїв ти отримаєш за 3 флорини і 10 сольдо?»

Такі задачі на перерахунок між різними грошовими одиницями (а в Італії XIII століття їх було безліч) були життєво необхідні для купців, що вели справи від Генуї до Александрії.

Або інша, більш складна задача на відсотки: «Якщо 100 монет приносять за 4 місяці 20 монет прибутку, то який прибуток принесуть 80 монет за 6 місяців?»

Тут Фібоначчі навчає читача користуватися «правилом трьох» — прообразом пропорційного рівняння, а також демонструє застосування складених пропорцій, якщо умови стають більш складними.

У XI главі обговорюються задачі на змішування, у XII — сумування арифметичних і геометричних прогресій, а також рядів квадратів і повернених послідовностей. Саме тут вперше з'являється знаменита задача про кроликів, що веде до послідовності чисел,

пізніше названих на честь автора — числа Фібоначчі. Формулювання задачі на перший погляд просте і має характер типового завдання на зростання чисельності:

«Скільки пар кроликів утвориться з однієї пари за рік, якщо кожна пара, починаючи з другого місяця життя, щомісяця народжує ще одну пару, яка починає розмножуватися з того ж віку?»²

Леонардо з Пізи пропонує розглядати розвиток популяції по місяцях, починаючи з однієї пари. У перший місяць є лише одна пара. У другий — вона дорослішає, але нових пар ще немає. У третій — ця пара народжує потомство, тепер уже дві пари: доросла і новонароджена. У четвертий місяць доросла пара знову приносить потомство, а новонароджена пара стає дорослою і теж приносить потомство наступного місяця — і так далі. На кожному кроці число пар кроликів дорівнює сумі двох попередніх значень: число дорослих пар, які приносять нових, і загальна кількість пар попереднього місяця. Так виникає рекурсивна формула $F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$, де $F(n)$ — число пар кроликів у n -й місяць. Послідовність починається так: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Хоча подібні ряди зустрічалися й раніше в індійській та арабській традиціях (зокрема, у поетичних і музичних контекстах), саме завдяки включенню цієї задачі в *Liber abaci* послідовність отримала широку відомість у Європі і пізніше стала асоціюватися з ім'ям Фібоначчі. Цікаво, що сам Леонардо не надавав задачі особливого значення — для нього вона була лише ілюстрацією методу розв'язання задач із поверненими умовами. Однак у історії математики вона стала символом поширення ідей рекурсії, моделювання і зростання, вплинувши не тільки на подальший розвиток алгебри, але й на популярну культуру, біологію та штучний інтелект.

XIII глава є введенням у алгебраїчні методи: викладено «правило двох хибних положень» і безліч задач, що зводяться до лінійних рівнянь. XIV глава присвячена наближеним способам витягання квадратних і кубічних коренів, а остання, XV глава, містить задачі, пов'язані з теоремою Піфагора та квадратними рівняннями.

Особливість *Liber abaci* — поєднання практичної спрямованості і глибокого математичного аналізу. Фібоначчі вільно використовує від'ємні числа, трактуючи їх як борг, що було запозичено з індійської традиції. Він знайомий з працями античних і арабських авторів, особливо помітний вплив єгипетського математика Абу Каміля, а в деяких питаннях Леонардо йде навіть далі східних попередників. Хоча символічної алгебри в книзі ще немає, методи розв'язання задач мають по суті алгебраїчний характер.

Книга абака зіграла колосальну роль у розвитку європейської математики: вона стала не лише підручником і довідником для купців та бухгалтерів, але й джерелом натхнення для вчених. Завдяки їй десяткова система числення і арабські цифри отримали широке поширення в Європі, витісняючи застарілі та незручні римські способи запису чисел.

² Кажуть, що паралельно з теоретичним розв'язанням цієї задачі Фібоначчі завів у саду пару кроликів, щоб перевірити свої розрахунки на практиці. Але він так захопився обчисленнями, що зовсім забув про підопічних. Коли нарешті вирушив їх провідати, виявилось, що кролики давно втекли — залишивши математика з чисто теоретичним, але дуже красивим результатом.

Окрім знаменитої «Книги абака», Леонардо з Пізи (Фібоначчі) залишив низку інших видатних праць, кожна з яких зробила значний внесок у розвиток європейської математики XIII століття.

Трактат «Практика геометрії» (1220) став одним із перших латинських текстів, де систематично і з доведеннями викладалися методи вимірювання величин. Незважаючи на назву, книга виходить далеко за рамки прикладної геометрії. Вона складається з семи розділів, охоплюючи планіметрію, стереометрію, землемірні прийоми та арифметику. Леонардо не лише відтворює класичні результати Евкліда та інших античних авторів, але й доповнює їх власними спостереженнями та доведеннями. Так, він першим довів, що три медіани трикутника перетинаються в одній точці — факт, відомий ще Архімеду, але без збереженого доведення.

Серед оригінальних результатів — теорема про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда, відсутня у Евкліда. Особливий інтерес становить метод Леонардо для обчислення наближеного значення числа π : він використовує периметри вписаного і описаного 96-кутника, отримуючи наближення 3,1418. Це нагадує методи Архімеда, але також демонструє знання арабських джерел. Вплив праці Абу Каміля про п'ятикутник і десятикутник помітний у задачах на вписування правильних многокутників і в застосуванні алгебраїчних прийомів для їх розв'язання.

У останній частині книги викладаються методи вимірювання відстаней і висот за допомогою розміченого квадрата — прийом, споріднений найпростіших геодезичних методик. В цілому, Практика геометрії демонструє тісне переплетення теоретичної та прикладної математики і, як і інші твори Фібоначчі, орієнтована на розв'язання задач.

Трактат Flos («Квітка») виник у результаті математичного змагання при дворі імператора Фрідріха II. Суперником Фібоначчі був філософ Йоанн Палермський, який, серед іншого, запропонував рівняння третього степеня $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Це рівняння запозичене з праці Омара Хайяма, де його розв'язували через перетин конічних перетинів — кола та гіперболи. Фібоначчі підійшов інакше: він довів, що рівняння не має раціональних коренів і не може бути розв'язане за допомогою відомих ірраціональностей, описаних у Евкліда. При цьому Леонардо знайшов наближений розв'язок з високою точністю у шістдесятковій системі числення — 1;22,07,42,33,04,40, що демонструє його вміння обчислювати наближені значення без явного алгоритму, який дійшов до нас.

Хоча сам метод не розкритий, ясно, що Фібоначчі наближається до аналітичних технік роботи з ірраціональними і трансцендентними числами, передбачаючи пізніші чисельні методи.

Найоригінальнішим за математичним змістом вважається трактат Liber quadratorum — «Книга квадратів» (1225). Ця праця присвячена проблемам теорії чисел, зокрема розв'язанню неозначених квадратних рівнянь. Леонардо досліджує властивості квадратних чисел, наприклад, показує, що кожне з них можна подати у вигляді суми послідовних непарних чисел — класичний результат, заново сформульований і доведений ним.

Фібоначчі розв'язує задачі, сформульовані Йоанном Палермським, такі як: знайти таке раціональне квадратне число, яке, будучи збільшене або зменшене на 5, знову дає

квадратне число. Розв'язок він отримує, використовуючи власний метод, заснований на розкладанні квадратів у суми послідовних чисел. В іншій задачі потрібно знайти числа x , y і z , щоб суми

$$x + y + z + x^2,$$

$$x + y + z + x^2 + y^2,$$

$$x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$$

були квадратами. Фібоначчі знаходить розв'язок у вигляді дробових значень, демонструючи рідкісне для свого часу володіння діофантовою технікою.

Слід згадати і алгебраїчну тотожність, доведену в Книзі квадратів:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

Цей результат, пов'язаний з теорією представлення чисел у вигляді суми квадратів, виявився важливим для подальшого розвитку алгебри та аналізу.

До числа втрачених праць Фібоначчі належать *Di minor guisa* — трактат з комерційної арифметики, а також коментарі до X книги «Начал» Евкліда, присвяченої ірраціональностям.

В цілому, твори Фібоначчі свідчать про те, що в особі Леонардо з Пізи європейська математика отримала першого великого вченого, який не лише освоїв і узагальнив досягнення грецько-арабської науки, але й здатний створювати власні оригінальні розв'язки, важливі як для прикладної, так і для чистої математики.

Йордан Неморарій

Про особу Йордана Неморарія (лат. *Jordanus de Nemore*, також відомого як *Jordanus Nemorarius* або *Джордано з Неморе*) майже нічого достовірного не відомо. Його ім'я в рукописах XIII століття часто зустрічається просто як *Jordanus*, а додаток *de Nemore* («з лісу», «лісовий») не прояснює його географічне походження. Популярна в XIX–XX століттях гіпотеза, що ототожнює його з Йорданом Саксонським — генералом домініканського ордену, який помер 1237 року, — нині вважається малоймовірною: той викладав теологію і не залишив відомих математичних праць. Імовірно, Йордан Неморарій жив і працював наприкінці XII — у першій половині XIII століття; його твори згадуються у *Biblionomia* Рішара де Фурнівалья, складеній між 1246 і 1260 роками.

Попри майже повну відсутність біографічних відомостей, Йордан вважається одним із найвизначніших західноєвропейських математиків XIII століття. Йому приписують створення трактатів з арифметики, алгебри, геометрії, стереографічної проєкції та механіки, відомих у кількох редакціях і таких, що помітно вплинули на розвиток середньовічної науки.

Трактат Йордана Неморарія «Про елементи арифметичного мистецтва» (*De elementis arismetice artis*) став одним із найпопулярніших підручників арифметики у Західній Європі. Він базується на творі Боеція, але значно розширює й систематизує виклад, прагнучи представити арифметику настільки ж строго, як геометрію в Евкліда. У ньому

вперше послідовно використовуються літери для позначення чисел — характерна риса всієї школи Йордана.

Крім того, у «*Demonstrationes in Arithmetica*» Йордан формулює понад 400 арифметичних положень у десяти книгах. Існує три редакції цього твору: друга містить додаткові доведення й твердження, а третя логічно переробляє структуру й посилює аргументацію. Хоча доведення часто короткі, а числові приклади не подаються, трактат демонструє глибину логічного аналізу й прагнення до строгої дедукції.

Трактат «Про дані числа» (*De numeris datis*) є першою в Західній Європі алгебраїчною роботою високого рівня. Він містить 95 або 113 задач залежно від рукопису і ділиться на чотири книги. Метод, що використовується в трактаті, передбачає появу символічної алгебри епохи Відродження: Йордан формулює задачу в термінах відомого й шуканого, перетворює рівняння і знаходить розв'язок. Це подібно до методів Франсуа Вієта, але без формальних позначень. Багато задач пов'язані з квадратними рівняннями, методом помилкового положення, пропорціями, і навіть містять елементарне кубічне рівняння виду $x^3 = a$.

Йордану також приписують геометричну роботу «Про трикутники» (*De triangulis*), у деяких версіях відому як *Liber philotegni*. У ній розглядаються властивості трикутників, поділ відрізків і фігур, вписані й описані багатокутники, квадратура кола та трисекція кута. Розширена версія цього твору поділена на книги, реорганізує й доповнює початковий текст. У цілому трактат є визначним зразком середньовічної геометрії — зокрема завдяки задачам про дуги, сегменти, площі й поділи.

Найважливішим внеском Йордана у фізику вважається розробка середньовічної «науки про ваги» (*scientia de ponderibus*). У трактаті *Elementa super demonstrationem ponderum* він формулює поняття «позиційної ваги» та аналізує рівновагу тіл на важелі³ й похилій площині. Він застосовує принципи, близькі до закону моментів і принципу віртуальних переміщень, передбачаючи ідеї, які згодом розвинули Сімон Стевін і Галілей. У пізнішому трактаті *De ratione ponderis*, традиційно приписуваному Йордану (хоча це може бути компіляція іншого автора), кількість положень зросла до 45, а доведення були уточнені й розширені.

Пов'язані з цими трактатами анонімні коментарі, зокрема *Aliud commentum*, подають точніші пояснення та інтерпретації тверджень, особливо першого трактату.

У короткому трактаті «*Demonstratio de plana sphaera*» Йордан уперше строго довів важливу геометричну властивість стереографічної проєкції: будь-яке коло на сфері проєктується у коло (або пряму) на площині. Це твердження було відоме практично, але раніше не мало строгого доведення. Збереглися три редакції трактату, одна з яких супроводжується пізнішим вступом.

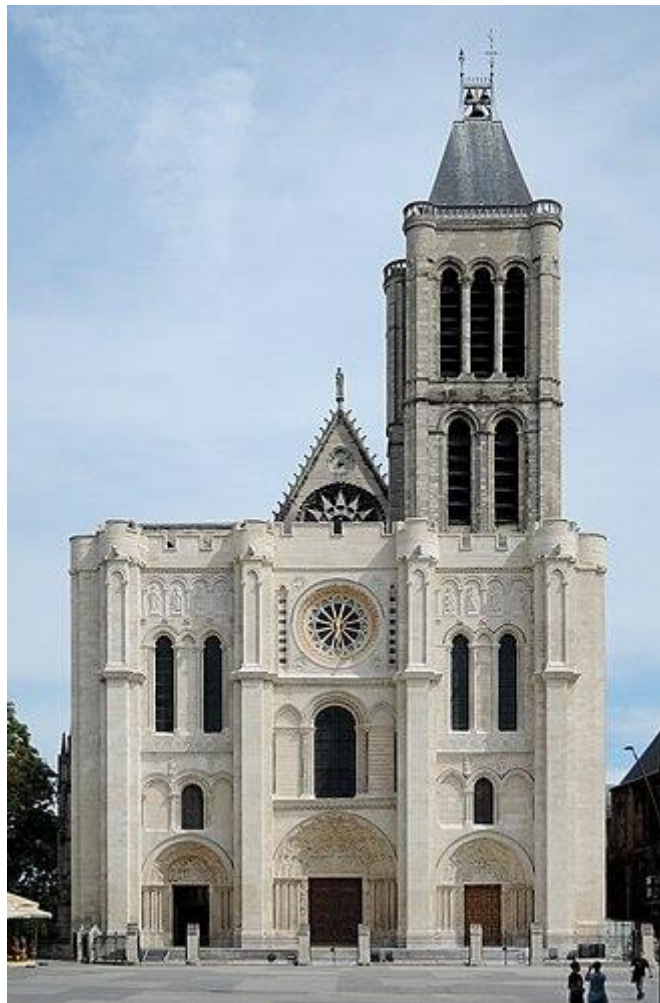
Ряд трактатів, таких як *De proportionibus*, *Isoperimetra*, *Demonstrationes pro astrolapsu*, *Pre-exercitamina* та інші, традиційно приписувалися Йордану, однак сучасні дослідники сумніваються в їхній автентичності. Також під його ім'ям тривалий час поширювався

³ Про нього збереглася кумедна легенда: нібито Йордан облаштував свою «повітряну бібліотеку», підвішуючи книги на мотузках, щоб вони завжди були під рукою. Коли одна мотузка обірвалася і книги впали, він вигукнув: «Навіть книги не хочуть підкорятися законам механіки!» — але це, скоріш за все, жарт, який відображає славу Йордана як мислителя-механіка.

трактат *Algorismus demonstratus*, виданий 1543 року Йоганном Шенером, але жоден рукопис не підтверджує авторства Йордана; ймовірно, автором був якийсь магістр Гернардус.

Математика готичної епохи

Готична епоха — це час, коли в небо здіймаються собори й постають університети. Вона охоплює приблизно кінець XII — кінець XIV століття і символічно починається з побудови абатства Сен-Дені поблизу Парижа — першого по-справжньому готичного собору. Слідом за ним виростають Шартр, Ам'єн, Страсбург, Реймс, Кельн — і разом із ними, немов синхронно, розгортається особливий стиль мислення, який згодом назвали схоластикою. Цей стиль пронизує філософію, теологію, архітектуру і, як це не дивно, — математику.



Базиліка Сен-Дені, 1122–1281 (фото з [сайту Вікіпедія](#))

Схоластика — це логіка Аристотеля, засвоєна з благоговінням, але в союзі з християнською вірою. Усе, що писав Стагірит⁴, стало предметом вивчення. Якщо в

⁴ Стагірит — прізвисько Аристотеля, яке походить від назви його рідного міста Стагіра (грец. Σταγείρα) у Македонії. У середньовічних текстах слово Стагірит часто вживалося як синонім до імені Аристотеля, символізуючи його авторитет як «філософа» *par excellence*.

ранньому Середньовіччі багато античних текстів ще залишалися недоступними, то починаючи з XII століття їхнє повернення — через арабські переклади й коментарі — спричинило інтелектуальний вибух.

Наука готичної епохи — це Аристотель, прочитаний у келіях. З ним не сперечаються — його тлумачать, розвивають, уточнюють. Із цієї віри в раціональний порядок світу народжуються перші паростки математичного природознавства. У працях схоластів зароджуються ідеї обчислення руху, формулюються питання про нескінченність, неперервність, про природу часу й простору — питання, що згодом приведуть до математичного аналізу Нового часу. Як писав Вільям Оккам, один із найвпливовіших мислителів XIV століття: «*Frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora*» — «Даремно робиться через більше те, що можна зробити через менше». Так народилася знаменита «брита Оккама» — принцип теоретичної економії, який став наріжним каменем наукового методу.

Математика готичної епохи живе на двох рівнях. Перший — це логіка, теологія, схоластика. Другий — будівельні риштовання, циркулі, вітражі. Готика в мистецтві й готика в математиці — два віддзеркалення одного стилю мислення, спрямованого на порядок, симетрію та підпорядкування форми змісту.

Монахи й майстри, що будували собори, не називали себе математиками, але фактично ними були. Геометричні побудови лежали в основі пропорцій соборних фасадів і вітарів, конструкції нервюрних склепін⁵ і вітражних роз. Кола, зірки Давида — усе це математичні ідеї, втілені в камені та склі.

У трактаті XIII століття *Geometria fabrorum* («Геометрія майстрів») описано способи розмітки архітектурних елементів за допомогою базових геометричних побудов — без вимірювальних лінійок, лише циркулем.

З готичною епохою пов'язане й повернення античної математичної спадщини. Особливо важливим став переклад із арабської латинської версії «Начал» Евкліда, виконаний Герардом Кремонським⁶. Цей текст став основою університетського викладання геометрії. Евклід — разом із Боецієм та Ісидором Севільським⁷ — на віки закріпився в квадривіумі.

Крім того, через *Liber Abaci* Європа вперше знайомиться з індійсько-арабською системою числення.

⁵ Нервюрні склепіння — це тип готичних склепін, у яких каркас із кам'яних ребер (нервюр) утворює основу конструкції. Ребра не лише зміцнюють склепіння, а й підкреслюють його геометрію, створюючи характерний для готики візерунок.

⁶ Герард Кремонський (Gerardus Cremonensis, бл. 1114–1187) — середньовічний учений і перекладач із міста Кремона (Італія). Працював у Толедо, де переклав з арабської латинською понад 70 наукових трактатів, серед них — «Альмагест» Птолемея, праці Галена, Авіценни, а також «Начала» Евкліда. Його переклади відіграли ключову роль у передачі античної та арабської науки Західній Європі.

⁷ Ісидор Севільський (Isidorus Hispalensis, бл. 560–636) — іспанський богослов, енциклопедист і архієпископ Севільї. Автор «Етимологій» (Etymologiae) — величезної енциклопедії знань античного світу, яка впродовж усього Середньовіччя залишалася головним джерелом відомостей із філософії, математики, природознавства, медицини та граматики.

У другій половині XIII — на початку XIV століття в Англії, особливо в Оксфорді та Мертонському коледжі, формується школа мислителів, які вперше застосовують математичний підхід до руху, часу та зміни. Їх називали калькуляторами (*calculatores*) — не у значенні «лічильники», а радше «обчислювачі»: їх цікавили швидкості, прискорення, інтенсивності.

З'являється думка про те, що якості (швидкість, температура, густина) можуть змінюватися за законами, які можна виразити чисельно — навіть якщо самі ці якості неможливо виміряти безпосередньо. Як писав один із схоластів: «*Motus velocitatis potest esse uniformis vel difformis*» — «Рух за швидкістю може бути рівномірним або нерівномірним».

Нехай це висловлювання здається банальним, але воно знаменує собою важливий крок: спробу математизації фізики. Це вже не просто філософія природи, а передвісник майбутньої кінематики.

Серед тем, які обговорювалися в університетських колах, особливе місце посідає проблема нескінченності — математичної, філософської й теологічної. З одного боку, богослов'я стверджувало нескінченність Бога. З іншого — Аристотель допускав лише потенційну нескінченність. Готична математика на цьому перехресті шукає компроміси, ставить запитання: чи можна нескінченно ділити відрізок? Чи існує нескінченно мала величина?

На цьому тлі виникають ідеї, важливі для майбутньої теорії границь: дискретне й неперервне, подільність, актуальна й потенційна нескінченність.

Також у готичний період з'являються перші міркування про різні види нескінченностей: наприклад, між кількістю всіх натуральних чисел і кількістю всіх квадратів. Це інтуїтивне передчуття майбутніх відкриттів Кантора — ще без строгого апарату, але вже з подивом: нескінченне можна порівнювати.

Математика готичної епохи була глибоко символічною, логічною і водночас прикладною. Вона не створила великих відкриттів за мірками Нового часу, але зробила щось важливіше: навчилася ставити запитання. Як виміряти зміну? Що означає «нескінченне»? Чи можна виразити світ числами — не як тесля, а як богослов? Ці питання вперше були поставлені латиною — у світлі вітражів і на полях університетських манускриптів.

Готична математика — це математика переходу. Між античною геометрією і майбутньою алгеброю, між логікою і фізикою, між рукою зодчого і думкою філософа.

Томас Брадвардін

Одним із найяскравіших представників математичної думки XIV століття в Європі був англійський мислитель Томас Брадвардін (бл. 1290–1349). Він належав до так званої школи оксфордських калькуляторів — групи науковців із Мертон-коледжу Оксфордського університету, які прагнули застосовувати математичні методи до аналізу фізичних і філософських проблем.

Одним із найоригінальніших творів Бравардіна стала «Теоретична геометрія» (*Geometria speculativa*), написана, ймовірно, у 1330-х роках. У ній він послідовно аналізував різні класи геометричних об'єктів. Перший розділ трактату присвячено зоряним многокутникам, зокрема п'ятикутній зірці, утвореній продовженням сторін правильного п'ятикутника. Бравардін установив, що сума гострих внутрішніх кутів такої зірки дорівнює двом прямим кутам. Ба більше, він показав, що зі збільшенням кількості вершин зірки на дві, сума гострих кутів також збільшується на два прямі кути. Таким чином, він заклав основу для систематичного вивчення зоряних многокутників — теми, до якої не раз поверталася геометрія Нового часу.

В інших розділах «Теоретичної геометрії» він обговорював ізопериметричні властивості фігур, особливості кутів дотику (де, на його думку, кут дотику не має точного співвідношення з прямим кутом, але порівнюваний з ірраціональними величинами), а також питання, пов'язані з заповненням простору правильними многогранниками. Спираючись на античну традицію та ідеї Аверроеса⁸, Бравардін підкреслював, що лише куб здатен повністю заповнити простір без проміжків, тим самим спростовуючи помилкове уявлення про можливість такої укладки іншими платоновими тілами. Він також посилався на Архімеда й Феодосія, цитуючи складні теореми з їхніх праць і демонструючи глибоке знання класичної геометрії.

У «Трактаті про пропорції швидкостей у рухах» (*De proportionibus velocitatum in motibus*, 1328) Бравардін поставив за мету уточнити, як саме рушійна сила й опір впливають на швидкість тіла. Критично переглянувши положення Аристотеля, він показав, що твердження про те, нібито рух можливий лише тоді, коли сила перевищує опір, суперечить іншому аристотелівському тезису — про пропорційність швидкості відношенню сили до опору. Розвиваючи власну модель, Бравардін запропонував оригінальний закон, за яким швидкість тіла зростає в логарифмічній залежності від відношення діючої сили до опору.

Тут він вводить поняття складених відношень і підходить до ідеї дробових степенів — наприклад, «половинного» відношення, аналогічного кореню з відношення двох величин ($\sqrt{a} : \sqrt{b}$). Ці ідеї згодом розвинув Ніколя Орем, але саме Бравардін був одним із перших, хто спробував перенести операцію піднесення до степеня (зокрема з дробовим показником) із суто арифметичного контексту до фізичної інтерпретації.

Найглибшим філософсько-математичним твором Бравардіна вважається «Трактат про континуум» (*Tractatus de continuo*), написаний між 1328 і 1335 роками. У ньому він розглядає, з чого складається неперервне: лінії, поверхні, тіло, час і рух. У полеміці з різними поглядами на природу континууму — від атомістичних ідей Демокріта до аристотелівської теорії потенційної нескінченності — Бравардін займає позицію на захист класичного перипатетизму. Він стверджує, що континуум не може складатися з скінченного (і навіть нескінченного) числа неподільних часток, бо це призвело б до

⁸ Аверроес (Ібн Рушд, 1126–1198) — андалузський філософ, лікар і коментатор Аристотеля. Його тлумачення творів Стагірита суттєво вплинули на середньовічну європейську схоластику. У латинській традиції його часто називали *Commentator* («Коментатор»), на противагу самому Аристотелю — *Philosophus* («Філософ»).

абсурдних результатів. Так, якщо лінія складається з точок, то за їхньою кількістю діагональ квадрата й його сторона були б рівні.

Він розрізняє категорематичну і синкатегорематичну нескінченності — аналоги сучасних понять актуальної та потенційної нескінченності. Перша, по суті, трансфінітна й завершена, друга — процесуальна, нескінченність у становленні. Таке точне формулювання нескінченності як процесу розкладання або стискання неперервного зближує Браввардіна з ідеями, що через кілька століть стануть центральними в математичному аналізі.

Він зазначає, що «всі науки виявляються істинними лише тоді, коли не припускають, що континуум складається з неподільних». Таким чином, Браввардін відкидає атомізм у математиці й захищає подільність континууму до нескінченності — фундаментальний принцип неперервного простору й часу.

Цікавим аспектом філософії Браввардіна є застосування його теоретичних міркувань про континуум до питання творення душ. Він стверджує, що якщо душі створюються послідовно, одна за одною, то їхня множина є зліченною, як і натуральні числа. Це, своєю чергою, свідчить про нескінченність — не як абстракцію, а як реально існуючий порядок у Божому задумі.

Річард Суайнсгед

У середині XIV століття в інтелектуальному житті Європи виникає оригінальний напрям, що поєднує натурфілософію, логіку й математику: учення про широти форм (*latitudines formarum*), або, інакше, про інтенсивності якостей. Це вчення, що розвивалося переважно в Оксфорді й Парижі, становило ранню спробу кількісно описувати зміни властивостей — таких як тепло, густина, рух — за допомогою абстрактних математичних моделей. У ньому зароджуються ідеї, які передбачили поняття функціональної залежності та її графічного зображення, що набудуть повної форми лише в XVII столітті.

Одним із головних представників цього напрямку був Річард Суайнсгед (після 1350 р.), монах цистерціанського ордену, вихованець і, ймовірно, викладач Мертон-коледжу в Оксфорді. Його головна робота — *Liber calculationum* («Книга калькуляцій») — стала важливою віхою в історії європейської наукової думки й принесла авторові прізвисько *Calculator* («Обчислювач»).

Центральною темою «Книги калькуляцій» є аналіз механічного руху, а також загальних проблем неперервності, зміни й нескінченності, які Суайнсгед прагне описати з математичною точністю. Зокрема, він розглядає так звану інтенсивність форми — величину, що виражає ступінь прояву певної якості (наприклад, тепла, густини, швидкості). Ця інтенсивність трактується як величина, що змінюється в часі, тобто функція часу — підхід, близький до сучасного поняття змінної величини.

Саме в цьому контексті Суайнсгед уперше вводить ідею миттєвої швидкості (*velocitas instantanea* або *velocitas punctualis*) — швидкості в певний момент часу. Хоча точного визначення він не дає, сам факт звернення до цього поняття означає важливий крок у напрямку майбутньої диференціальної кінематики. У середньовіччі, як і в античності, не

можна було безпосередньо співвіднести шлях і час, оскільки розглядали лише однорідні величини. Тому швидкості порівнювали або за пройденим шляхом за рівний час, або за часом, необхідним для подолання однакової відстані. У цьому контексті ідея миттєвої швидкості була справді новаторською.

Суайнсгед також запропонував кілька абстрактних моделей зміни інтенсивностей. Наприклад, він стверджує, що при рівномірному зростанні інтенсивності на проміжку часу її середнє значення дорівнює арифметичній середині початкового й кінцевого значень. Цей результат еквівалентний сучасній формулі обчислення шляху при рівномірно прискореному русі (за лінійної залежності швидкості від часу).

В іншому прикладі, розглядаючи зростання інтенсивностей, визначених на послідовних відрізках, довжини яких зменшуються в геометричній прогресії $1/2$, $1/4$, $1/8$, ..., а значення інтенсивностей зростають як 1 , 2 , 3 , ..., Суайнсгед показує, що сума відповідного ряду збігається:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots = 2,$$

— результат, який уперше з'являється в схоластичній літературі й значно випереджає свій час. В античній традиції подібні суми не розглядалися, за винятком спадних геометричних прогресій.

Для опису зміни якостей Суайнсгед використовує термін *fluxus* — «течія», що передбачає термінологію Ньютона (метод флюксій) та ідеї нескінченно малих змін, які стануть наріжним каменем математики XVII століття.

Серед інших заслуг Суайнсгеда — уточнення визначення рівномірного руху, запропонованого його колегою Вільямом Гейтесбері. Суайнсгед наголошує, що при такому русі за будь-який рівний проміжок часу проходиться рівна відстань, що робить його формулювання точнішим і універсальнішим.

Ідеї, розроблені Суайнсгедом та іншими оксфордськими калькуляторами, вплинули на натурфілософів і математиків Нового часу. Галілей, наприклад, у своїх дослідженнях руху доходить до формулювань, подібних до тих, що обговорювалися в Оксфорді за два століття до нього. Згодом Лейбніц називав Суайнсгеда одним із перших учених, «які ввели математику в схоластичну філософію». Італійський учений Джироламо Кардано включав його до переліку дванадцяти найвидатніших мислителів усіх часів.

Ніколя Орем

Ніколя Орем (бл. 1323–1382) був магістром мистецтв, викладав у Колеж де Наварра при Паризькому університеті, згодом став єпископом міста Лізьє, а також служив наставником майбутнього французького короля Карла V. Подібно до інших інтелектуалів Середньовіччя, Орем належав до духовного стану: саме церковні вчені того часу відігравали провідну роль у розвитку науки та освіти.

Орем відзначався різнобічними інтересами: він писав латинською та французькою мовами, перекладав Аристотеля й одним із перших почав використовувати французьку мову для наукових творів, зокрема у «Трактаті про сферу» (*Traité de l'esphere*), де створив

нову наукову термінологію. Попри віру в магію, він рішуче виступав проти астрології, ворожіння та церковних зловживань. Серед його наукових інтересів — астрономія, механіка, музика, арифметика й філософія природи.



Портрет Ніколя Орема, мініатюра з «Трактату про надію» Орема, Національна бібліотека, Париж, Франція

Задовго до Галілея Орем сформулював принцип відносності у формі, дуже близькій до тієї, яку пізніше висловлять учені XVII століття. Він розмірковував про рух об'єктів у системі відліку, пов'язаній, наприклад, із кораблем, і доходив висновку, що неможливо відрізнити корабель, який спочиває, від того, що рухається рівномірно й прямолінійно, — саме це становить основу принципу відносності.

Орем також одним із перших досліджував рівноприскорений рух. Його найважливіший твір із механіки — трактат «Про конфігурацію кількостей» (*De configuratione quantitatum*) — є спробою кількісного й геометричного опису змін інтенсивностей властивостей: тепла, швидкості, світла тощо. Він класифікував якості як рівномірні, рівномірно-нерівномірні та нерівномірно-нерівномірні, зображаючи їх у вигляді фігур, межами яких служила так звана «лінія інтенсивності».

Для візуалізації залежностей між величинами Орем застосовував геометричні моделі: прямокутники, трикутники, дуги та складні криві. Він розглядав одномірні, двовимірні й навіть «тілесні» (тривимірні) якості, фактично передбачаючи ідею многовимірних просторів. Його спосіб подання величин через фігури наближається до функціонального мислення: хоча терміна «функція» він не вживав, описував залежності між змінними величинами й активно використовував образи, що дозволяли візуально уявити зміни.

Особливу увагу Орем приділяв алгебрі відношень — поняттю, важливого для попередників алгебраїчних операцій із степенями. У трактатах «Трактат про

відношення» (Tractatus proportionum) та «Алгоритм відношень» (Algorismus proportionum) він не лише систематизував уявлення про кратні, напівкратні й дробові відношення, але й запропонував правила для обчислень із дробовими степенями, фактично узагальнивши піднесення до степеня на дробові показники. Це — ранній крок на шляху до створення логарифмічної арифметики, що з'явиться через два з половиною століття.

В історії математики Орем відомий ще одним результатом: він першим довів розбіжність гармонічного ряду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Його доведення не лише правильне, а й напрочуд витончене й наочне: Візьмімо дріб $1/2$, потім наступні дві — $1/3 + 1/4$ — разом вони більші за $1/2$, бо $1/3 > 1/4$, а отже, їхня сума перевищує дві четврті. Наступні чотири члени — від $1/5$ до $1/8$ — кожен не менший за $1/8$, і разом вони знову дають більше за $1/2$. Потім ідуть вісім дробів від $1/9$ до $1/16$, кожен не менший за $1/16$, і сума знову перевищує $1/2$. І так без кінця: кожен наступний блок додає понад $1/2$. У результаті сума ряду перевищує будь-яке натуральне число. Це — надзвичайно важливий результат, що став класичним прикладом розбіжності в математичному аналізі.

Розвиток фізики

У Середньовічній Європі фізика існувала в межах натурфілософії — учення про природу, заснованого на творах Аристотеля та його арабських послідовників. Проте починаючи з XIII століття європейські вчені почали не лише вивчати й коментувати античні та арабські джерела, а й розвивати власні оригінальні ідеї. Ця робота велась передусім у університетах Англії та Франції, де особливу увагу приділяли механіці, оптиці, тепловим явищам і філософським основам природи.

Твори Аристотеля, які потрапили до Європи через переклади з арабської, а потім і з грецької, стали відправною точкою для розвитку фізичного мислення. Особливе значення мали роботи з механіки й учення про континуум, а також оптика, що отримала потужний імпульс від перекладів робіт Ібн аль-Хайсама (Alhazen). Ці твори стали основою як для філософських роздумів, так і для перших спроб математичного опису фізичних явищ.

Одними з перших європейських мислителів, які намагалися поєднати натурфілософію, математику та досвід, були Роберт Гроссетест (бл. 1175–1253), лінкольнський єпископ, та його учень Роджер Бекон (бл. 1214–1294). Обидва здобули освіту в Оксфорді та Парижі і вважалися глибоко освіченими знавцями як грецької, так і арабської науки.

Гроссетест першим чітко сформулював ідею, що розуміння природи має спиратися на математичний опис. Він стверджував: «Усі принципи природних дій повинні бути виражені за допомогою ліній, кутів і фігур». Його цікавили проблеми світла та оптики, де він відстоював математичний атомізм — ідею, що природні явища складаються з неподільних елементів і підпорядковуються строгим кількісним законам. У його творах зустрічаються навіть спроби порівняння нескінченностей і аналіз найпростіших розбіжних рядів.

Бекон у своєму *Opus majus* («Головна праця», 1266–1267) створив енциклопедію наукових знань XIII століття. Він вважав досвід найважливішим джерелом знань про

природу і ввів у вжиток термін *scientia experimentalis* — «експериментальна наука». У творах Бекона особливе місце займає математика: він називав її «вратами й ключем до інших наук». Він вивчав твори Евкліда, Архімеда, Аполлонія, Птолемея й використовував їхні методи для аналізу фізичних процесів. Зокрема, Бекон вивів правило складання інтенсивностей, формально збігається з калориметричною формулою, яка була повторно відкрита лише в XVIII столітті.

Найбільш розвинутою фізичною наукою в Середньовіччі була оптика. Її основою стали праці Ібн аль-Хайсама, що справили величезний вплив на європейських мислителів. Яскравим прикладом є «Оптика» (*Optica*) польського вченого Вітелло (бл. 1225 — бл. 1280), учня Паризького університету. Вітелло систематизував арабські та античні знання про оптичні явища й подав їх у математичній формі. Його твори стали важливим джерелом для Галілея та Кеплера в Новий час.

У XIV столітті в університетах Англії (передусім в Оксфорді, у Мертон-коледжі) та Франції (у Парижі) сформувалися школи, що займалися кількісним аналізом руху. Томас Брадвардин, Вільям Хейтсбері, Ніколя Орем та інші розвинули ідеї, близькі до майбутньої класичної механіки.

Їхні результати включали аналіз змінної швидкості, поняття миттєвої та середньої швидкості, і призвели до знаменитої «мертонської формули» (про рівність шляху при рівномірно прискореному русі й русі з постійною середньою швидкістю). Ці ідеї були сформульовані задовго до Галілея й Ньютона.

Однією з характерних рис середньовічної фізики було вчення про «широти форм» (*latitudines formarum*) — спроба описати зміну фізичних властивостей (наприклад, тепла, світла, швидкості) за допомогою геометричних фігур. Ці ідеї тісно пов'язані з філософськими роздумами про континуум і нескінченність, що стимулювало розвиток математичних понять відношень, границь і неперервності.

Епоха Відродження



Сандро Боттічеллі, Весна, 1482 р.⁹

Епоха Відродження — час великих відкриттів, мистецького розквіту та сміливих інтелектуальних амбіцій. Зазвичай, Ренесанс зараз представляють як триумф мистецтва: блискучі фрески, мармурові статуї, величні собори. Однак це був і час глибоких змін у культурі знання, зокрема в математиці. Хоча математика ще не займала центрального місця в інтелектуальному житті, саме в цю епоху формуються її майбутні основи.

Слово «відродження» (Rinascimento) вказує на прагнення до відновлення античного ідеалу: людського світу, заснованого на гармонії, красі, логіці та знанні. До числа «відроджуваних» дисциплін належала і математика — передусім у її геометричному втіленні. Середньовічна схоластика з її теологічним ухилом поступово відходить на другий план, поступаючись місцем інтересу до конкретних, спостережуваних структур, вимірюваних величин і раціональних співвідношень.

При цьому не слід забувати, що Відродження — це й епоха насильства, єресей, політичної нестабільності, переслідувань. На противагу пізнішому ідеалу вченого як людини совісті та обов'язку, ренесансні науковці нерідко поєднували наукові інтереси з авантюризмом, містикою та невгамовним честолюбством. Учений Відродження — це, радше, вільна особистість, яка творить поза рамками моралі або інституційної дисципліни. Саме така свобода дозволила математиці зробити перші кроки до сучасності.

⁹ На галявині зображено понад п'ятсот видів квітів, що належать до сто тридцяти восьми родів рослин, відтворених з фотографічною точністю, можливо, із використанням гербаріїв.

У XV–XVI століттях в Італії, а згодом і в інших країнах Європи, математика перестає бути лише інструментом для обчислення податків або ведення рахунку. Вона починає проникати в найрізноманітніші сфери людської діяльності. Яскравий приклад — теорія перспективи, розроблена на стику мистецтва, геометрії та фізіології зору.

Леон Баттіста Альберті у трактатах «Три книги про живопис» і «Десять книг про зодчество» не лише дає художнику практичні поради, а й стверджує, що живописець, спираючись на знання математики та геометрії, відтворює те, як людина насправді бачить світ. Зокрема, він пише: «Я хочу, щоб художник вивчав вільні мистецтва, але передусім — щоб він знав геометрію. Я згоден із давнім художником Памфілом¹⁰, який навчав живопису молодь і казав, що ніхто не може стати хорошим художником, не знаючи геометрії. Принципи, які ми розробили і які є основою повноцінного живопису, легко зрозумілі геометру. Натомість ті, хто не обізнаний у геометрії, не можуть досягнути ані елементарних знань, ані будь-яких інших принципів живопису».

Його знаменита ідея «зорової піраміди» — це спроба математично описати зорове сприйняття. За Альберті, лінії зору формують піраміду з вершиною в оці і основою на площині зображення, і художник, знаючи властивості цієї піраміди, здатен створити ілюзію глибини, перспективи та реалізму. Таким чином Альберті прокладає міст між математикою та образотворчим мистецтвом, між абстрактною логікою та чуттєвим сприйняттям.

Теорія перспективи надихає таких майстрів, як П'єро делла Франческа, Леонардо да Вінчі, Альбрехт Дюрер. Останній навіть створює спеціальні «перспективні машини» — інструменти для точного зображення геометричних форм у просторі. Ці розробки, хоч і практичні зовні, тягнуть за собою глибокі зміни у мисленні: у культурі Відродження починає домінувати ідея раціонального світу, керованого законами — зокрема й математичними.

Водночас у епоху Відродження відбувається справді революційний зсув у самій математиці. Особливо важливий у цьому контексті перехід від риторичної алгебри до символічної, тобто розвиток позначень, за допомогою яких можна виражати загальні правила та виконувати обчислення з абстрактними величинами.

Найпомітнішою віхою на цьому шляху стали праці Франсуа Вієта (1540–1603), який, вводячи буквені позначення для відомих і невідомих величин, заклав початок сучасного алгебраїчного мислення. До нього алгебра була «словесною» — задачі формувалися й розв'язувалися у вигляді довгих описів. Вієт же запропонував стислий, лаконічний мову, що дозволяє оперувати з рівняннями як із об'єктами. Цей крок став основою для подальшого розвитку математики — від Декарта до Ньютона та Лейбніца.

Інший яскравий епізод — розв'язання кубічних і біквадратних рівнянь, що стало справжньою математичною сенсацією XVI століття. Проблема, над якою ламали голову

¹⁰ Памфіл — давньогрецький живописець IV століття до н. е. з Амфіполя, учень Єпомпа і вчитель Апеллеса. У 360 р. до н. е. заснував школу живопису в Сікіоні, де видатним представником був Полікл. Памфіл надавав особливого значення точності пропорцій і вимагав від учнів вивчення геометрії для досягнення цієї мети. Він успішно сприяв введенню живопису до шкільної освіти, викладав на платній основі (один талант за 12 років навчання), залишив відомості про свої роботи, серед яких «Перемога афінян у Флейонті» та «Одісей на плоті», а також написав трактат про живопис і живописців.

ще арабські математики, було розв'язано в Італії внаслідок боротьби розумів — драматичної й майже театральної. Тут зустрічаємо імена Сципіона дель Ферро, Нікколо Тартальї, Джероламо Кардано та Лодовіко Феррарі, які не лише розв'язували рівняння, а й сперечалися, влаштовували математичні поєдинки, судилися та звинувачували одне одного в плагіаті. У цій боротьбі народилися перші проблiski теорії комплексних чисел, хоча самі математики того часу сприймали уявні корені радше як «потворні» проміжні кроки, ніж як повноцінні об'єкти дослідження.

Визначальну роль у перетвореннях відіграло винайдення книгодрукування (в Європі — з середини XV століття). Поширення книг різко прискорило обмін знаннями. Математичні трактати стали доступними, переписування більше не спотворювало зміст. Університети, мануфактури, навігація, військова справа — усе вимагало математичної підготовки. З'являється інтерес до логарифмів, нових способів рахунку, геометричних побудов. Хоча професійних математиків усе ще мало, сама дисципліна вже починає сприйматися як основа точного знання.



Німецька обручка XVI століття, що розгортається в астрономічну сферу.

Нарешті, Відродження — це епоха, коли мислителі прагнуть всебічності, універсальності. Леонардо да Вінчі проектує машини й вивчає анатомію, Альбрехт Дюрер — пише трактати з геометрії й створює фортифікаційні системи, Кардано займається одночасно медициною, механікою, математикою та астрологією. Такий універсальний став останнім великим сплеском перед наступною епохою поділу наук.

Винайдення книгодрукування в Європі

Одним із найважливіших подій епохи Відродження, що справила глибокий вплив на розвиток європейської науки, зокрема математики, стало винайдення книгодрукування. У середині XV століття Йоганн Гутенберг у Майнці розробив технологію друку за допомогою рухомих літер, що радикально змінило способи зберігання, тиражування та поширення знань.



До цього часу всі книги в Європі переписувалися вручну, переважно в монастирях або скрипторіях при університетах. Така праця була надзвичайно дорогою та повільною, а кількість примірників — строго обмеженою. Навіть найважливіші математичні трактати античності та арабського світу були відомі лише у кількох списках і часто у неохайних перекладах. Це означало, що доступ до наукового знання мали лише обрані.

Винайдення друкарського верстата близько 1440 року дало початок новій епосі. До 1500 року в Європі вже існували сотні типографій, які видали десятки тисяч видань. Важливі тексти — від праць Евкліда і Архімеда до алгебраїчних трактатів арабських і італійських авторів — стали доступними широкому колу вчених. Математика, раніше здебільшого елітарне та схоластичне знання, перетворилася на дисципліну, яку можна було вивчати з книг, купувати, обговорювати та перевидавати.

Книгодрукування сприяло стандартизації математичної термінології та позначень. Хоча протягом XVI століття системи позначень ще залишалися нестійкими (і часто залежали від конкретного автора чи школи), поступове поширення надрукованих трактатів прискорило формування єдиної математичної мови. Особливо це проявилось в алгебрі, де друкарський спосіб дозволив відтворювати формули, таблиці та символи з точністю, недоступною у рукописній традиції.

Крім того, друк сприяв зростанню довіри до тексту. Якщо рукописні книги часто містили помилки, внесені переписувачами, то надруковані видання, особливо ті, що проходили редагування, були точнішими.



Французька типографія на початку XVI ст.

Для математики це мало величезне значення. Уже наприкінці XV століття почали друкуватися підручники та наукові трактати з арифметики, геометрії, астрономії та алгебри. Так, у 1474 році Регіомонтан видає свої Ефемериди — таблиці астрономічних даних, виконані з невиданою раніше точністю та доступні широкому загалу. Це було перше в Європі надруковане видання такого роду.

Серед ранніх математичних книг, надрукованих у Європі, особливе місце займає *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* Луки Пачолі, видана в 1494 році. Ця робота стала не лише фундаментальним підручником, а й прикладом нового стилю

наукового викладу, орієнтованого на масового читача. Завдяки типографській техніці книга поширилася по всій Європі, справивши великий вплив на розвиток бухгалтерського обліку, фінансів і прикладної математики.

Книгодрукування також сприяло поверненню до античних джерел. Переклади та видання праць Евкліда, Архімеда, Аполлонія та Птолемея стали більш доступними, що дало новий імпульс для осмислення та переосмислення античної математичної спадщини. Наприклад, латинські видання «Начал» Евкліда у XVI столітті (включно з відомим перекладом Кемпе та редагуванням Клевіуса¹¹) стали основою математичної освіти в університетах Європи на кілька століть.

Поява надрукованих таблиць, особливо тригонометричних, значно полегшила обчислення та стимулювала розвиток астрономії і навігації. Складання і публікація таких таблиць, наприклад у Регіомонтана та пізніше у Франца Рейнольда, стало важливим завданням для математиків. Завдяки друку ці таблиці стали доступними не лише вченим, а й морякам, інженерам, архітекторам.

Крім того, друковане слово сприяло формуванню наукових спільнот і наступності: одні автори посилалися на інших, читачі могли порівнювати, критикувати, розвивати ідеї — не лише в межах окремих університетів, а й на рівні всієї Європи. У друкованих книгах почали з'являтися дидактичні елементи: зміст, списки завдань, таблиці, покажчики. Все це сприяло самоосвіті та зробило математику більш доступною для неспеціалістів.

Йоганн Мюллер (Регіомонтан)

Ім'я Регіомонтана (латинізоване прізвище Йоганна Мюллера, Johannes Müller, 1436–1476) тісно пов'язане з пробудженням європейської математики в епоху Відродження. Уродженець Кенігсберга в Баварії (звідси й його прізвище Regiomontanus, «міщанин королівської гори»), він став однією з ключових постатей на межі Середньовіччя та



Нового часу, стоячи біля витоків наукової революції.

Регіомонтан навчався у Відні, де рано проявив неординарні здібності до математики та астрономії. Його наставником став Георг Пурбах — учений, що почав перегляд застарілої системи Птолемея.

Головним математичним твором Регіомонтана став твір «Про всілякі трикутники» (*De triangulis omnimodis*), завершений близько 1464 року, але виданий посмертно в 1533 році. У ньому вперше були систематично викладені не лише методи розрахунку, а й геометричні доведення основних теорем, що зробило тригонометрію частиною математичної теорії.

¹¹ Йдеться про латинський переклад «Начал» Евкліда, здійснений Йоганном Кемпе (Johannes Campanus, бл. 1220–1296) у XIII столітті, та пізніше редагований і коментований Еразмом Клевіусом (Erasmus Clewius, XVI ст.) для полегшення навчання в університетах Європи.

Твір складається з п'яти книг. Перша книга присвячена розв'язанню плоских трикутників і містить базові визначення та побудови. У другій формулюється теорема синусів для плоских трикутників, а також розглядаються задачі, зведені до розв'язання квадратних рівнянь. Третя книга — вступ до сферичної геометрії; її зміст у значній мірі спирається на трактат «Сфера» Менелая Александрійського та арабомовні інтерпретації. Четверта книга містить доведення сферичної теореми синусів. П'ята книга формулює теорему, еквівалентну сферичній теоремі косинусів.

При цьому Регіомонтан не просто переказує арабські джерела (зокрема, праці аль-Баттані, ат-Тусі та Джабіра ібн Афлаха), а й доповнює їх власними доведеннями та поясненнями. Саме він уперше в європейській традиції строго довів теорему косинусів у сучасному вигляді.

Регіомонтан сформулював також кілька власних тригонометричних формул, зокрема так звану теорему тангенсів, що пов'язує між собою тангенси двох кутів трикутника та довжини сторін, протилежних цим кутам:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Він вважав, що знання тригонометрії є необхідною умовою для серйозного зайняття астрономією. У передмові до свого твору він писав: «Той, хто хоче пізнати великі та чудові речі, хто бажає зрозуміти рух зірок, повинен спершу вивчити ці теореми про трикутники. Лише тоді відкриється двері в астрономію та до найважливіших геометричних задач».

Регіомонтан склав докладні таблиці синусів і тангенсів із кроком у одну хвилину та точністю до семи знаків.



Будучи учнем Георга Пурбаха, Регіомонтан продовжив роботу над новим латинським перекладом «Альмагеста» Клавдія Птолемея. Завершений твір — *Erythraea in Almagesti Ptolemei* — став популярною альтернативою перекладу Георгія з Трапезунда, який Регіомонтан справедливо критикував за помилки. Саме до *Erythraea* пізніше звертався Коперник, називаючи його одним із джерел свого натхнення.

У 1474 році Регіомонтан видав Ефемериди — астрономічні таблиці, що містили координати планет, зірок та передбачення затемнень на кожен день до 1506 року. Це були перші астрономічні таблиці, видані книгодрукуванням. Вони відіграли важливу роль в епоху Великих географічних відкриттів: ними користувалися Васко да Гама, Христофор Колумб та інші мореплавці.

Регіомонтан також писав про конструкцію астрономічних інструментів: сонячних годинників, армілярних сфер (які він називав «метеороскопами»), універсальних астролябій, зокрема про пристрій, відомий у арабських астрономів як «сафея».

Регіомонтан був не лише вченим, а й видавцем. У 1471 році він заснував у Нюрнберзі одну з перших наукових типографій, де друкував математичні та астрономічні тексти,

зокрема й власні. Це стало важливим кроком у перетворенні науки з елітарного заняття на доступну систему знань, поширення якої прискорювалося завдяки книгодрукуванню.

Він помер у 1476 році в Римі за загадкових обставин, ймовірно від епідемії, не встигнувши приступити до реформи календаря за дорученням папи. Незважаючи на ранню смерть, Регіомонтан залишив обширну наукову спадщину. Його учні, зокрема вчителі Коперника, вважали його одним із найвидатніших умів свого часу. Деякі дослідники навіть припускають, що він був близький до формулювання геліоцентричної моделі, спираючись на ідеї Арістарха Самоського.

Теорія перспективи

Один із найважливіших внесків епохи Відродження у розвиток математики пов'язаний зі створенням і теоретичним обґрунтуванням лінійної перспективи. Хоча на практиці перспективні зображення застосовувалися ще в античності — зокрема, у давньогрецькій «скенографії»¹² — саме в XV столітті, на перетині мистецтва, архітектури та математики, формується строга геометрична теорія перспективи, яка стала основою майбутньої проєктивної геометрії.

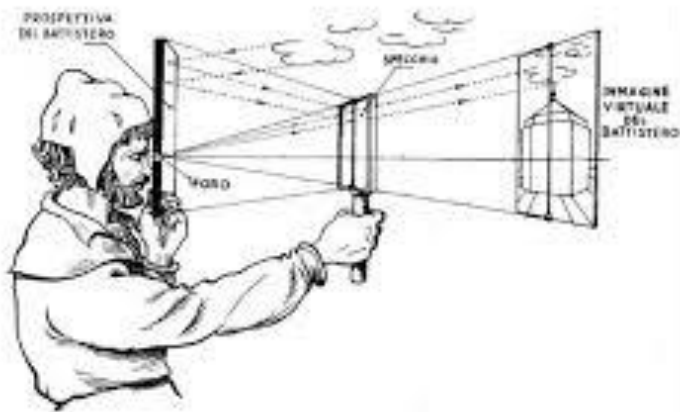


Джотто ді Бондоне, Благовіщення Анні, фреска Капели Скровеньї (дель Арена) у Падуї, 1305 р.

Корені цієї теорії сягають античної та середньовічної оптики. Ідеї центрального проєкування просторових фігур зустрічаються в «Оптиці» Евкліда і «Планісферії» Птолемея. У XIII столітті польський учений Вітелло в трактаті «Оптика» узагальнив античні та арабські джерела, включно з працями Евкліда, Птолемея і особливо Ібн аль-Хайсама, відомого в Латинській Європі як Альхазен. Трактат Вітелло став важливим джерелом для ренесансних мислителів: його видання 1572 року в Базелі разом із перекладом Джерардо Кремонського сприяло подальшому поширенню оптичних і геометричних ідей. Саме до Вітелло звертався Йоганн Кеплер у своїй Оптичній частині астрономії, озаглавленій Доповнення до Вітелло (*Ad Vitellionem paralipomena*).

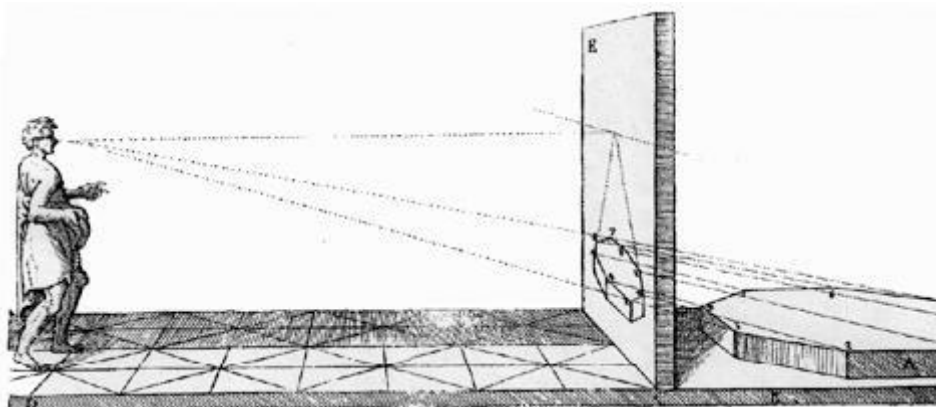
¹² Сkenографія — це мистецтво зображення декорацій і сценічних просторів у театрі та на малюнках, що створювалося у Давній Греції для передачі перспективи та глибини сцени.

BRUNELLESCHI E LA PROSPETTIVA GEOMETRICA



Однак переломний момент в історії перспективи пов'язаний із ім'ям флорентійського архітектора Філіппо Брунеллескі (1377–1446), якого вважають першим, хто сформулював геометричні основи центральної проєкції. За розповіддю сучасника Антоніо Манетті, Брунеллескі створив живописне зображення флорентійського баптистерія Сан Джованні з такою точністю та зоровою ілюзією, що глядач, дивлячись крізь отвір у дошці та відбиваючи картину в дзеркалі, відчував повне збіг зображення з реальністю. Цей досвід став своєрідною експериментальною демонстрацією дії перспективного побудови та її здатності «обманювати око».

Ідеї Брунеллескі були розвинені та формалізовані в трактатах його сучасників і послідовників. Леон-Баттіста Альберті (1404–1472), один із провідних гуманістів і архітекторів того часу, у трактаті «Про живопис» (*De pictura*, 1435) описав метод побудови зображення на картинній площині, заснований на фіксованій точці зору глядача, «уявному склі» між оком і об'єктом, та понятті точки сходження, в якій сходяться паралельні лінії. Цей метод Альберті називав *costruzione legittima* — «правильним побудуванням».



Альберті запропонував використовувати горизонтальну лінію (лінію горизонту), перетнуту «головним променем зору», як основу для побудови перспективи. Усі лінії, що зображують елементи архітектури, такі як краї стін, стелі та підлоги, мають сходитися в точці сходження на цій лінії. Він рекомендував розбивати площину підлоги

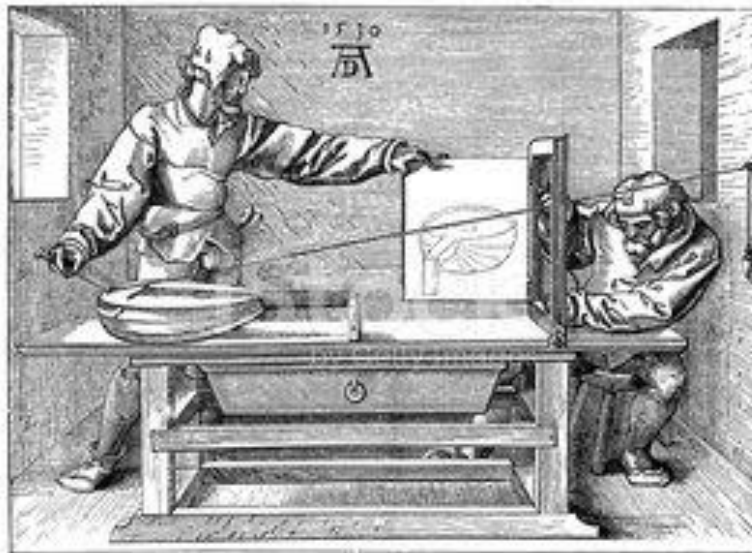
або землі на квадрати, що сходяться до горизонту, створюючи «шахову сітку», яка слугувала каркасом для зображення фігур у перспективі.

П'єро делла Франческа (1415–1492), художник і теоретик, зробив внесок у розвиток цих ідей у трактаті Про перспективу в живописі (*De prospectiva pingendi*, близько 1480), де описав побудову перспективного зображення предметів на основі їхніх ортогональних проєкцій. Він застосовував фронтальну перспективу, у якій горизонтальні лінії переднього плану зображуються без скорочення, а всі інші ведуть у точку сходження. Його роботи демонструють прагнення до строгого математичного обґрунтування зображення простору.



П'єро делла Франческа, Ідеальне місто, 1480

Леонардо да Вінчі (1452–1519) також приділяв багато уваги перспективі. Його численні ескізи, діаграми та трактати свідчать про глибокий інтерес до взаємозв'язку між візуальним сприйняттям і геометрією. Хоча він не написав завершеного трактату з перспективи, його роботи та дослідження значною мірою опираються на Альберті та Вітелло, при цьому поглиблюючи аналіз зору та світлових ефектів.



Малюнок Альбрехта Дюрера, що зображує його «перспективну» машину.

У Північній Європі видатний художник і графік Альбрехт Дюрер (1471–1528) зробив самостійний внесок у теорію перспективи у трактаті «Посібник з вимірювання» (*Underweysung der messung...*, 1525). У четвертій книзі він описує метод зображення предметів через «прозору площину», аналогічну «уявному склу» Альберті, а також сітку, натягнуту в дерев'яній рамі. Ця сітка ділить простір на квадрати, що спрощує

побудову зображень за аналогією з «шаховим полем». Такий підхід робив перспективу доступною навіть для тих, хто не мав глибоких знань геометрії.



Альбрехт Дюрер, Перспективне малювання, ілюстрація до другого видання трактату «Посібник з вимірювання», 1525 р.

Ідеї перспективи виявилися особливо плідними для архітекторів. Архітектор Антоніо Аверліно (Філарете) включив відомості про неї в «Трактат про архітектуру» (1461), а Франческо ді Джорджо Марині використав принципи Альберті та ілюстрував їх у власних творах. Лоренцо Гіберті та Паоло Уччелло експериментували з перспективою у живописі: останній, як він сам стверджував, «проводив дні й ночі», вивчаючи геометрію задля вдосконалення ракурсів.

Особливого розвитку теорія перспективи набула в епоху маньєризму¹³ та бароко¹⁴. Художники створювали ілюзії, «обмани зору», каприччо та архітектурні фантазії, насичені складними перспективними побудовами. Такі майстри, як Ганс Вредеман де Вріс, Гендрік ван Стейнвейк, Венцель Ямніцер і Лоренц Штор, застосовували перспективу не стільки як засіб імітації реальності, скільки як інструмент створення фантастичних, навмисно театральних просторів.

Отже, теорія перспективи, що виникла як художній і архітектурний інструмент, незабаром набрала важливого значення для геометрії. Її розробка стимулювала інтерес до побудов, пов'язаних із проекціями, променями, що сходяться, взаємним розташуванням фігур у просторі — усім тим, що згодом стало основою проективної геометрії XVII століття. Перспектива стала не лише знаряддям мистецтва, а й джерелом математичних відкриттів, знову зблизивши науку і мистецтво в душі античної традиції.

Леон Баттіста Альберті

Леон Баттіста Альберті (1404–1472) — постать, у якій зосередилися всі головні риси раннього італійського Відродження: енциклопедизм, раціоналізм, прагнення до гармонії тіла і духу. Він був архітектором, художником, письменником, математиком, фізиком,

¹³ Маньєризм — художній стиль і напрям у європейському мистецтві XVI–початку XVII століття, що характеризується надмірною елегантністю, витонченістю форм, складними композиціями та драматичними, іноді навмисно спотвореними пропорціями, як реакція на гармонію і пропорційність Відродження.

¹⁴ Бароко — художній і культурний стиль Європи XVII–початку XVIII століття, що відзначається динамічністю, емоційністю, багатством деталей, контрастом світла й тіні та ефектними перспективними композиціями. Бароко часто створювало драматичні, театралізовані образи, у яких перспективні прийоми використовувалися для посилення враження.

лінгвістом, юристом, а також одним із перших теоретиків мистецтва, які заклали основи наукового підходу до образотворчого творення. Альберті втілював у собі ідеал універсальної людини, *homo universalis*, настільки характерний для епохи.

Народившись у Генуї, Альберті навчався в Падуї та Болоньї, де отримав юридичну освіту, вивчаючи як канонічне, так і цивільне право. Бурхардт у книзі «Культура Італії в епоху Відродження» описує його як людину надзвичайної сили волі та фізичної витривалості, зазначаючи, що він «у 24 роки, відчувши, що його пам'ять ослабла, але здатність до розуміння збереглася, звернувся до фізики та математики». Він був вражений красою природи до сліз, стверджував, що людина здатна досягти всього, чого забажає, і, у дусі часу, вірив у силу людського розуму та гідність.



Ілюстрація з книги Альберті «Про живопис. Про статую». Видання 1804 р.

Найважливіший внесок Альберті в математику та мистецтво пов'язаний із його трактатом «Про живопис» (*De pictura*, 1435), у якому він уперше формулює системну теорію лінійної перспективи. Для Альберті перспектива була не просто зручним способом передавати просторові співвідношення на площині, а — що особливо важливо — відображенням самої природи людського зору.

«Художник не тільки малює, а й бачить за законами перспективи». Альберті одним із перших описав зорову піраміду як математичну модель сприйняття. На його думку, поверхні вимірюються «зоровими променями», що передають відчуттю форму предметів. Ці промені формують піраміду, в основі якої знаходиться спостережувана поверхня (тобто картинна площина), а вершина розташована в оці спостерігача:

«Поверхні, — стверджує Альберті, — вимірюються певними променями, як би слугами зору, що тому й називаються зоровими, які передають відчуттю форму предметів... Основою піраміди буде видима поверхня (перетин піраміди)... Вістря або вершина піраміди знаходиться всередині ока...»

Цей перетин — те, що відтворює художник. З точки зору Альберті, художник — особлива істота, здатна спрямувати потоки променів, організовані в піраміду, на предмет, а потім, зафіксувавши перетин цієї піраміди уявою, втілити його на картині. При цьому геометрична структура піраміди — її симетрія щодо точки сходження та картинної площини — піддається строгому математичному опису.



Подібна концепція виявилася не лише революційною для образотворчого мистецтва, а й важливою у розвитку математичної оптики та теорії сприйняття. Вона започаткувала традицію, що поєднує геометрію, фізику зору та мистецтво в єдине когерентне ціле — передбачаючи як науку Відродження, так і майбутні дослідження візуального сприйняття.

Інтерес Альберті до математики проявився й в іншій важливій сфері — криптографії. Він вважається одним із засновників шифровальної техніки раннього Нового часу. Йому належить створення багатоалфавітного шифру, пізніше відомого як «шифровальний диск Альберті» — одного з перших прикладів поліалфавітного шифру. Пристрій дозволяв регулярно змінювати шифровий алфавіт у межах одного повідомлення, роблячи його злам методом частотного аналізу значно складнішим.

Ніколя Шюке

Ніколя Шюке (близько 1445–1455 — близько 1488–1500) — французький математик, один із перших представників зароджуваної алгебраїчної традиції пізнього Середньовіччя. Він розробив власну систему позначень для степенів і алгебраїчних виразів, використовував від’ємні та нульові показники степеня і запровадив систему назв великих чисел, що стала основою сучасної довгої шкали¹⁵. Шюке вважають одним із тих, хто підготував ґрунт для майбутніх алгебраїчних реформ.

На початку 1470-х років він виїхав до Італії, де почав писати трактат з геометрії. Приблизно 1480 року переселився до Ліона, де працював викладачем математики та переписувачем книжок. Відомо, що він також перекладав латинські твори французькою мовою, зокрема «Трактат про сферу» Ніколя Орема.

У 1484 році Шюке написав великий алгебраїчний трактат «Наука про числа у трьох частинах» (*Le triparty en la science des nombres*). Трактат залишився неопублікованим за життя автора, однак пізніше був частково використаний без зазначення авторства Етьєном де ла Рошем у книзі *L’arismethique* (1520). У 1870-х роках рукопис знову відкрив історик Арістід Марр і опублікував його у 1880 році. Дослідження показали, що на полях оригіналу збереглися примітки рукою де ла Роша.

Окрім загальної арифметики та правил обчислення коренів, трактат містить учення про рівняння і збірник задач. У ньому, вочевидь за аналогією з терміном «мільйон»,

¹⁵ Довга шкала — система найменування великих чисел, у якій кожна нова назва (мільйон, білльон, трильйон тощо) відповідає піднесенню мільйона до відповідного степеня. Наприклад, мільйон = 10^6 , білльон = 10^{12} , трильйон = 10^{18} і т. д. (на відміну від короткої шкали, прийнятої в англomовних країнах, де кожна нова назва зростає у тисячу разів: білльон = 10^9 , трильйон = 10^{12} тощо).

запропонованим Марко Поло¹⁶, Шюке використав назви більйон, трильйон тощо — аж до ноніллїона. Він писав: «Один мільйон — це тисяча тисяч одиниць, один більйон — тисяча тисяч мільйонів, один трильйон — тисяча тисяч більйонів...».

Шюке став першим, хто запропонував послідовну систему позначень великих чисел на основі степенів мільйона. Ця система згодом отримала назву системи Шюке (Chuquet system), а пізніше — системи Шюке — Пелетьє (Chuquet–Peletier system), оскільки у XVI столітті математик Жак Пелетьє дю Ман сприяв її популяризації.

Згодом, у 1514 році, Гійом Бюде ввів термін мільярд (milliard) для позначення 10^{12} . Згодом, наприкінці XVII століття, значення слова мільярд було змінено на 10^9 , що призвело до поділу на «довгу» і «коротку» шкали. Сучасні європейські країни (зокрема Франція) користуються довгою шкалою, тоді як США та англomовні країни перейшли на коротку, де, наприклад, більйон означає вже 10^9 , а не 10^{12} .

У «Науці про числа» Шюке впевнено використовував у проміжних обчисленнях від’ємні числа, властивості й техніку дій з якими він добре опанував: «Хто додає мінус до якогось числа, той отримує меншу суму, а хто віднімає мінус — той отримує більший залишок... Коли кажуть “мінус”, це означає, що людина нічого не має і ще й винна. А коли кажуть “нуль”, це означає, що людина нічого не має».

Шюке був одним із перших, хто наблизився до поняття логарифма. Він зіставив арифметичну прогресію $1, 2, 3, \dots, n$ і геометричну прогресію $a, a^2, a^3, \dots, a^n$, зазначивши, що добуток двох членів другого ряду відповідає сумі членів першого. Він також зробив проникливе зауваження, що якщо до першого ряду додати від’ємне число, наприклад $-n$, то в другому йому відповідатиме дріб $1/a^n$.

Таким чином, у математиці вперше з’явилися нульові та від’ємні показники степеня. Шюке також першим запропонував позначати степені буквами у верхньому індексі справа — ця символіка ближча до сучасної, ніж у його сучасника Луки Пачолі.

Він також намагався застосовувати показники степеня для чисельного наближення до коренів рівнянь. Так, він стверджував (без строгого доведення, яке з’явилося лише у XIX столітті в рамках дослідження так званих рядів Фарєя), що число виду $(a + b)/(c + d)$ лежить між a/b і c/d і використовував це наближення для ітераційного розв’язання квадратного рівняння.

Трактат «Наука про числа», головна робота Шюке, не був опублікований за життя автора, але його ідеї здобули відомість у науковому середовищі й справили значний вплив на розвиток алгебри. Неопубліковані праці Шюке він залишив своєму учневі Етьєну де ла Рошу. Останній у 1520 році видав трактат «Арифметика» (L’arismetique, перевиданий 1538 року), де широко використав ідеї, терміни й позначення Шюке (іноді дослівно), не згадуючи справжнього автора.

¹⁶ Часто стверджують, що саме Марко Поло запровадив слово «мільйон» у європейській традиції, нібито перейнявши його під час подорожей на Схід. Однак більшість сучасних дослідників вважають, що це не зовсім так. Саме слово походить від італійського milione (mille + суфікс збільшення -one), тобто буквально «велика тисяча». Ймовірно, Марко Поло лише зробив цей термін популярним завдяки своїй «Книзі про різноманіття світу» (Il Milione), яку сучасники прозвали саме так — «Мільйон» — за схильність автора до численних і, на їхню думку, перебільшених описів.

У Національній бібліотеці Франції зберігаються рукописи ще двох неопублікованих праць Шюке — з комерційної арифметики та з геометрії.

Лука Пачолі

Однією з центральних постатей перехідного періоду від середньовічної до ренесансної математики став Лука Пачолі (бл. 1445 – бл. 1517) — італійський математик, монах францисканського ордену, викладач, автор одного з перших друкованих трактатів з алгебри. Його життя й діяльність є яскравим прикладом того, як математика вписувалася в інтелектуальну культуру Італії кінця XV століття, поєднуючи університетське й практичне знання, латинську традицію та народну мову, схоластику і зароджуваний гуманізм.

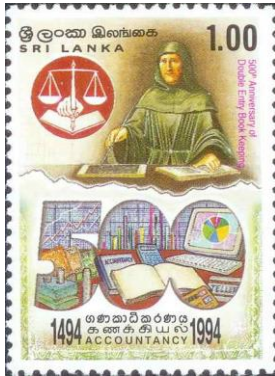


Портрет Луки Пачолі, традиційно приписуваний Якопо де Барбарі, 1495 р.

Лука Пачолі народився у Борго-Сан-Сеполькро — невеликому місті в Тоскані, що тоді входило до складу Флорентійської республіки. Рано потрапив у культурне середовище Північної Італії: служив при дворі купців, навчався у Леона Баттісти Альберті, належав до гуманістичних кіл. Пачолі викладав в університетах Перуджі, Рима, Флоренції, Неаполя, Венеції та багатьох інших міст, мандруючи всією Італією. Наприкінці життя він довго мешкав у Мілані, де зблизився з Леонардо да Вінчі: саме Пачолі був його математичним наставником і джерелом натхнення.

Головний твір Пачолі — «Сума арифметики, геометрії, відношень і пропорцій» (*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*, 1487 р., видана 1494 р.). У цій енциклопедії математичних знань свого часу Пачолі викладає правила арифметичних дій, дії з дробами, а також алгебру, яку він називає *regula della cosa* і *arte maggiore* — «правило речі» та «високе мистецтво». Він розглядає лінійні, квадратні та деякі типи біквадратних рівнянь.

Пачолі користується системою позначень, успадкованою від традиції абакусних шкіл: вільний член позначається як n^o (numero — число), невідоме — co (cosa — «річ»), його квадрат — ce (censo), куб — cu (cubo), а вищі степені отримують назви за складною системою relato: наприклад, x^5 позначається як $p^o r^o$ (primo relato), x^7 — $2^o r^o$ (secondo relato), x^{11} — $3^o r^o$ (tersio relato) тощо. Ця система була мультиплікативною: $x^6 = ce. cu.$ (квадрат куба), $x^8 = ce. ce. ce.$ і т. д. Назви степенів, не розкладних на множники 2 і 3, подібні до тих, що зустрічаються у візантійського автора Михайла Пселла¹⁷; ймовірно, relato є латинською калькою з грецького терміна.



Пачолі також вводить позначення для другого невідомого, аналогічного сучасному y : $quantità$, символічно — qo^o ; його квадрат — $ce. de qo^o$ і так далі. Він уживає знаки p (від річ — «плюс») і m (від meno — «мінус») для позначення додавання та віднімання — один із найраніших прикладів алгебраїчної нотації. Пачолі формулює правила дій зі знаками при множенні чисел, зокрема для від'ємних значень. На його розуміння від'ємних чисел, очевидно, вплинуло новаторське введення ним подвійної бухгалтерії, коли всі фінансові операції записуються у двох стовпцях — кредиту (дохід) і дебету (борг); саме бухгалтерії присвячено великий розділ «Суми». Це була одна з перших спроб поєднати математичні абстракції з реальною економічною практикою.

«Сума» містить також велику кількість задач. Деякі з них становлять історичний інтерес. Так, одна задача, пізніше знаменита в теорії ймовірностей: гра у кості, де перемагає той, хто першим набере 6 очок, була перервана при рахунку 5 у одного гравця та 2 — в іншого. Пачолі пропонував поділити ставку у пропорції 5 : 2 — підхід, який з позицій сучасної теорії ймовірностей є помилковим, оскільки не враховує шансів на перемогу в недограній партії. Проте в «Сумі» ця задача розглядалася практично, без апеляції до ймовірнісного тлумачення, що цілком відповідало рівню розвитку науки XV століття.

В арифметичній частині «Суми» викладено різноманітні прийоми обчислень, зокрема індійський спосіб множення за допомогою ґратки, відомий під назвою *gelosia* — за аналогією з ґратчастими віконницями. Тут же Пачолі наводить містичне пояснення того, чому досконалі числа закінчуються лише на 6 і 8: на його думку, це тому, що досконалі люди дотримуються встановленого порядку. Книга рясніє біблійними цитатами, що підкреслює тісний зв'язок наукових міркувань автора з його богословським світоглядом.



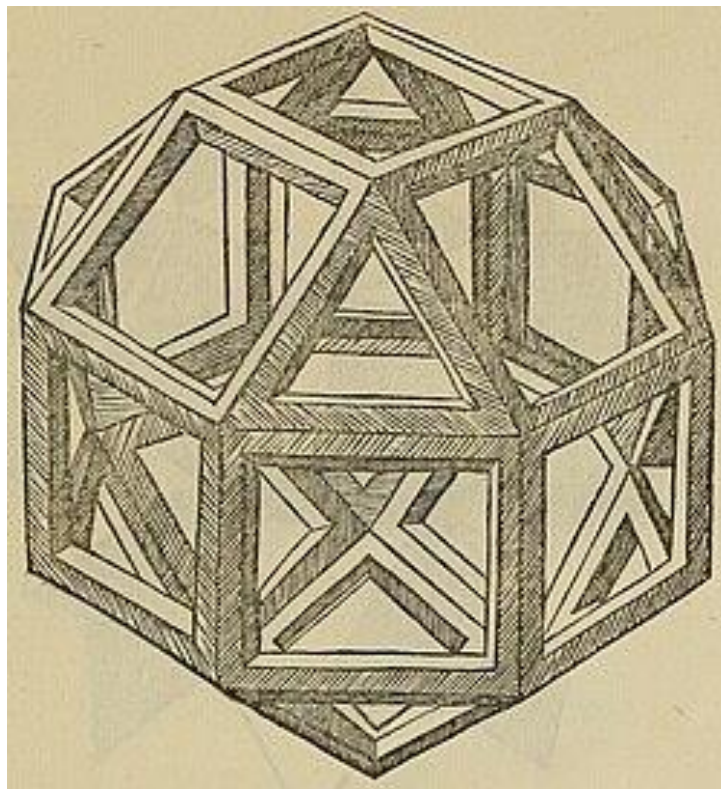
Алгебраїчні задачі, розв'язувані у «Сумі», не виходять за межі тих, що розглядалися в арабських трактатах з аль-джабр валь-мукабала чи в «Книзі абака» Леонардо

¹⁷ Михайло Пселл (бл. 1018 — після 1078) — візантійський філософ, історик і державний діяч, один із найосвіченіших людей свого часу. Викладав у Константинопольській вищій школі (так званій Магнавській школі), відроджуючи візантійський інтерес до античної науки — зокрема, до Платона, Арістотеля та Евкліда. Його твори поєднують філософію, богослов'я та наукові знання, а вплив Пселла помітний у розвитку візантійської освітньої і математичної традиції XI століття.

Пізанського. Проте Пачолі надає їм систематичної форми й викладає живою італійською мовою, а не латиною, роблячи свій твір доступним ширшій аудиторії.

Крім того, Пачолі приділяє увагу практичним задачам — складним відсоткам, валютним курсам, комерційним операціям. Книга містить таблиці монет, ваг і мір, уживаних у різних регіонах Італії, що робить її цінним довідником для купців і бухгалтерів свого часу.

На наполягання Леонардо да Вінчі Лука Пачолі написав книгу «Про божественну пропорцію» (*De divina proportione*, 1497 р., видана 1509 р.). Леонардо виконав для неї ілюстрації п'яти правильних багатогранників і похідних від них тіл, утворених шляхом відсікання та насадження. Книга присвячена архітектурі (в дусі Вітрувія¹⁸), геометрії, симетрії та «золотому перерізу» — *sectio aurea*, який Пачолі називає «божественною пропорцією». Він стверджує, що гармонія форм і чисел є відображенням божественного порядку. Виклад геометричного матеріалу спирається на XIV книгу «Начал» Евкліда (приписувану Гіпсиклу). Зокрема, Пачолі аналізує пропорції людського тіла, що виражаються цілими числами, меншими за 10, — це також відбилося у рисунках Леонардо. Відомо, що Пачолі здійснював розрахунки маси та об'єму бронзи, потрібної Леонардо для виготовлення кінної статуї Франческо Сфорца.



Одна з ілюстрацій Леонардо да Вінчі

¹⁸ Марко Вітрувій Полліон (I ст. до н. е.) — римський архітектор, інженер і теоретик мистецтва, автор трактату «*De architectura*» («Про архітектуру») у десяти книгах. У своєму творі Вітрувій узагальнив знання з архітектури, механіки, геометрії, гідравліки, астрономії та пропорцій людського тіла. Його праця справила великий вплив на ренесансну науку та мистецтво — зокрема, на Леонардо да Вінчі, який створив свій знаменитий малюнок «Вітрувіанська людина» на основі описів Вітрувія.

З 14 жовтня 1477 року по 11 грудня 1480 року Пачолі викладав у Перуджинському університеті, читаючи лекції з алгебри та геометрії. Він залишив розгорнуті конспекти двох курсів — «Алгебра» і «П'ять правил Платона», оформлені окремою книгою та присвячені «своїм люб'язним учням, відмінним і славним юнакам Перуджі». У наступні роки Пачолі викладав в університетах Рима, Неаполя, Мілана, Болоньї, Флоренції та інших міст, а в 1481–1489 роках жив у місті Зара (тепер Задар у Хорватії), займаючись теологією, математикою та справами ордену.

Близько 1500 року Лука Пачолі написав неопублікований трактат про шахи — *De ludo scachorum* («Про шахову гру»). Довгий час вважалося, що рукопис втрачено, однак у 2006 році її виявили в бібліотеці графа Гульєльмо Короніні-Кронберга в місті Горіція, яка налічує понад 22 тисячі томів. У 2008 році факсимільне видання трактату було опубліковане на батьківщині Пачолі, у Сан-Сеполькро. Враховуючи тісну дружбу автора з Леонардо да Вінчі та той факт, що да Вінчі ілюстрував *Divina proportione*, деякі дослідники висувують припущення, що він міг або створити малюнки шахових задач, представлених у рукописі, або розробити дизайн фігур, ужитих у цих композиціях.



De ludo scachorum — це не просто шаховий підручник. Замість опису правил чи загальних стратегій, трактат являє собою зібрання понад сотні шахових задач, багато з

яких відзначаються великою складністю й, очевидно, були розраховані на досвідчених гравців. Рукопис поділено на дві основні частини: одна містить задачі, засновані на звичних для того часу правилах, інша — умовні, фантастичні варіанти. Вишуканість діаграм і винахідливість самих задач дають підстави вважати, що трактат створювався не лише для навчання, а й для естетичного задоволення.

Леонардо да Вінчі

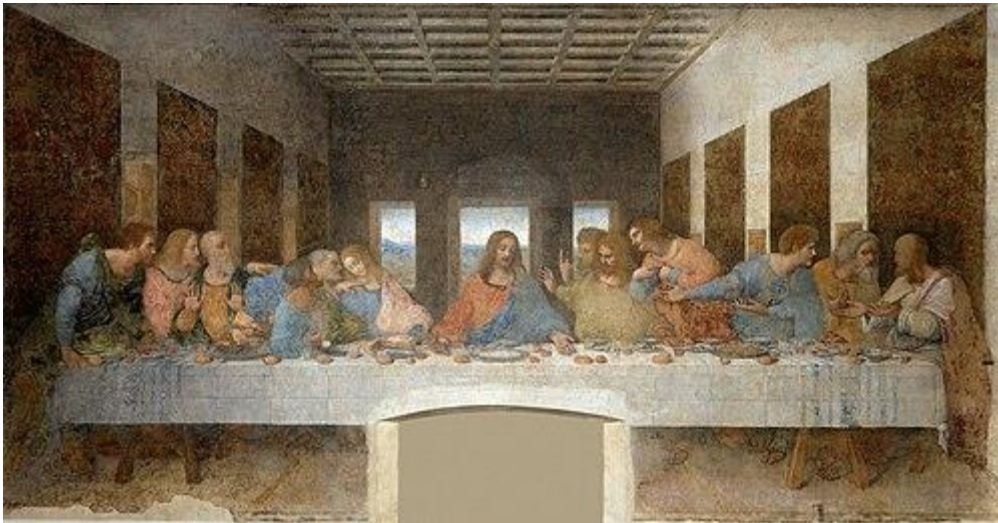
Леонардо да Вінчі (1452–1519) — один із найяскравіших представників італійського Відродження, універсальний геній, який залишив слід у живописі, інженерії, анатомії, архітектурі й, безумовно, у математиці.



Автопортрет

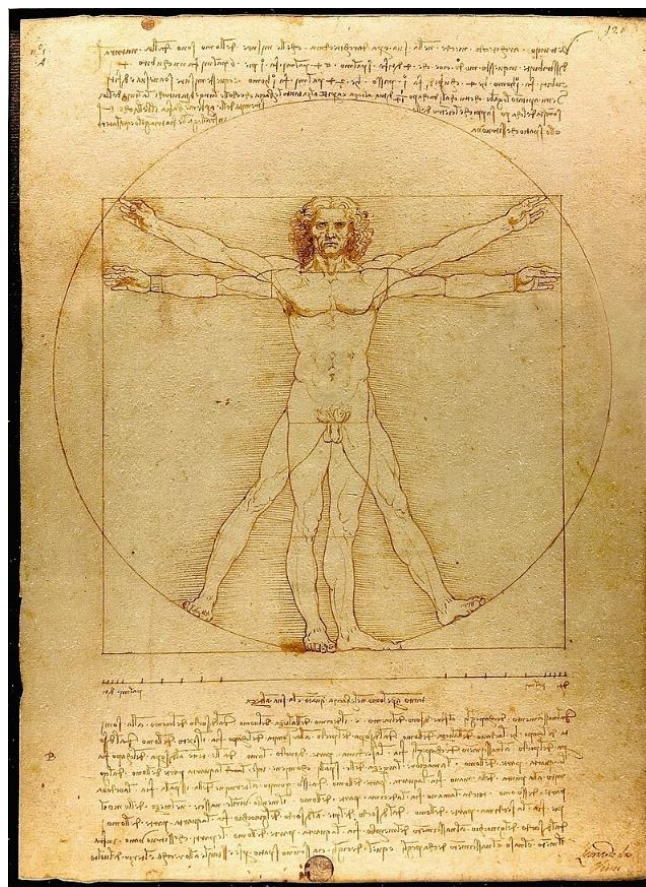
Одним із головних математичних інтересів Леонардо була геометрія. Працюючи над живописними та архітектурними проектами, він прагнув зрозуміти математичну природу форми, простору й руху. Особливо важливим для нього було вчення про перспективу — мистецтво зображення тривимірного світу на пласкій поверхні. Натхненний працями античних авторів і своїх сучасників, таких як архітектор Леон Баттіста Альберті та математик Лука Пачолі, Леонардо ретельно вивчав закони перспективи й застосовував їх у своїх картинах і рисунках. Його знаменита «Темна

вечеря» — зразок складної лінійної перспективи, де всі лінії сходяться в точці за головою Христа, підкреслюючи центральність його постаті.



Таємна вечеря, 1495–1498 рр., розпис трапезної монастиря Санта-Марія-делле-Граціє, Мілан

Леонардо розглядав геометрію не лише як теоретичну дисципліну, а й як шлях до пізнання гармонії природи. Він креслив ідеалізовані багатогранники, досліджував «золоту пропорцію», пропорції людського тіла (зокрема у знаменитому рисунку «Вітрувіанська людина») і прагнув знайти універсальні математичні закономірності в будові всього живого.



У своєму «Трактаті про живопис», опублікованому посмертно 1651 року, Леонардо наголошував, що художник повинен знати науки, особливо геометрію та оптику. Перспектива, на його думку, — це геометрична основа образотворчого мистецтва. Леонардо твердив, що «закохані в практику без науки — подібні до керманича, який сідає на корабель без стерня й компаса», але водночас зазначав, що й наука без практики «нагадує стоячу воду, яка або гниє, або замерзає». Ця ідея нерозривного зв'язку теорії та практики пронизує всю його творчість.

У записниках Леонардо да Вінчі міститься чимало математичних задач, пов'язаних із побудовою правильних багатокутників і зоряних многогранників. Він цікавився як класичними задачами (наприклад, вписати багатокутник у коло), так і більш специфічними — коли циркуль мав залишатися з фіксованим розкриттям. Цю задачу знали ще з часів Абу-ль-Вафи, але Леонардо розв'язував її з властивою йому винахідливістю. Деякі побудови (зокрема семикутника й дев'ятикутника) він подавав у наближеній формі, а в інших випадках сам визнавав свої помилки.

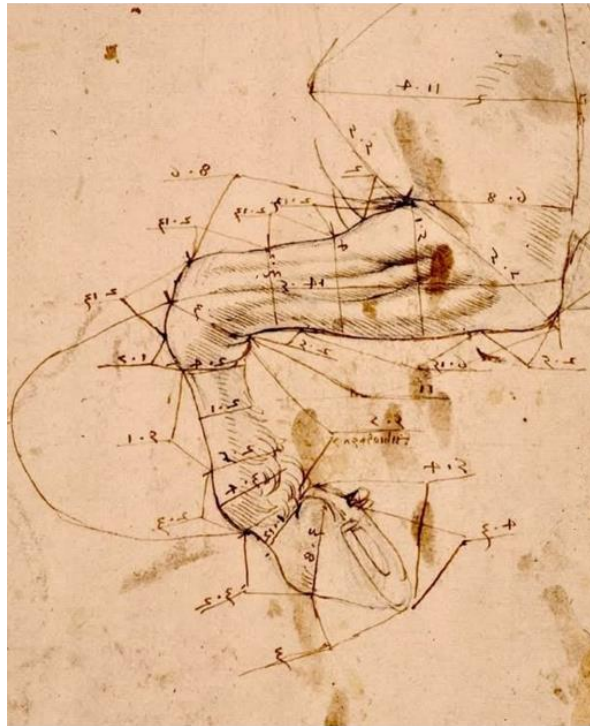


Рисунок Леонардо, близько 1490–1492 рр.

Особливе місце серед його математичних занять посідає співпраця з монахом і математиком Лукою Пачолі, автором трактату «Про божественну пропорцію» (*De divina proportione*, 1497). Цей трактат, ілюстрований рисунками Леонардо, викладає теорію золотого перетину та її застосування в мистецтві й архітектурі. Хоча ідеї Пачолі спираються на більш ранні джерела — зокрема на Евкліда й античну традицію — його твір став важливим внеском у популяризацію математичної краси та гармонії. Леонардо не лише створював ілюстрації до трактату, а й, імовірно, активно обговорював із Пачолі математичні питання, прагнучи зрозуміти, як чисто математичні відношення виявляються у візуальній формі.

У задачах, пов'язаних із визначенням площ і об'ємів, Леонардо часто вдавався до методів, подібних до підходів Архімеда. Він вивчав центри ваги фігур і тіл — таких, як

півкруг і тетраедр, — намагався обчислити площу еліпса, наближено «квадратував» круг за допомогою конструкції, у якій використовувалося колесо шириною в половину радіуса. За повного оберту такого колеса його прямокутний слід, як зауважив Леонардо, має площу, рівну площі круга основи.



Примітно, що хоча Леонардо теоретично заперечував ідею «подільностей» (недільних частин), вважаючи, що точка не може бути частиною лінії, на практиці він застосовував метод подільностей, близький до інтуїтивного інтегрування. Він використовував його не як спосіб доведення, а як евристичний інструмент для пошуку розв'язку. Наприклад, досліджуючи витікання води з посудини, він замінював воду зернами проса, зауважуючи, що дозволяє собі таку вільність, «спільну з математиками», і порівнював це з поділом часу на градуси — переходом від неперервного до дискретного.



Окрім геометрії, Леонардо виявляв великий інтерес до механіки й намагався математизувати поняття руху, сили та опору. У численних рукописних нотатках містяться схеми механізмів, креслення машин і спроби сформулювати фізичні закономірності в математичній формі. Хоча він не дійшов до строгих математичних рівнянь, як це зроблять згодом Галілей і Ньютон, його підхід був напроцуд сучасним: Леонардо прагнув узагальнювати досвід, формувати закони природи й описувати їх кількісно.



Він називав механіку «раєм математичних наук», підкреслюючи її фундаментальне значення. У його рисунках і нотатках можна знайти спостереження за прискоренням, траєкторіями тіл, опором повітря. Ці спостереження, хоч і не оформлені як формалізована теорія, передбачають метод наукового експерименту й кількісного аналізу.

Леонардо не обмежувався теоретичними побудовами — він створював також інструменти для практичного застосування математичних знань. Зокрема, він винайшов циркуль для пропорційного збільшення та зменшення фігур, а також прилад для побудови параболи. Ці пристрої поєднували інженерну винахідливість із глибоким розумінням геометричних принципів.



Альвар Томас

Альвар Томас (Alvaro Thomaz, fl. 1500–1521) — португальський мислитель і математик, представник традиції «калькуляторів» (calculatores) Мертон-коледжу. Народився в Лісабоні, навчався в Парижі, де пізніше викладав між 1510 і 1521 роками. На початку XVI століття він здобув ступені магістра й доктора медицини та викладав у Сорбонні, зокрема в Collège de Coqueret, серед його колег був шотланець Роберт Каубрейт. Томас був сучасником і співробітником іспанського вченого Хуана де Селайї, який пізніше викладав у Коледжі Санта-Барбара. Про життя Томаса після 1521 року і дата його смерті невідомі.

Його основні математичні ідеї викладено в творі «Книга про потрійний рух і відношення» (Liber de triplici motu proportionibus annexis, Париж, 1509). Назва книги відсилає до аристотелівського вчення про три види руху: механічний (переміщення в просторі), кількісний (зростання й зменшення) та якісний (зміна властивостей). Але особливо цікавими є математичні розділи цього трактату, де Томас досліджує нескінченні числові ряди.



Сторінка з Liber de triplici motu

Одним із ключових його досягнень стало узагальнене правило для підсумовування степеневих рядів виду $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, де $|x| < 1$. Томас подає словесне доведення цього правила, використовуючи розкладання в суму геометричних прогресій. Зокрема, він розкладає складніші ряди на частини, що зводяться до простих геометричних, і застосовує до них відому формулу суми нескінченної спадної прогресії $1/(1+x)$. На основі цього підходу він аналізує й складніші вирази, наприклад, ряди, у яких коефіцієнти чергуються або мають певну закономірність.

Хоча строгої аналітичної теорії він ще не мав, Томас інтуїтивно прагнув зрозуміти поведінку цих сум. Так, наприклад, для $|x| < 1$ він подає суму ряду $1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$. Він навіть робить спроби оцінювати суми деяких рядів, які сьогодні ми пов'язуємо з логарифмічними функціями.

Франческо Мавроліко

Франческо Мавроліко¹⁹ (1494–1575) народився в Мессіні, на Сицилії, у родині грецького походження. Його батько, Антоніо Марулі, був освіченим лікарем і державним службовцем, який утік до Італії після падіння Константинополя 1453 року. Мавроліко здобув блискучу гуманітарну й наукову освіту, опосередковано успадковану від відомого візантійського гуманіста Костянтина Ласкаріса.



Від 1521 року він належав до духовного стану, а 1550 року став абатом бенедиктинського монастиря Санта-Марія дель Парто в Кастельбуоно. Поряд із церковною кар'єрою Мавроліко займав і світські посади: очолював монетний двір Мессіни, відповідав за укріплення міських фортифікацій за дорученням Карла V та навчав синів намісника Сицилії.

Мавроліко активно спілкувався з ученими свого часу — Христофором Клавієм і Федеріко Командіно. З 1569 року він обіймав посаду професора в Мессінському університеті. Помер у 1575 році під час епідемії чуми, усамітнівшись у замиській віллі на північ від міста.

Значну частину життя Мавроліко присвятив перекладу та коментуванню праць давньогрецьких

учених, відіграючи важливу роль у збереженні й передачі античної наукової спадщини. Його внесок у цю справу можна порівняти з діяльністю гуманістів пізнішого часу.

Особливо важливою є збірка 1558 року, що містила переклади «Сферики» Теодосія та Менелая, трактату Автоліка «Про рухому сферу», «Феноменів» Евкліда та твору

¹⁹ Псевдонім «Мавроліко» очевидно складається з двох частин — μαύρος λύκος («чорний вовк»). Втім, його походження може бути тоншим: ранній варіант авторського написання — Μαυρο Λυσιό, який Мавроліко використовував у складі місцевої інтелектуальної академії в Мессіні, можна тлумачити інакше — як «темний бік світла». Це відсилає до епітета Λύκιος Απόλλων — «Лікійський Аполлон», тобто Аполлон як бог світла й розуму, але водночас і хранитель таємниць.

Теодосія «Про населену землю». Ці переклади супроводжувалися оригінальними коментарями та власним трактатом Мавроліко про сферу.

Найважливішими серед його перекладів вважаються «Конічні перетини» Аполлонія Перзького (видані 1654 року) та твори Архімеда (опубліковані 1685 року в Палермо). Крім того, він першим у Європі здійснив спробу реконструювати втрачені книги V–VII «Конічних перетинів» Аполлонія — вагомий крок в історії текстологічної науки, навіть попри те, що пізніше ці книги були знайдені в арабських перекладах.

Сучасники називали Мавроліко «другим Архімедом» — настільки високо цінували його внесок у геометрію та механіку. У трактаті *De momentis aequalibus* (1548), опублікованому лише 1685 року, він обчислив центри ваги тіл обертання — піраміди, конуса, параболоїда. Ці результати ґрунтуються на методах, близьких до інтегрального числення, і передують ідеям математичного аналізу.

У неопублікованому рукописі *Compagnationes solidorum regularium* (1537) Мавроліко сформулював співвідношення між вершинами, ребрами й гранями платонових тіл — рівняння, еквівалентне знаменитій формулі Ейлера $V - E + F = 2$, задовго до її загального формулювання у XVIII столітті.

У галузі астрономії він спостерігав зорі й планети, складав космографічні карти та створював астрономічні інструменти. Імовірно, саме він першим у Європі спостеріг наднову в сузір'ї Кассіопеї 1572 року — за три дні до Тихо Браге. Його трактат *De Sphaera* (1575) містить систематичний виклад сферичної астрономії.

У працях *De lumine et umbra* і *Diaphana* (опублікованих 1611–1613 pp.) Мавроліко досліджував закони відбиття й заломлення, природу веселки, роботу лінз і дзеркал, описував каустичні криві. Його експерименти та висновки щодо випромінюваного тепла й фотометрії мають новаторський характер і випереджають свій час.

Мавроліко залишив також історико-географічний твір *Sicanicarum regum compendium*, у якому описав історію Сицилії. Сенат Мессіни навіть надав йому стипендію для завершення цього твору та інших наукових праць.

Особливе значення має внесок Мавроліко у розвиток методу математичної індукції. У його праці *Arithmeticon libri duo* (1575), опублікованій уже після смерті автора, міститься перше відоме строге доведення методом індукції. Він застосовує цей метод для доведення властивостей числових послідовностей — зокрема, сум арифметичних і геометричних прогресій.

Цей випадок вважається першим чітким прикладом математичної індукції як усвідомленого методу доведення, більш ніж за століття до того, як він став загальноприйнятим у математичній практиці XVII століття.

Коссисти

У XVI столітті німецькі математики, яких називали коссистами, відіграли важливу роль у розвитку алгебраїчної символіки. Назва «коссисти» походить від слова *Coss*, яким вони позначали алгебру. Це слово, у свою чергу, походить від італійського *cosa* — «річ», так в італійській традиції називали невідоме число.

Коссисти були першими, хто почав використовувати знаки «+» і «-» для позначення додавання та віднімання. Ці знаки вперше з'явилися в книзі Яна (Йоганна) Відмана — уродженця чеського міста Хеб, який викладав у Лейпцизькому університеті. У 1489 році він видав підручник «Швидка і гарна лічба для всього купецтва», де були надруковані ці знаки. Вважається, що знак «+» походить від латинського союзу et («і»), з якого пізніше розвинувся сучасний символ «&».

Серед найвідоміших коссистів — Адам Різе (1492–1559), також відомий під латинським ім'ям Gigas («велетень»), і Крістоф Рудольф (бл. 1500 – середина XVI століття), уродженець Сілезії. Різе опублікував підручник Coss у 1524 році, а Рудольф у 1525 році — книгу «Швидка і гарна лічба за допомогою вправних правил алгебри, зазвичай званої Coss».

Цікаво, що Різе стверджував, нібито його книга ґрунтується на давній рукописній праці, начебто перекладеній з арабської на грецьку Архімедом, потім на латину Апулеєм, а згодом на німецьку магістром Андреасом Александером²⁰. У ті часи було звичним приписувати свої тексти великим ученим минулого — це додавало ваги й авторитету. У тій же рукописі алгебра називалася Gebra und Almuchabola — спотворена форма арабської назви аль-джабр ва-л-мукабала.

Коссисти розвивали особливу систему позначень степенів невідомої. Наприклад, у рукописі бл. 1480 року, якою користувався Ян Відман, використовувалися скорочення від латинських слів:

x (невідоме) — res («річ»)

x^2 — zensus («квадрат»)

x^3 — cubus («куб»)

Вищі степені позначалися комбінаціями цих слів. Наприклад, x^4 — «квадрат квадрата», x^5 — sursolidum («глухе тіло») — так коссисти називали степені, які не отримувалися піднесенням до квадрату або кубу. Це відображає арабське слово asamm — «німий» або «невиразний», що позначає складні, ірраціональні корені. Таким чином, коссисти показували, що такі степені не виражаються простими операціями.

Іноді для степенів використовували навіть такі позначення, як Zensus Zensui de Zensu (для x^8) і Cubus de Cubo (для x^9). У міру розвитку символіки переходили від складних описів до компактніших буквених позначень.

Вільний член рівняння (число без змінної) коссисти позначали символом, що походить від літери *d*, першої літери слова Dragma — спотвореної форми арабського дирхам (грошова одиниця). Це символічне позначення сягає текстів аль-Хорезмі, арабського математика IX століття, звідки почалася європейська алгебраїчна традиція.

²⁰ Ідея про те, що Архімед нібито перекладав тексти з арабської на грецьку, є анахронізмом. Архімед жив у III ст. до н.е., а арабська мова як наукова традиція поширилася лише після VII століття н.е. Правильніше вважати, що середньовічні європейські автори намагалися приписати своїм текстам давньогрецьке походження для підвищення авторитету, або що арабські переклади античних грецьких текстів стали джерелом для пізніших європейських коссистів.

Розроблена коссистами система позначень — так звані коссистські знаки — поширилася далеко за межі Німеччини.

Міхаель Штіфель

Одним із найяскравіших представників коссистів був Міхаель Штіфель (бл. 1487–1567), уродженець Вюртемберга. У молодості він був августинським ченцем, але незабаром приєднався до Реформації під впливом Мартіна Лютера, з яким перебував в одному ордені. Штіфель став протестантським пастором і активно брав участь у релігійних диспутах того часу.



Спершу Штіфель цікавився містикою чисел: намагався знайти в Біблії приховані числові закономірності і навіть передбачив кінець світу на 19 жовтня 1533 року. Коли це не справдилося, його заарештували, а потім відпустили. Після цього він відійшов від містики й серйозно зайнявся математикою, увійшовши в число видатних учених свого часу.

Головні праці Штіфеля датуються 1540–1550-ми роками. Він написав «Повну арифметику» (*Arithmetica integra*, 1544), Німецьку арифметику (німецькою, 1545) і переробив підручник Крістова Рудольфа з алгебри (1553). У останній книзі його доповнення перевищили за обсягом і значенням оригінальний текст. Через ці

праці Штіфель увійшов в історію як один із перших, хто чітко виклав основи алгебри в європейській традиції.

У «Повній арифметиці» він докладно розглядав степені та корені, від’ємні числа, прогресії й навіть запропонував перші позначення показників степеня. Він використовував латинські терміни на кшталт *surd* і *sursolidum*, придумуючи скорочені позначення для різних ступенів змінної x , таких як x^2 , x^3 і навіть вищих — до x^{23} .



Штіфель розмірковував над тим, що означають степені змінної з геометричної точки зору. Він пов’язував арифметичні ступені з геометричними вимірами:

одиниця — точка, a — лінія, a^2 — квадрат (площина), a^3 — куб (об’ємне тіло). Далі, на його думку, йти неможливо: у геометрії не можна уявити «тілесну»

(об’ємну) лінію чи поверхню, якби існувало більше трьох вимірів. Проте, заради потреб алгебри, він пропонував приймати такі узагальнення хоча б умовно. Таким чином, Штіфель фактично наблизився до ідеї багатовимірного простору, яку пізніше розвинули математики XIX століття.

Він також ввів поняття «коссичної лінії» — шляху, який описує будь-яка величина при русі. Наприклад, якщо пряма лінія рухається вздовж іншої лінії, утворюється прямокутник, який Штіфель називав коссичною лінією. По суті, він інтуїтивно передбачив ідеї про многовиди й траєкторії, що стали важливими в сучасній математиці.



Цікаво, що задовго до Ньютона Штіфель у своїй «Алгебрі» вже розглядав розкладання бінома — виразу виду $(a + b)^n$ — на множники. Він наводив повні розклади бінома в цілих степенях і виписував трикутник коефіцієнтів, аналогічний тому, що пізніше став відомий як трикутник Паскаля. По суті, Штіфель знав формули для бінома Ньютона для

натуральних показників і вмів обчислювати степені двочлена. У його працях можна знайти розклади квадрата суми і куба суми. Він навіть досліджував закономірності коефіцієнтів і зв'язки між сусідніми рядками трикутника, хоча не формулював загального правила.

Окрім того, Штіфель відомий як один із попередників логарифмів. Він першим звернув увагу на те, що у таблицях степенів можна замінити множення чисел додаванням їхніх показників, що значно спрощує обчислення. Хоча він не складав логарифмічних таблиць, його ідеї вплинули на Джона Непера, офіційного винахідника логарифмів.



Штіфель став першим професором математики в університеті Єні та справив великий вплив на розвиток алгебри в німецькій науковій традиції.

Миколай Коперник

Миколай Коперник (1473–1543) народився в польському місті Торунь у родині заможного купця. Після ранньої смерті батька його опікуном став дядько з матиного боку — Лукас Ватценроде, єпископ Вармінський, який відіграв важливу роль у вихованні та освіті племінника. Коперник навчався у Краківському університеті, де отримав ґрунтовну підготовку з математики, астрономії та вільних мистецтв. Згодом він продовжив освіту в Італії — у Болоньї, Падуї та Феррарі, вивчаючи право, медицину й канонічне богослов'я. У 1503 році став доктором канонічного права.



Все життя Коперник поєднував наукову діяльність із церковною службою. Він був каноніком Вармінської капітули у Фромборку (Фрауенбурзі), займався адміністративною й медичною роботою, а у вільний час — астрономією та математикою. Саме в цих умовах він протягом десятиліть розробляв свою революційну геліоцентричну модель світу.

Коперник помер у 1543 році, невдовзі після виходу у світ головної праці свого життя — книги «Про обертання небесних сфер» (De revolutionibus orbium coelestium). У передмові до книги Коперник зазначав: «Беручи до уваги, якою безглуздістю може здатися це вчення, я довго не наважувався надрукувати свою книгу й думав, чи не краще буде наслідувати приклад



піфагорійців та інших, які передавали своє вчення лише друзям, поширюючи його тільки через усну традицію».

Головним внеском Коперника в науку стало утвердження геліоцентричної системи світу, у якій у центрі Всесвіту перебуває не Земля, а Сонце. Ця модель радикально відрізнялася від прийнятої в ту епоху геоцентричної системи Птолемея, де Земля вважалася нерухомим центром усіх небесних рухів.

Хоча геліоцентрична ідея була відома ще з античності (наприклад, у Аристарха Самоського), саме Коперник уперше математично розробив її як повноцінну астрономічну систему.



Книга «Про обертання небесних сфер» побудована строго за зразком давньогрецької науки: Коперник починає з аксіом і визначень, як це робив Евклід, і поступово розвиває систему, спираючись на геометрію й тригонометрію. Його твір — складний математичний трактат, який вимагає від читача доброї підготовки. Центральне завдання книги — дати кількісні методи обчислення положень планет, виходячи з нової моделі.

Коперник використовує математичні прийоми, розроблені ще в античності — насамперед системи епіциклів і ексцентрів, але тепер вони служать не геоцентричній, а геліоцентричній схемі. Таким чином, він зберігає геометричну структуру старої моделі, але змінює її фізико-космологічний зміст.

З математичного погляду геліоцентрична система Коперника не відразу виявилася простішою, ніж птолемеєва: вона теж спиралася на складну комбінацію кіл. Однак важливе досягнення Коперника полягало в тому, що він досяг більш простої логіки руху небесних тіл: ретроградні рухи планет (їхній «зворотний хід» на небі) пояснювалися природним чином як наслідок руху Землі та інших планет навколо Сонця.



Коперник також зробив внесок у розвиток тригонометрії. Він склав обширні таблиці синусів з високою точністю та чітко відокремив сферичну тригонометрію від плоскої. Його робота включала застосування тригонометричних формул до сферичної геометрії та розрахунку координат небесних тіл.



Крім того, у *De revolutionibus* він наводить докладні математичні описи орбіт і засоби передбачення положень планет, використовуючи системи координат і методи, які згодом будуть удосконалені в рамках небесної механіки.

Коперник також довів теорему, що нині носить його ім'я: точка кола, яке котиться всередині іншого кола з удвічі більшим радіусом, описує діаметр більшого кола.

Альбрехт Дюрер



Альбрехт Дюрер (1471–1528) — один із найвидатніших художників доби німецького Відродження, гравер, живописець і теоретик мистецтва. Народився у Нюрнберзі в родині ювеліра й з ранніх років здобув професійну художню освіту. Його творчість поєднує північноєвропейську традицію уважного, майже ремісничого зображення деталей із впливом італійського Ренесансу — інтересом до перспективи, анатомії, пропорцій і античної спадщини.

Дюрер прославився як майстер гравюри, особливо у техніках ксилографії²¹ та офорту²², й справив великий вплив на розвиток книжкової ілюстрації та тиражного мистецтва в Європі. Його знамениті твори —

«Апокаліпсис», «Меланхолія I», «Лицар, смерть і диявол» — стали не лише художніми шедеврами, а й філософськими роздумами на теми науки, моралі та внутрішнього світу людини.

Варто також зазначити внесок Дюрера в розвиток шрифтів. Він брав участь у стандартизації латинського алфавіту й розробляв зразкові шрифти, прагнучи поєднати естетику античності з точністю геометричного побудови. Це було частиною його широкої програми гармонізації мистецтва і науки.



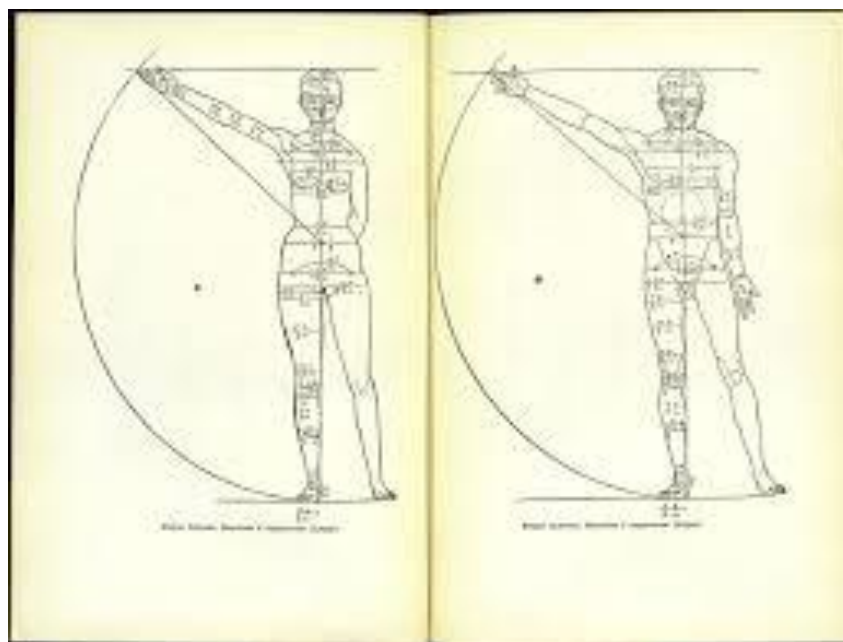
Альбрехт Дюрер був не лише художником, а й одним із перших теоретиків мистецтва в Європі, хто систематично пов'язав живопис із математикою. Його наукові інтереси охоплювали геометрію, перспективу, теорію пропорцій і фортифікацію. Він був переконаний, що краса в мистецтві ґрунтується на математичній гармонії, і прагнув розкрити універсальні закони форми та симетрії.



Дюрер був одним із перших художників Північної Європи, хто вивчав і практикував закони лінійної перспективи. У своїх трактатах він запропонував оригінальні методи побудови перспективних зображень за допомогою геометричних інструментів. Зокрема, він створив пристрій для перспективного креслення — своєрідну камеру-обскуру, що дозволяла художнику точно передавати просторові співвідношення. Ці ідеї він детально виклав у трактаті «Вчення про міру за допомогою циркуля та лінійки» (Underweysung der Messung, 1525).

²¹ Ксилографія — техніка гравюри на дереві, коли зображення вирізають на поверхні дерев'яної дошки, покривають фарбою й відтискають на папері; один із найдавніших способів друку з рельєфної форми.

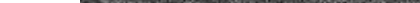
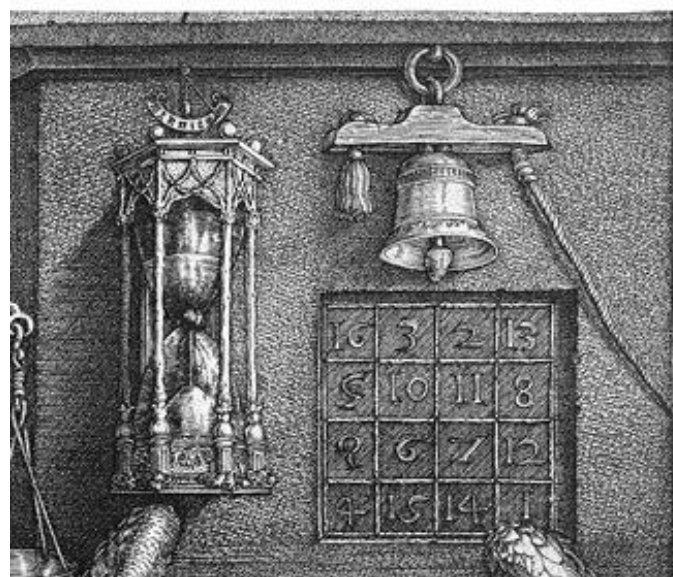
²² Офорт — техніка гравюри на металі, зазвичай на мідній або цинковій пластині, де зображення створюють за допомогою травлення кислотою; належить до глибокого друку.



Найзрілішою й найфундаментальнішою працею Дюрера стало «Чотирикнижжя про пропорції» (Vier Bücher von menschlicher Proportion, 1528), опубліковане вже після його смерті. У цьому творі він систематизував дослідження людської анатомії та створив систему пропорцій для зображення людського тіла, засновану на вимірюваннях і математичних принципах. Хоча він спирався на античну традицію (зокрема, на Вітрувія), його підхід вирізнявся прагненням до кількісної точності: він описував форми тіла за допомогою координат, таблиць і геометричних побудов.

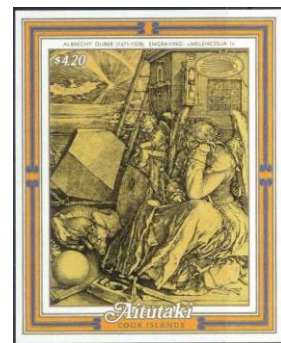


Одним із найяскравіших свідчень синтезу мистецтва і математики у творчості Дюрера стала його знаменита гравюра «Меланхолія I» (1514). Це не просто зразок високого мистецтва, а складна алегорія інтелектуальної праці, насичена математичними

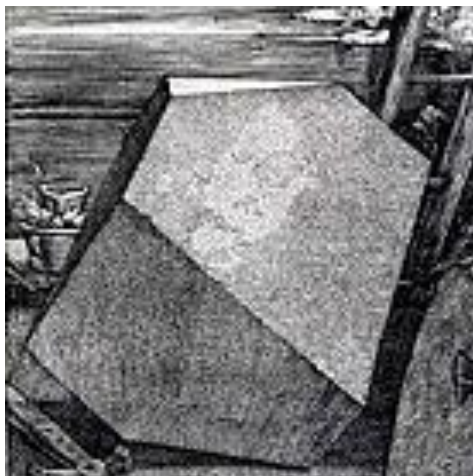


У правому верхньому куті гравюри зображено магічний квадрат — таблицю, у яку вписані числа від 1 до 16 так, що суми чисел у кожному рядку, стовпці й по двох діагоналях дорівнюють одному й тому самому числу — 34.

Цей квадрат не лише математично коректний, а й містить витончені деталі. Наприклад, центральні чотири числа (10, 11, 6, 7) також у сумі дають 34; чотири кутові (16, 13, 4, 1) — теж 34. Ба більше, навіть по чотирьох діагональних квадратах 2×2 можна знайти ті ж самі суми. А числа в нижньому рядку — 4, 15, 14, 1 — утворюють не лише магічну суму, але й дату: 1514, рік створення гравюри.



Це один із перших випадків появи магічного квадрата в європейському мистецтві в такому виразному контексті — і з такою увагою до математичної точності та символізму. До цього подібні квадрати досліджувалися в арабській та індійській традиціях, але саме Дюрер уперше вводить їх у сферу образотворчого мистецтва.



У центрі композиції — великий камінь, що має форму складного многогранника. Його точна геометрична природа досі викликає суперечки. Найчастіше його тлумачать як усічений кубооктаедр — поліедр, отриманий відсіканням кутів у куба. Він не лише демонструє знання геометрії, але, ймовірно, символізує тяжкість і непорушність роздуму, контрастуючи з крилатою фігурою.

Цей об'єкт став предметом аналізу як з боку істориків мистецтва, так і геометрів. Дослідники знаходили в ньому алюзії на твори П'єро делла Франчески та італійську школу перспективи. В

зображенні каменя відчувається прагнення передати форму не лише художньо, а й з точністю інженерного креслення.

Таким чином, «Меланхолія I» — це не просто гравюра, а насичене висловлювання про роль математики у пізнанні й творчості. У ній Дюрер уперше в північноєвропейській традиції заговорив мовою геометрії та чисел про внутрішній світ мислителя. Внесок художника в розвиток наукової графіки полягає не лише в технічній точності зображень, а й у здатності зробити математику предметом естетичного та філософського осмислення.

Герард Меркатор

Герард Меркатор (1512–1594), народжений у Рупельмонде (сучасна Бельгія), був видатним фламандським картографом, географом і математиком пізнього європейського Середньовіччя та початку Нового часу. Його життя припало на епоху переходу від схоластичної науки до ренесансного раціоналізму й емпіризму — у добу стрімких географічних відкриттів, реформи освіти та зростання інтересу до практичного застосування математичних знань.



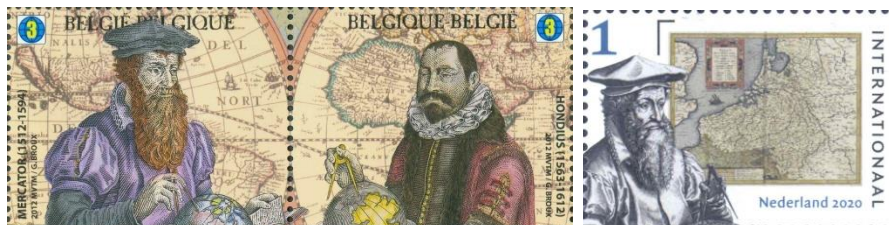
Меркатор здобув освіту в Левенському університеті, де вивчав філософію, математику й географію, а також опанував майстерність виготовлення наукових інструментів і гравюри. Його глибокий інтерес до геометрії та астрономії швидко привів його до практичної картографії — науки, що в той час переживала стрімкий розвиток завдяки прагненню точно описати дедалі ширший відомий світ.

Меркатор справив вирішальний вплив на розвиток картографії, надавши їй строгу геометричну основу. Його головний внесок пов'язаний зі створенням меркаторської проекції — математично обґрунтованого способу зображення поверхні Землі на площині, який став наріжним каменем морської навігації на багато століть уперед.

Карта світу, опублікована Меркатором 1569 року під назвою *Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usam Navigantium Emendata* («Нова й удосконалена карта світу, виправлена для користі мореплавців»), стала революційною завдяки особливостям проекції, що зберігає кути, а отже, дозволяє зображати морські курси (лінії постійного компасного напрямку) як прямі лінії.



З математичного погляду меркаторська проекція — це така, у якій меридіани й паралелі зображаються як взаємно перпендикулярні лінії, а відстані між паралелями збільшуються в міру віддалення від екватора. Це забезпечує збереження кутів, але спричиняє спотворення площ (наприклад, Гренландія виглядає значно більшою за Африку).



Хоча сам Меркатор не залишив аналітичного опису формули своєї проекції, вона ґрунтувалася на практичному застосуванні логарифмічної залежності між широтою та вертикальною координатою карти. Згодом цю залежність математично вивів англійський математик Едвард Райт (1599), уточнивши математичну природу проекції, яка відтоді носить ім'я Меркатора.



Меркатор також створював небесні та земні глобуси, у яких прагнув поєднати спостереження з точною геометрією. Його глобуси користувалися великою популярністю при дворах Європи, а їхня точність і краса зробили їх не лише навчальними посібниками, а й витворами мистецтва. Створення глобусів вимагало ретельних розрахунків координат, побудови сітки та майстерної гравірування.



Карта Європи з Атласу Меркатора

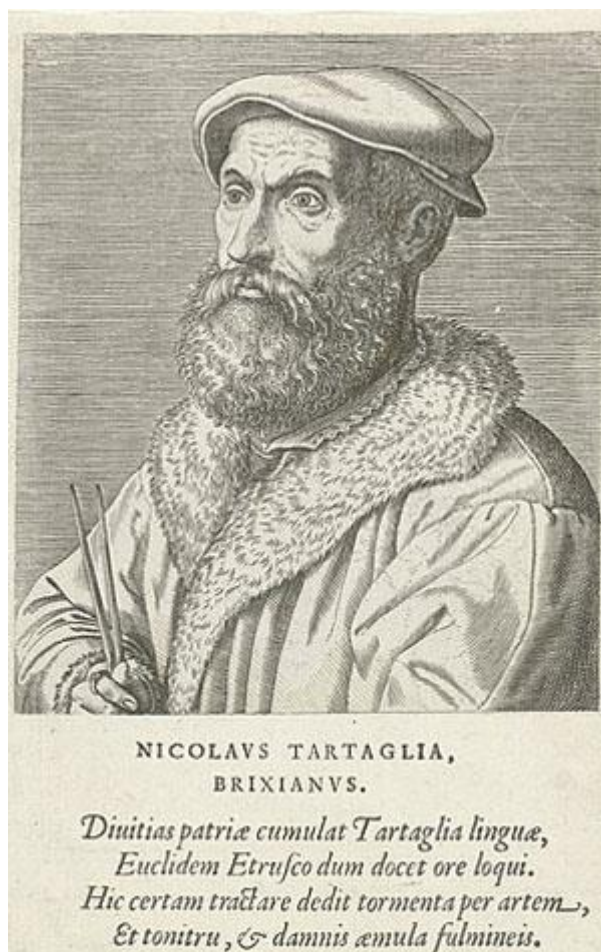
Розв'язання рівнянь третього й четвертого степенів

У Середньовіччі європейська математика значною мірою обмежувалася арифметикою та елементарною геометрією. Але починаючи з XIII століття, особливо після перекладів арабських праць (зокрема аль-Хорезмі), європейці ознайомилися з більш розвиненими підходами до розв'язання рівнянь. В епоху Відродження, особливо в Італії XV–XVI століть, починається справжній злет у розвитку алгебри. На цьому тлі розгортається драматична, але водночас яскрава історія відкриття способів розв'язання кубічних рівнянь і рівнянь четвертого степеня.

До цього часу математики вміли розв'язувати лише лінійні та квадратні рівняння. Третій степінь (рівняння виду $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$) залишався невідкритим. Прорив стався на початку XVI століття — у результаті напруженого суперництва між італійськими математиками.

Першим, хто знайшов метод розв'язання зведеного кубічного рівняння виду $x^3 + px = q$, був Сципіон дель Ферро (1465–1526), професор у Болоньї. Він не опублікував свого відкриття, але повідомив про нього учневі Антоніо Фіору. Цей розв'язок був для випадку, коли рівняння не містить ні вільного члена, ні квадрата змінної.

У 1535 році Фіор, упевнений у своїй перевазі, викликав на публічний математичний диспут Нікколо Тарталью (справжнє ім'я — Нікколо Фонтано, бл. 1500–1557), скромного вчителя математики з Брешиї. У ті часи математичні диспути були формою інтелектуального змагання, а також способом здобути посаду й визнання. Учасники обмінювалися задачами, які мали розв'язати протягом визначеного часу.



Фіор дав Тарталі 30 задач, побудованих на рівнянні $x^3 + px = q$, не знаючи, що Тарталья — друга людина в історії, яка знайшла загальний розв’язок такого рівняння, але незалежно й, імовірно, самостійно. Тарталья розв’язав усі задачі й здобув переконливу перемогу.



І тут у гру вступає третій герой — Джероламо Кардано (1501–1576), лікар, астролог, філософ і математик²³. Він був зачарований чутками про талант Тарталі й переконав його розкрити метод, узявши з нього клятву не публікувати розв’язання.

²³ Джероламо Кардано — одна з найяскравіших і найсуперечливіших постатей європейського Відродження. Він прославився як учений-енциклопедист: математик, лікар, астролог, філософ і винахідник. Кардано народився в Павії, у родині юриста й математика Фаціо Кардано, знайомого з Леонардо да Вінчі. З раннього віку Джероламо виявляв інтерес до наук і мистецтва. Попри складне дитинство й те, що його не визнавали законним сином, він вступив до Падуанського університету, де здобув освіту з медицини. Лікарська практика тривалий час була його основним джерелом прибутку й слави: Кардано вважався одним із найкращих лікарів свого часу, а серед його пацієнтів були знатні особи й навіть архієпископи. Життя Кардано було драматичним і сповненим нещасть. Один його син був страчений за вбивство власної дружини, інший став злодієм і шахраєм. Сам Кардано не раз потрапляв у немилість: у старості його заарештували за складання гороскопа Ісуса Христа — це сприйняли як святотатство. Лише за умови мовчання та відмови від наукової діяльності він отримав право на пенсію й спокій. Кардано помер у Римі 1576 року. За однією з легенд, не підтвердженою історичними документами, він нібито передбачив точну дату своєї смерті за гороскопом — і, щоб передбачення збулося, покінчив життя самогубством.

Однак згодом Кардано дізнався, що дель Ферро відкрив цей метод раніше, і, вважаючи себе вільним від обіцянки, опублікував розв'язок у своїй книзі *Ars Magna* («Велике мистецтво», 1545) — першій систематичній праці з алгебри нового часу. Там він згадав ім'я Тарталї, проте той був обурений порушенням домовленості й вів запеклу полеміку з Кардано до кінця життя.

Розв'язок рівняння виду $x^3 + px = q$ знаходиться за формулою, яка в сучасних позначеннях записується як:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Ця формула виглядає громіздкою, але для часу Кардано вона була справжньою сенсацією. Вперше стало можливим обчислювати розв'язки кубічних рівнянь у загальному вигляді.

Проте тут виникає тонкість: у деяких випадках підкореневий вираз виявляється від'ємним, і з'являються комплексні (у тодішніх термінах — «уявні») числа. Хоча самі корені рівняння можуть бути дійсними, обчислення потребують переходу до комплексних величин. Цей парадокс (відомий як *casus irreducibilis*) Кардано визнав, але не зрозумів до кінця. Таким чином, ідея комплексних чисел уперше виникла як математична необхідність при розв'язанні цілком реальних задач.

Після успіху з кубічними рівняннями математики взялися за наступний рівень — рівняння четвертого степеня ($x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$).

Тут вирішальну роль відіграв Лодовіко Феррарі (1522–1565), учень і помічник Кардано. Він знайшов метод зведення рівняння четвертого степеня до кубічного, і його розв'язок також було опубліковано в *Ars Magna*.

Метод Феррарі ґрунтується на виділенні повного квадрата в початковому рівнянні та зведенні його до кубічного рівняння щодо допоміжної змінної. Після цього корені початкового рівняння знаходять через квадратні корені та алгебраїчні вирази.

Приблизно в той самий час і незалежно від Феррарі над цією задачею працював Рафаель Бомбеллі, якого сьогодні також пам'ятають як одного з перших, хто прийняв і активно використовував мнимі числа. Він розробив правила дій із ними й застосував їх при аналізі рівнянь третього та четвертого порядку.

Рафаель Бомбеллі

Рафаель Бомбеллі (бл. 1526 — бл. 1572) народився у Флоренції й за фахом був інженером-гідротехніком. Він брав участь у роботах із регулювання течії річки Тибр, і його інженерні знання виявилися тісно пов'язаними з математичними інтересами. Як і багато його сучасників, він не був ученим у сучасному розумінні цього слова, а радше універсальним гуманістом із нахилом до математики.

Головною працею Бомбеллі стала книга *L'Algebra* («Алгебра»), перший том якої було опубліковано 1572 року. Другий і третій томи тривалий час залишалися в рукописі й

були видані лише в ХІХ столітті. Ця книга є систематичним і зрозумілим зведенням алгебраїчних знань ХVІ століття, написаним простою мовою, що робило її доступною навіть для читачів без спеціальної підготовки.

В «Алгебрі» Бомбеллі вперше в Європі послідовно й свідомо працює з від'ємними числами, вводючи чіткі правила дій зі знаками під час множення. Приклад із книги:

«Плюс на плюс дає плюс,

Мінус на мінус дає плюс,

Плюс на мінус дає мінус,

Мінус на плюс дає мінус...»

Особливо важливо, що Бомбеллі першим почав послідовно використовувати уявні числа (тепер — комплексні) для обчислень. У його викладі вони з'являються під час розв'язання кубічних рівнянь у так званому непривідному випадку (*casus irreducibilis*), коли формули Кардано призводять до потреби знаходити корінь із від'ємного числа.

На відміну від своїх попередників, зокрема Кардано, який уважав уявні числа «тонкістю без користі», Бомбеллі детально описав їхні властивості й розробив правила арифметики з такими величинами.

Бомбеллі зробив значний внесок у розвиток математичної символіки. Зокрема, він уперше використав дужки, що мали форму дзеркально оберненої та прямої літери L — прообраз сучасних квадратних дужок.

$\Re$ L 7 p. $\Re$ 14 J

Поява квадратних дужок у Бомбеллі. Записано число $\sqrt{7 + \sqrt{14}}$.

Бомбеллі також підійшов до поняття ланцюгових дробів, хоча сам термін тоді ще не вживався. Він запропонував метод наближеного обчислення квадратного кореня з натуральних чисел, заснований на ітераційному процесі, подібному до пізнішого алгоритму Антоніо Котальді (1613 р.). Цей метод можна вважати попередником сучасного розкладу в ланцюгові дроби.

У дусі математичних зацікавлень доби Відродження Бомбеллі звертався і до класичних грецьких задач — подвоєння куба та трисекції кута. Він показав, що обидві задачі можна звести до розв'язання кубічних рівнянь, тобто виразити в термінах алгебри. Це стало важливим кроком у переході від суто геометричних методів античності до алгебраїзації математики.

Рафаель Бомбеллі став останнім і, мабуть, найглибшим представником італійської школи алгебраїстів ХVІ століття. Його внесок у розвиток поняття уявних чисел сучасники недооцінили, проте він справив великий вплив на подальший розвиток алгебри. Саме завдяки таким спробам — спочатку несміливим, а потім дедалі впевненішим — математика зробила наступний крок: до комплексних чисел, які посіли одне з центральних місць у сучасній науці.

Уявні величини

У XVI столітті європейська алгебра переживала бурхливий розвиток. Математики дедалі сміливіше працювали з рівняннями третього степеня й навіть намагалися розв'язувати складніші задачі. Саме в цей період ми вперше стикаємося з тим, що пізніше назвуть уявними числами — дивними об'єктами, існування яких тоді викликало здивування, а часом і насмішки.

Джероламо Кардано (1501–1576), один із яскравих представників італійського Відродження, описав ці «неможливі» числа у своєму знаменитому трактаті *Ars Magna* («Велике мистецтво», 1545 р.). Він зустрівся з ними, коли намагався розв'язати задачу: поділити число 10 на дві такі частини, щоб їхній добуток дорівнював, наприклад, 40.

Легко помітити, що добуток двох дійсних чисел, сума яких дорівнює 10, не може перевищувати 25 — максимальне значення досягається, коли обидві частини рівні 5. Отже, задача Кардано не має дійсного розв'язку. Проте він запропонував формальний розв'язок, використавши вирази, які сьогодні ми б записали як $5 \pm \sqrt{-15}$. Сам Кардано називав такі числа «софістичними», «чисто від'ємними» й визнавав, що вони не мають сенсу в звичайній арифметиці. Він використовував їх радше як інструмент для міркувань, не надаючи цим виразам самостійної цінності.

Переломним моментом стала праця Рафаеля Бомбеллі *L'Algebra* (1572 р.). Бомбеллі від самого початку усвідомлював дивність уявних чисел. Він писав, що вони здаються «радше софістичними, ніж справжніми», і довго так вважав — доки не знайшов переконливий доказ, заснований на алгебраїчних побудовах.

Бомбеллі дав цим новим величинам власні назви: $\sqrt{-1}$ він називав «плюс мінуса» (*più di meno*), а $-\sqrt{-1}$ — «мінус мінуса» (*meno di meno*). Хоч ці терміни звучать непривично, вони позначали саме те, що сьогодні записують як i і $-i$ — квадратний корінь із мінус одиниці та протилежне йому число. Такі позначення були необхідні для операцій із цими величинами в алгебраїчних виразах.



Бомбеллі не лише ввів позначення, а й описав правила роботи з уявними числами. Таким чином, він фактично заклав перші основи теорії комплексних чисел, хоча сам термін «комплексне число» з'явився пізніше.

Особливу увагу Бомбеллі приділив так званому *casus irreducibilis* при розв'язанні кубічних рівнянь — це ситуація, коли рівняння має дійсний корінь, але формула Тарталї для його обчислення вимагає оперувати з уявними величинами. Він показав, що навіть якщо проміжні обчислення включають вирази на кшталт $\sqrt{-121}$, кінцевий результат може бути цілком дійсним числом. Наприклад, у рівнянні $x^3 = 15x + 4$ розв'язок за формулою Кардано записується як

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Хоч під коренем стоять уявні числа, саме значення x дорівнює 4 — цілком звичайному числу.

Бомбеллі продемонстрував, як спряженість уявних виразів допомагає позбутися уявності в кінцевому результаті. Це стало важливим кроком до визнання комплексних чисел не просто «грою символів», а корисним інструментом у математиці.

Франсуа Вієт

Франсуа Вієт (латинізоване ім'я — Franciscus Vieta, 1540–1603) — французький юрист, радник при дворі Генріха IV та один із найвпливовіших математиків європейського Відродження. Його діяльність започаткувала символічну алгебру у тому вигляді, в якому вона застосовується й сьогодні. Він став зв'язковим елементом між риторичною



алгеброю Середньовіччя та аналітичним методом Нового часу.

Вієт народився в місті Фонтене-ле-Конт. Отримавши юридичну освіту, він зробив кар'єру як адвокат та радник у парламенті Бретані, а пізніше — як придворний криптограф. Вієт прославився не лише математикою, а й тим, що розшифрував секретну переписку іспанського двору, чим допоміг французькому королю у політичній боротьбі.

Математика для Вієта не була професією, а пристрастю й інтелектуальним служінням. Він сприймав її як універсальну мову природи, здатну розкрити гармонію світу. Його праці вписалися в культуру Відродження, коли античні ідеали поєдналися з новими науковими прагненнями.

Головне досягнення Вієта — створення символічної алгебри. На відміну від попередніх підходів, де невідомі та коефіцієнти описувалися словами, він ввів буквені позначення і для невідомих, і для даних величин. Це був радикальний крок: до нього, якщо використовувалися букви (як у Бомбеллі), то лише для змінних, а сталі величини позначалися словами або числами.

Вієт писав: «Щоб розв'язати задачу, достатньо скласти рівняння».

Він використовував латинські букви: приголосні (наприклад, B , C , D) для відомих величин, голосні (A , E , I , O , U) — для невідомих. Це була перша строга і систематична мова алгебри, що дозволяла узагальнено оперувати виразами.

Він також ввів позначення степенів змінних, хоча ще не у вигляді сучасних індексів, і активно використовував однорідні рівняння, де всі члени виражалися в однакових степенях однієї величини — такою була данина геометричній традиції.

Головним математичним твором Вієта стало зібрання *In artem analyticem isagoge* («Вступ до мистецтва аналізу», 1591), у якому він формулює принципи аналітичного методу — методу складання й розв'язання рівнянь як основи розв'язання задач.

Для Вієта «аналіз» означав рух від умови задачі до рівняння, а «синтез» — зворотний шлях, від розв'язку до перевірки. Таким чином він заклав фундамент алгебраїчного аналізу — попередника аналітичної геометрії та математичного аналізу.

Франсуа Вієт вивчав рівняння другої, третьої та четвертої степенів, узагальнюючи методи своїх попередників — Кардано, Тартальї та Бомбеллі. Він сформулював відношення між коренями і коефіцієнтами многочлена, відомі як формули Вієта. Зокрема, для коренів x_1 та x_2 квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ виконуються співвідношення $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Це був важливий крок до розуміння алгебраїчної структури рівнянь і згодом до побудови теорії симетрії та групи перестановок.

Вієт бачив у математиці мову, за допомогою якої можна виразити не лише числові, а й геометричні та фізичні закони. Він намагався побудувати теорію руху планет на основі точної математики і заявляв, що «божественний порядок Всесвіту може бути записаний через алгебру».

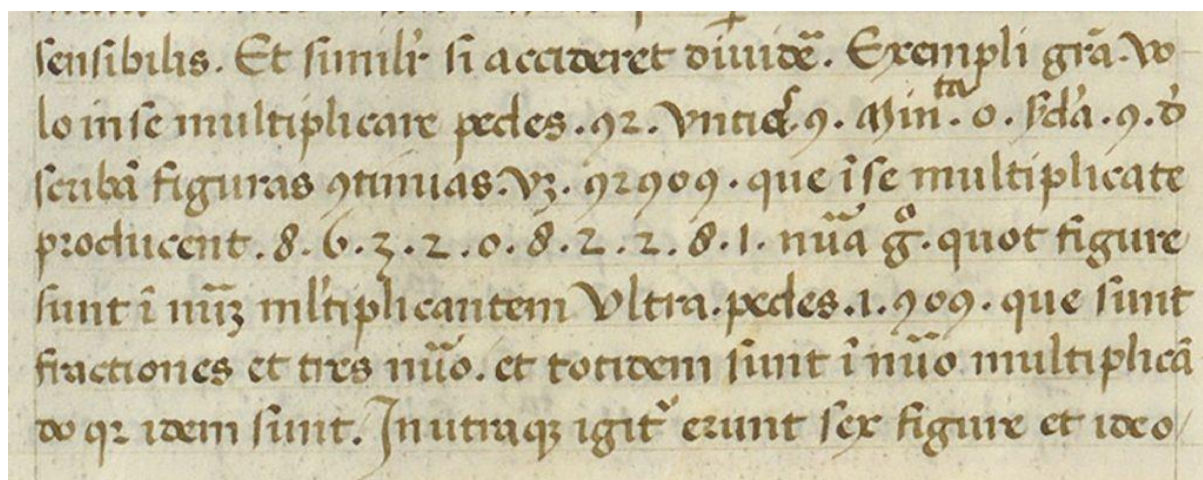
Цей підхід вплинув на Галілея та Декарта, а пізніше — на Ньютона. Вієт був одним із тих, хто заклав основу для переходу від математики як мистецтва розв'язання задач до математики як науки про структури та відношення.

Сімон Стевін і десяткові дроби

Однією із найважливіших змін європейської математики епохи Відродження стало впровадження та широке поширення десяткових дробів — зручної й універсальної форми запису чисел, яка сьогодні сприймається як щось само собою зрозуміле. Центральну роль у цьому процесі відіграв Сімон Стевін (Simon Stevin, бл. 1548–1620) — фламандський інженер, математик і реформатор наукової мови.

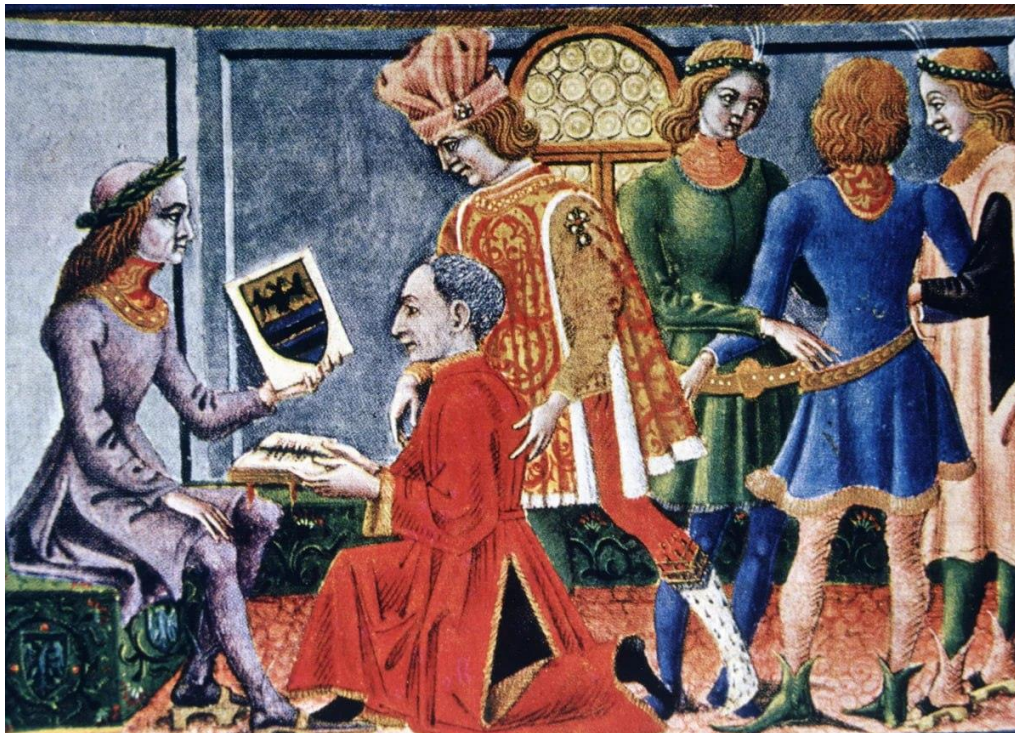


Застосування десяткових дробів задовго до Стевіна зустрічається в практичній астрономії та комерційних розрахунках. Перше відоме їх використання у записі, близькій до сучасної, датується 1440-ми роками: венеційський купець, астроном і математик Джованні Б'янкіні ввів десяткову крапку у своїх *Tabulae Astrologiae*, презентованих імператору Фрідріху III. Це був поодинокий випадок, який майже залишився непоміченим.



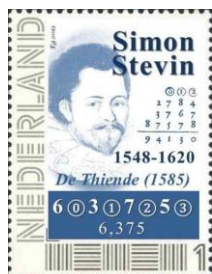
Приклад використання десяткової крапки в книзі Б'янкіні *Compositio instrumenti*

На протязі XV–XVI століть дробові числа записували по-різному: через звичайні дробі, за допомогою одиниць, четвертей і шістнадцятих (у дусі античної та арабської традиції) або через «ламани» записи з пояснювальним текстом. Загальної системи не існувало. Десяткові дробі використовувалися в Індії та арабському світі, але в Європі довгий час залишалися екзотикою.



Імператор Фрідріх III, який отримує від Дж. Б'янкіні книгу «Tabulae Astrologiae», Феррарська школа живопису, приблизно XVI століття

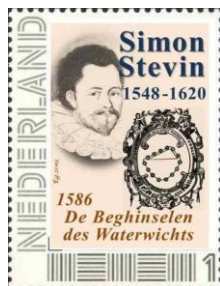
У 1585 році Стевін опублікував у Лейдені книгу *De Thiende* («Про десяткову»), яка стала поворотною точкою. У ній він пристрасно доводив, що десяткова система числення застосовна не лише в торгівлі, а й у геометрії, астрономії, навігації, вимірюванні земель і навіть у державному управлінні. Це був не просто підручник — це був маніфест нової числової культури. Стевін писав: «Є ті, хто вважає десятковий дріб штучним або неприродним. Але якби Бог створив десяткову, а не дванадцяткову систему мір, усі розрахунки були б простішими. Отже, і людині варто її обрати».



Він запровадив спосіб запису дробів, де кожна цифра супроводжувалася маленькою цифрою в кружку, що вказувала розряд (сучасний еквівалент знаків після коми). Наприклад, число 7,348 у Стевіна записувалося приблизно як 7(0) 3(1) 4(2) 8(3) — тобто 7 цілих, 3 десяти, 4 соті та 8 тисячних.

Хоча цей запис незабаром замінили більш зручним (десятковою комою або крапкою), ідея виявилася надзвичайно життєздатною: Стевін вперше запропонував систематичну, універсальну та раціональну форму запису дробів, придатну для повсякденних і наукових розрахунків.

Після публікації *De Thiende* десяткові дроби стали активно використовуватися в Нідерландах, а потім проникли у Францію та Англію. Уже на початку XVII століття вони були сприйняті астрономами та інженерами.



Суттєвий внесок у закріплення десяткової системи внесли також Джон Непер, винахідник логарифмів, який використовував десяткові дроби у своїх таблицях; Генрі Бріггс, що поширив десяткову кому (а пізніше — крапку) в Англії; та Крістоф Клавій, німецький математик, який запропонував зручне оформлення дробів у підручниках арифметики.

Але саме Стевін першим сформулював світоглядну програму, де десяткові дробы — не просто зручність, а мова чисел, придатна для всіх сфер знання та діяльності. Завдяки йому математична культура Європи отримала інструмент, без якого немислимі наука, інженерія та економіка Нового часу.

Значення математики епохи Відродження

Математика європейського Відродження відіграла вирішальну роль у переході від середньовічного мислення, пов'язаного з авторитетами та обмеженого рамками схоластичної традиції, до нової наукової культури Нового часу, орієнтованої на спостереження, експеримент і обчислення. Саме в цей час закладаються основи сучасного математичного методу: символічний запис, систематизація операцій, розвиток числових понять і посилення зв'язку між математикою, природою та технікою.

Одним із головних досягнень стало розвиток алгебраїчної мови. У працях математиків на кшталт Франсуа Вієта, Джордано Кардано, Рафаеля Бомбеллі та Міхаеля Штіфеля ми бачимо перехід від риторичної алгебри до символічної, де невідомі, степені та операції позначаються буквами та знаками. Це дозволило виразити загальні, абстрактні правила і звільнити математику від громіздкості словесних описів. Символ став інструментом узагальнення, а формула — новою формою вираження істини.

У цю епоху математика виходить за межі лише цілих і додатних чисел. Від'ємні, ірраціональні, уявні, дробові та трансцендентні числа починають входити в обіг математиків, спершу як формальні об'єкти, а потім як повноцінні учасники обчислень. Це формує більш гнучке і потужне уявлення про числовий континуум — найважливішу передумову майбутнього математичного аналізу.

Математика Відродження тісно пов'язана з практикою: інженерією, торгівлею, астрономією, картографією та архітектурою. Розв'язання кубічних рівнянь, поширення десяткових дробів та прогрес у теорії пропорцій — усе це не лише теоретичні досягнення, а й відповідь на виклики часу. Математика починає відігравати ключову роль у розвитку науки та техніки, від навігації до фортифікації, від механіки до оптики.

На рубежі XVI–XVII століть математика перестає бути виключно «служницею наук» або набором прийомів для практиків. Вона набуває власного статусу — науки, що володіє внутрішньою логікою, красою та методологією. Це видно і в прагненні до строгого обґрунтування, і в зародковій рефлексії про природу математичних об'єктів. Праці Кеплера, Галілея та Декарта показують, як математика стає мовою самої природи.

Нарешті, математика Відродження — не лише технічний інструмент, а й частина ширшої інтелектуальної та художньої культури. У час, коли людина знов усвідомлює себе мірою всіх речей, математика стає вираженням раціонального порядку, пропорції, гармонії. Вона знаходить відображення в архітектурі, живописі, музиці, філософії — від Леонардо да Вінчі до Миколи Кузанського²⁴.

Епоха Відродження підготувала фундамент для наукової революції XVII століття. Без математичних відкриттів цього часу не було б ані відкриття законів руху Ньютона, ані розвитку аналітичної геометрії, ані становлення математичного аналізу.

Таким чином, математика Відродження — це не просто проміжна стадія між античністю та Новим часом. Це вирішальний поворот, у якому народжується сучасна математика — як мова, як інструмент і як форма мислення.

²⁴ Микола Кузанський (Nicolaus Cusanus, 1401–1464) — німецький філософ, теолог, математик і астроном, один із провідних гуманістів епохи Відродження. Його праці поєднували математичні концепції з філософськими роздумами про нескінченність, порядок і гармонію у Всесвіті.

Математика XVII століття



Лоран де ла Гір, Алгоритм геометрії, 1649 р.²⁵

XVII століття — один із найяскравіших періодів в історії математики й, можливо, найнасиченіший із погляду фундаментальних відкриттів і формування нових наукових дисциплін. Це була епоха математичного вибуху — стрімкого, майже лавиноподібного зростання математичних ідей, методів і сфер застосування. На відміну від Середньовіччя, коли математика, хоч і розвивалася, залишалася переважно галуззю окремих задач і теорем, XVII століття стало часом народження цілих розділів науки, які змінили уявлення про саму математику.

У цей період уперше в історії абстрактна математика починає випереджати реальну практику, передбачаючи нові явища природи. Якщо в античності конічні перерізи були предметом суто теоретичних міркувань, то тепер, у XVII столітті, Кеплер показує: планети рухаються еліпсами. Галілей встановлює: гармата стріляє по параболі. Те, що ще недавно здавалося грою розуму, виявляється точним описом фізичної реальності. Це була справжня революція в мисленні: математика довела свою силу як універсальна мова природи.

Математика проникає не лише в науку, а й у всю культуру XVII століття. Філософія, поезія, театр, живопис — усе це виявляється пройнятим математичним духом. Історики називають це математикоцентричністю культури. В жодну іншу епоху, навіть у Золотий вік грецької науки, математика не займала настільки центрального місця в інтелектуальному житті Європи. Достатньо згадати, що найвидатніші філософи століття — Декарт, Паскаль, Лейбніц — водночас були великими математиками. Навіть Спіноза,

²⁵ Замовлене для паризької резиденції радника Людовіка XIV, це полотно спочатку належало до серії з семи творів, кожен з яких уособлював одне із семи вільних мистецтв: арифметику, астрономію, діалектику, геометрію, граматику, музику та риторику. Ці дисципліни становили основу класичної освіти. На цій картині Геометрія тримає циркуль, прямий кут і аркуш із «Начал» Евкліда. Піраміди та сфінкс натякають на походження геометрії з Єгипту, а глобус указує на її роль у картографії. Картина на мольберті ілюструє підхід до перспективи, запропонований одним із колег де ла Гіра у Французькій королівській академії.

не будучи математиком у строгому сенсі, написав свій філософський трактат «Етика» за зразком «Начал» Евкліда — з означеннями, аксіомами, теоремами й доведеннями.

Перелік математичних дисциплін, народжених у XVII столітті, сьогодні становить ядро університетського курсу: математичний аналіз, аналітична геометрія, теорія ймовірностей, теорія чисел, математична логіка. З'являються й галузі, що лежать на межі математики й фізики: теоретична механіка, варіаційне числення. Усе це — не просто окремі відкриття, а принципово нові уявлення про структуру математичної науки.

Але таке бурхливе зростання було б неможливим без нового способу організації наукового життя. Однією з ключових постатей у цьому процесі став Марен Мерсенн — французький монах, священник, учений і головний координатор наукового листування XVII століття. Через нього проходили листи між найвидатнішими умами Європи: Галілеєм, Декартом, Паскалем, Гюйгенсом, Ферма. Мерсенн став живим прообразом наукової спільноти й наукової мережі задовго до появи академій і наукових журналів. Його дім у Парижі був справжнім інтелектуальним центром, куди сходилися новини, ідеї, гіпотези й задачі. Завдяки йому математика стала міжнародним проєктом, у якому брали участь найкращі уми Франції, Німеччини, Італії, Нідерландів і Англії.

Особливу роль у цьому процесі відіграло й те, що математика у XVII столітті увійшла в аристократичну моду. У Франції математична грамотність вважалася обов'язковою складовою освіти кожної освіченої людини. У світських салонах обговорювали не лише п'єси Мольєра, а й свіжі математичні відкриття, теореми, задачі, листи Мерсенна. Це був золотий вік, коли чисті гуманітарії вільно міркували про логарифми й конічні перетини.

Отже, XVII століття — це не просто доба великих досягнень. Це час, коли математика стає основою нової наукової й культурної картини світу, її мова проникає у філософію, техніку, повсякденність — і тим самим змінює сам спосіб мислення європейця. Це епоха, з якої починається сучасна математика — і сучасна наука загалом.

Передумови математичного вибуху

XVII століття увійшло в історію як доба надзвичайного піднесення математичної думки — стрімкого, масштабного, фундаментального. Саме в цей час було закладено основи аналізу, сформувалася аналітична геометрія, отримали розвиток алгебраїчні та чисельні методи, а сама математика набула того універсального вигляду, яким ми користуємося й досі. Проте цей, на перший погляд, раптовий «вибух» не був випадковим. Він став результатом процесів, що накопичувалися протягом століть і охопили як саму математику, так і світ, який її оточував — від філософії до техніки, від релігійного світогляду до наукової практики.

На початок XVII століття математика вже мала багату спадщину. В епоху Відродження було заново відкрито й переосмислено античний математичний канон. Класичні праці Евкліда, Архімеда, Паппа, Діофанта активно перекладалися, коментувалися, вивчалися. Проте не менш важливу роль відіграли й власні досягнення європейських математиків пізнього Середньовіччя та Ренесансу. Особливого значення набуло становлення алгебри: починаючи з італійських математиків XV–XVI століть — Дель Ферро, Тартальї, Кардано — алгебра поступово перетворювалася на самостійну, символічно

оформлену науку. Визначним кроком уперед стало запровадження буквеної символіки у працях Франсуа Вієта, де вперше простежується прагнення відокремити форму рівняння від його числового змісту. Алгебра ставала дедалі абстрактнішою, гнучкішою, придатною для вираження загальних закономірностей.

Паралельно розвивалася арифметизація обчислень: Саймон Стевін утверджує десяткові дробі в європейській традиції, а шотландський математик Джон Непер створює логарифми — потужний інструмент для полегшення складних розрахунків. Усе це підготувало народження нової математики — не геометричної й не алгебраїчної у вузькому сенсі, а такої, що прагнула об'єднання, універсальної мови аналізу й руху.

Особливу роль у цьому процесі відіграли природничі науки, які, як ніколи раніше, потребували математичного апарату. Ще в XVI столітті Миколай Коперник запропонував геліоцентричну модель Всесвіту, але це було лише початком. На початку XVII століття Йоганн Кеплер, спираючись на спостереження Тихо Браге, сформулював закони руху планет. Ці закони не були уможливленими — вони були виведені на основі числових експериментів, методом проб і помилок, що вимагали складних обчислень. Це був момент, коли фізика, ще не маючи чіткої теоретичної структури, вперше почала користуватися математикою як робочим інструментом.

Приблизно в той самий час Галілео Галілей здійснює справжню революцію у вивченні руху. Він не просто експериментує з тілами, що падають, чи з похилими площинами — він прагне виразити фізичні закони в числовій, математичній формі. Галілей проголошує, що «книга природи написана мовою математики», і цим формулює програму всієї подальшої європейської науки. Для опису руху, прискорення, змінних величин потрібна була нова математика — і вона невдовзі з'явилася в працях Ньютона та Лейбніца, оформившись у вигляді математичного аналізу.

Важливим чинником розвитку математичної думки стала й бурхливо зростаюча техніка. Навігація, артилерія, будівництво, архітектура, гідравліка — усі ці галузі потребували точних розрахунків, побудови моделей, передбачуваних результатів. Математика переставала бути справою лише вчених кабінетів: вона дедалі більше проникала в повсякденну практику, у військову справу, в інженерну діяльність. Це стимулювало розвиток прикладних напрямів, але водночас підштовхувало до створення досконаліших, загальних методів обчислення, моделювання, прогнозування.

Однак було б помилкою розглядати становлення нової математики лише як відповідь на зовнішні потреби. Велику роль відіграли й філософські та релігійні основи епохи. У культурі християнської Європи був глибоко вкорінений образ Бога як розумного устроювача світу. Всесвіт розумівся як відображення божественного порядку, а отже, досліджувати його — означало пізнавати вищий задум. Математика, зі своєю ясністю, строгістю й універсальністю, сприймалася як один із найчистіших шляхів до істини. Ця установка, спільна як для католиків, так і для протестантів, дала математикам упевненість у тому, що за різноманіттям явищ приховані закономірності — і що ці закономірності виражаються в числах і рівняннях.

Свою роль відіграли й нові форми організації наукової праці. Розширення листування між ученими, поява наукових товариств — таких як Королівське товариство в Англії чи Академія наук у Парижі — створили середовище, у якому ідеї могли швидко

поширюватися, обговорюватися, зазнавати критики й доопрацювань. Особливо важливою постаттю у цьому процесі був Марен Мерсенн — капуцинський монах і посередник між провідними науковцями Європи. Його кореспонденція охоплювала Ферма, Декарта, Паскаля, Галілея та багатьох інших. Завдяки таким зв'язкам формувалася спільнота математиків, які усвідомлювали себе частиною єдиного інтелектуального простору.

Нарешті, не можна не згадати важливий соціальний зсув. У XVII столітті наука й математика починають входити до кола інтересів освічених верств суспільства. З'являється своєрідна «наукова мода»: в аристократичних і буржуазних колах обговорюють нові відкриття, розв'язують головоломки, сперечаються про природу вакууму й нескінченності. Учений уже не просто самотній схоласт — він частина культурної еліти, учасник спільної розмови про природу, людина, чиї знання цінують і поважають.

Таким чином, математичний вибух XVII століття став можливим завдяки глибокій сукупності чинників — внутрішній зрілості самої науки, викликам із боку фізики та техніки, релігійно-філософській вірі в раціональність світу, новій системі наукової комунікації та зростанню суспільного інтересу до знань. Це була епоха, в якій зійшлися багато ліній — і результатом став якісно новий етап в історії людської думки.

Марен Мерсенн

Особливе місце в науковій культурі XVII століття посідає постать Марена Мерсенна (Marin Mersenne, 1588–1648) — французького монаха ордену мінімів, філософа, теолога, математика й музикознавця.



Не будучи видатним ученим у якомусь одному напрямі, Мерсенн став незамінним посередником і організатором наукового спілкування, «поштовою скринькою Європи» — за влучним висловом сучасників. Саме він, по суті, втілював прообраз майбутніх наукових журналів і академій: його листування з сотнями учених із Франції, Італії, Голландії, Англії та інших країн охоплювало надзвичайно широкий спектр тем — від механіки й астрономії до богослов'я та музичної акустики.

У 1635 році він організував неформальні збори вчених — Académie parisienne, до якої входили, серед інших, Декарт, Паскаль, Роберваль, Ферма та інші, — і яка згодом стала безпосереднім попередником заснованої 1666

року з ініціативи Кольбера Паризької академії наук.

Репутація Мерсенна була настільки чистою й бездоганною, що вчені не боялися ділитися з ним найсміливішими ідеями: він суворо дотримувався пріоритетів, сумлінно

пересилав листи, оберігав авторство відкриттів і слугував зв'язковою ланкою між окремими мислителями. Його роль як посередника не була пасивною: він ставив питання, зіставляв погляди, іноді свідомо провокував дискусії — наприклад, між Декартом і Ферма, щоб з'ясувати розбіжності в їхніх підходах. Ця мережа листування, за відсутності наукової періодики, виконувала функції колективного обговорення, оцінки та поширення ідей — і в цьому сенсі Мерсенн був живим прообразом наукового співтовариства Нового часу.

Він був близьким другом і активним захисником Декарта, допомагав йому налагоджувати філософські зв'язки та обороняв від критики з боку духовенства. Водночас сам Мерсенн залишався суворим католицьким богословом і критиком містичних та окультних учень — особливо розенкрейцерів²⁶, астрологів і кабалістів²⁷, таких як Роберт Фладд і Жак Гаффарель. Його трактати — *Quaestiones celeberrimae in Genesim* (1623), *L'Impiété des déistes* (1624), *La Vérité des sciences* (1624) — були апологією розуму й наукового методу проти забобонів, натурфілософії та вільнодумства.

Науковий внесок самого Мерсенна також значний. Його *Harmonie universelle* (1636) вважається одним із перших систематичних трактатів із музичної акустики, завдяки чому його часто називають «батьком акустики». Він сформулював відомі «закони Мерсенна» про коливання струн, експериментував із визначенням частот, намагався створити систему музичного темпераменту й навіть першим дав кількісну оцінку звучання тону в герцах. Він також передбачив деякі ідеї, пов'язані з конструкцією дзеркальних телескопів, зокрема описав систему з увігнутим і опуклим дзеркалами, подібну до пізнішого телескопа Кассегрена.

У галузі математики ім'я Мерсенна пов'язують із так званими простими числами Мерсенна — числами виду $2^n - 1$, де n — натуральне число. Хоча сам він не був глибоким математиком, Мерсенн активно публікував і редагував твори Евкліда, Архімеда, Аполлонія та інших античних авторів, вносячи вагомий внесок у їх поширення в Європі. Його *Cogitata physico-mathematica* (1644) містить описи дослідів із маятниками та падінням тіл — саме він першим виміряв довжину секундного маятника й виявив, що великі коливання відбуваються повільніше, ніж малі, — всупереч уявленню Галілея.

²⁶ Розенкрейцери — містико-філософський рух, що виник у Німеччині на початку XVII століття. Його послідовники, які називали себе «Братством Розового Хреста» (*Fraternitas Rosae Crucis*), поєднували елементи християнського містицизму, алхімії, кабали та герметичної філософії. Розенкрейцери проголошували ідею таємного духовного оновлення людства через знання та внутрішнє просвітлення. Їхні маніфести — *Fama Fraternitatis* (1614), *Confessio Fraternitatis* (1615) і *Chymische Hochzeit des Christian Rosenkreutz* (1616) — справили значний вплив на європейську релігійну та філософську думку XVII століття.

²⁷ Кабалісти — послідовники єврейського містичного вчення кабали (від івр. קַבָּלָה — «переказ», «усне передання»), що сформувалося у Середньовіччі. Кабала прагнула пояснити природу Бога, будову Всесвіту та зв'язок між божественним і людським світом за допомогою символічних інтерпретацій Святого Письма. Вона оперує складною системою понять — таких як сефірот (божественні еманції), — і набула значного впливу не лише в юдейській традиції, а й у християнському містицизмі та ренесансному окультизмі.

Таким чином, Марен Мерсенн — один із найважливіших організаторів науки XVII століття. Його діяльність стала містком між індивідуальними зусиллями вчених і колективною наукою Нового часу, заснованою на обміні, перевірці та публікації знань.

Організація наукової праці

XVII століття стало переломним моментом в історії європейської науки. З одного боку, більшість учених усе ще не були професіоналами в сучасному розумінні — вони не отримували платні за наукову діяльність і не мали офіційного статусу «вченого». З іншого — саме в цей період почала формуватися інфраструктура, без якої неможливо уявити сучасну науку: регулярне листування, публікації, наукові товариства, обговорення результатів, визнання пріоритету.

У Середні віки та ранньому Відродженні наукова діяльність залишалася здебільшого справою окремих осіб: монахів, викладачів університетів, астрологів при дворах. Вони рідко спілкувалися між собою, а якщо й обмінювалися ідеями, то переважно через книги, які виходили з великим запізненням. У XVII столітті ситуація почала змінюватися. Однією з головних причин став ріст кількості освічених людей, зацікавлених у математиці, механіці, оптиці, навігації та інших прикладних науках. Їх об'єднувала жага практичного знання та впевненість у тому, що розум здатен досягнути закони природи.

Проте ще не існувало наукових журналів, наукових ступенів у сучасному вигляді, рецензування чи академічної кар'єри. Учені жили в різних містах, говорили різними мовами й працювали без стабільного фінансування. Їх об'єднувало лише листування — і саме тут велику роль відіграли такі постаті, як Марен Мерсенн у Франції чи Константин Гюйгенс у Голландії, які стали неформальними координаторами наукових зв'язків. Завдяки їхнім зусиллям виникла стійка мережа контактів, у якій обговорювали нові ідеї, перевіряли обчислення, обмінювалися кресленнями й спостереженнями.

Поступово потреба в більш стабільній організації науки вилилася у створення перших наукових товариств. Вони стали місцем, де вчені могли не лише зустрічатися, а й систематично демонструвати свої відкриття, виголошувати доповіді, публікувати праці та обговорювати чужі ідеї.

Одним із перших таких об'єднань стала так звана Невидима колегія (Invisible College) в Англії — неформальна група натуралістів і математиків, яка збиралася в Лондоні з 1640-х років. З неї 1660 року виросте Королівське товариство (Royal Society), офіційно визнане англійською короною і яке стало першою в світі державною академією наук.

У Франції аналогом стала Паризька академія наук, заснована 1666 року за ініціативи Жана-Батиста Кольбера, міністра Людовика XIV. Вона виросла з кола вчених, які збиралися в домі Мерсенна, а згодом — у майстерні Жана Піке²⁸. Академія була

²⁸ Жан Піке (Jean Picard, 1620–1682) — французький астроном, геодезист і член Паризької академії наук. Відомий тим, що першим точно виміряв довжину дуги меридіана між Парижем і Ам'єном, що дозволило обчислити розмір Землі з небаченою на той час точністю. Його роботи з геодезії та астрономії стали важливим кроком у розвитку наукових методів вимірювань і сприяли створенню картографії нового типу.

централізованою й фінансувалася державою: учені отримували платню, мали доступ до обладнання та могли зосередитися винятково на дослідженнях.

Подібні процеси відбувалися й в Італії. Тут наукові академії виникали раніше, але спочатку мали характер приватних гуртків. Так, Академія дель Чіменто (Accademia del Cimento), заснована у Флоренції 1657 року за підтримки герцога Тосканського, орієнтувалася на проведення експериментів і обговорення результатів у дусі Галілея. Попри герцогське заступництво, академія не мала офіційного державного статусу й проіснувала лише десятиліття. Ще раніше, 1603 року, в Неаполі була заснована Академія деї Лінчеї (Accademia dei Lincei), членом якої був Галілей. Це була справді перша наукова академія нового типу, але вона також існувала як приватне об'єднання — з дуже обмеженими ресурсами та залежністю від патронату. Попри це, італійські академії відіграли ключову роль у легітимації експериментальної науки, а згодом стали зразками для стійкіших державних інституцій.

З другої половини XVII століття дедалі помітнішу роль у підтримці науки починає відігравати держава. Це стосується не лише академій, а й інших елементів наукової інфраструктури. Так, при Паризькій академії наук була створена астрономічна обсерваторія з постійним штатом і обладнанням, придбаним за державний кошт. Аналогічно фінансувалися обсерваторії в Гринвічі (Англія) та Берліні. Великі бібліотеки, що раніше були переважно церковними, починають перетворюватися на публічні установи, відкриті для вчених: такими були Бодлеанська бібліотека в Оксфорді, заснована на початку століття, та Королівська бібліотека в Парижі. Їхнє утримання — від зарплат бібліотекарів до закупівлі книжок — ставало справою держави або аристократії.

Приватні особи також продовжували відігравати важливу роль у фінансуванні науки. Заможні меценати, купці, правителі міст-держав і навіть папи римські (наприклад, Урбан VIII) надавали кошти на обсерваторії, видання книжок, виготовлення приладів і запрошення іноземних учених. Таким чином, наукова діяльність була вбудована у складну систему покровительства, де успіх залежав не лише від теорем, а й від зв'язків.

До XVII століття багато авторів не поспішали публікувати свої відкриття. Причин було кілька: страх перед критикою, відсутність видавців, невизначеність авторського права. Проте з посиленням наукової конкуренції дедалі важливішим стає питання пріоритету: хто був першим у відкритті? Відповідь на це питання ставала значущою не лише з моральної, а й із соціальної точки зору: визнання приносило славу, заступництво й іноді — матеріальну підтримку.

Тому вчені починають активніше публікувати свої роботи — у вигляді листів, брошур, математичних задач, криптограм (як це робив Ньютон) або навіть віршів (у дусі Паскаля). Уже в середині століття з'являються перші наукові журнали: французький *Journal des sçavans* (1665) та англійський *Philosophical Transactions* (1665) стали прототипами сучасних рецензованих видань. Кількома роками пізніше, 1682 року, вийшов німецький журнал *Acta Eruditorum*, який видавався в Лейпцигу. Він відіграв особливо важливу роль у публікації праць німецьких і східноєвропейських учених і став майданчиком, де друкувалися роботи Лейбніца та його послідовників. Так формувалася перша транснаціональна система наукової комунікації, у якій математик із Франції, Саксонії чи Англії міг розраховувати на відгук своїх ідей в іншій частині континенту.

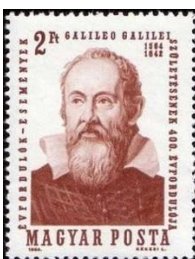
Галілео Галілей

Галілео Галілей (1564–1642) — один із центральних діячів наукової революції. Народився в Пізі, у сім'ї музиканта й теоретика Вінченцо Галілея. Спочатку вивчав медицину, але швидко захопився математикою та фізикою. Галілей викладав в університетах Пізи та Падуї, де провів свої основні наукові дослідження.

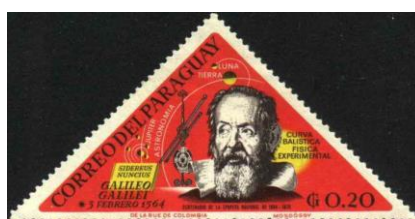


Петер Пауль Рубенс, Галілео Галілей, бл. 1630 р.

Серед його найважливіших досягнень — спостереження за допомогою вдосконаленого телескопа: горбиста поверхня Місяця, супутники Юпітера, фази Венери. Ці відкриття підірвали панівну тоді геоцентричну картину світу, засновану на вченні Аристотеля та Птолемея, і підтверджували геліоцентричну модель Коперника.



Підтримка цієї моделі призвела Галілея до конфлікту з католицькою церквою. У 1616 році йому було заборонено захищати геліоцентризм як фізичну реальність, проте в 1632 році він опублікував діалог «Про дві найголовніші системи світу», за що був притягнутий до суду інквізиції. У 1633 році Галілей був змушений зректися своїх поглядів і решту життя провів під домашнім арештом.



Галілей відіграв ключову роль у перетворенні математики з абстрактного мистецтва на інструмент дослідження природи. Він розглядав математику як мову природи й активно застосовував її для опису фізичних явищ.

Одним із його головних досягнень стало формулювання закону падіння тіл: за відсутності опору повітря тіла падають з однаковим прискоренням, незалежно від їхньої маси. На основі експериментів і роздумів він дійшов висновку, що траєкторія снаряда, який рухається під дією сили тяжіння, є параболою. Це був перший приклад математичного опису складного руху в природі.



Окрім фізики, Галілей цікавився також імовірнісними задачами. У листі до свого учня Бенедетто Кастеллі він розглядав гру з трьома шестигранними кубиками. Галілей помітив, що хоча суми 9 і 10 мають однакову кількість способів отримання, сума 10 випадає частіше. Він з'ясував, що кількість комбінацій, які ведуть до кожної суми, різна, і саме це визначає ймовірність. Це був важливий крок у напрямі до математики ймовірностей.



Цікавим є і філософський «парадокс Галілея», сформульований у його пізній роботі «Бесіди та математичні доведення, що стосуються двох нових наук» (1638). Галілей зазначив, що квадратів натуральних чисел існує стільки ж, скільки й самих натуральних чисел, хоча квадрати, здавалося б, становлять лише їх частину. Це наочний приклад того, як інтуїтивні уявлення про нескінченність вступають у суперечність із логічним аналізом, і своєрідне передбачення майбутньої теорії множин.



Галілей вважається одним із засновників наукового методу в сучасному розумінні. Він наполягав, що знання про природу має ґрунтуватися не на авторитетах і догмах, а на досвіді й математичному моделюванні. Його метод спирався на спостереження й експеримент, часто із застосуванням приладів, на ідеалізацію та спрощення ситуацій (наприклад, рух тіл по похилій площині замість вільного падіння), на математичний опис явищ, логічний висновок і перевірку наслідків.

Він першим послідовно застосував схему: гіпотеза → математична модель → передбачення → експериментальна перевірка. У цьому сенсі Галілей став попередником як ньютонівської механіки, так і всієї сучасної фізики.

Вінченцо Вівіані

Вінченцо Вівіані (1622–1703) народився у Флоренції в знатній, але збіднілій родині. Він здобув освіту в єзуїтській школі, де вивчав гуманітарні науки, проте невдовзі зацікавився математикою і почав займатися геометрією під керівництвом Клементе Сеттімі — учня Галілея. Через Сеттімі Вівіані познайомився з придворним математиком Фаміано Мікеліні, який відіграв ключову роль у його долі: представив юнака великому герцогу Тосканському Фердинандо II Медічі. Той, вражений талантами Вівіані, призначив йому стипендію та познайомив із Галілео Галілеєм, який на той час уже осліп і перебував під домашнім арештом.



З 1639 року Вівіані оселився в будинку Галілея в Арчетрі й став його останнім учнем і помічником. Він допомагав учителеві в роботі над трактатом «Дві нові науки», зокрема — у дослідженні руху тіл по похилій площині, а також обговорював із Галілеєм філософські та математичні аспекти природи. У останні роки життя Галілея Вівіані читав йому наукові тексти та записував його міркування. У 1641 році до них приєднався Еванжеліста Торрічеллі, учень Галілея та наставник Вівіані в галузі фізики й геометрії.

Після смерті Торрічеллі у 1647 році Вівіані обійняв його місце в Академії малюнка у Флоренції, а згодом став одним із перших членів Академії дель Чіменто — першої в Європі наукової академії експериментального спрямування.

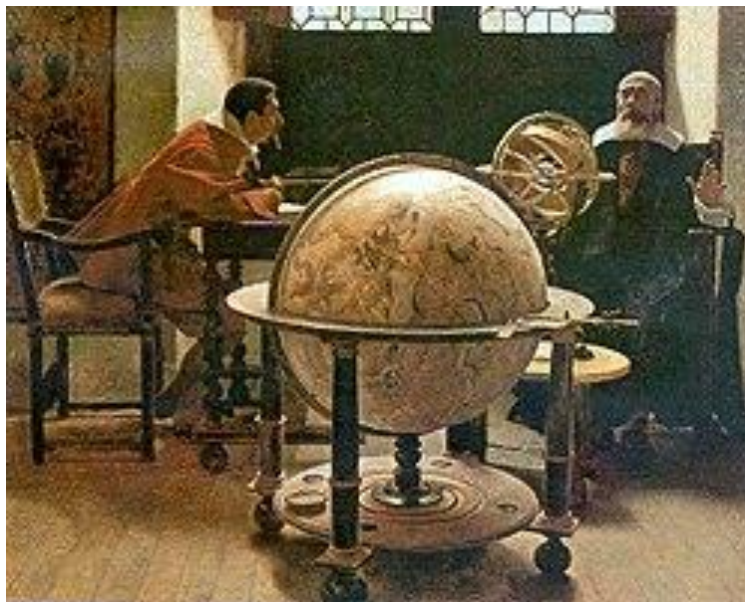
Головною моральною й інтелектуальною місією життя Вівіані стало збереження пам'яті про Галілея. У 1654 році за дорученням кардинала Леопольдо де Медічі він почав збирати матеріали про життя та наукову діяльність учителя. Вівіані редагував перше зібрання творів Галілея (1655–1656), допомагав координувати видання та оформлення титульного аркуша. Він також написав біографію Галілея, але, за його словами, її публікація була заблокована церковною цензурою — хоча пізніші дослідники ставили це під сумнів.



Знаковим пам'ятником його відданості став флорентійський палац Вівіані — Palazzo dei Cartelloni («Палац написів»), на фасаді якого він розмістив величезні кам'яні сувої з латинськими текстами про життя й заслуги Галілея. Більше того, він заповів кошти на встановлення монумента Галілею в церкві Санта-Кроче. Коли у 1737 році Галілею нарешті дозволили урочисте поховання, Вівіані був перепохований поруч із ним — як останній учень і вірний хранитель його пам'яті.

Як математик, Вівіані став своєрідним мостом між античною геометрією та новою математикою XVII століття. Він активно займався відновленням і коментуванням праць давньогрецьких авторів — Арістея Старшого та Аполлонія Перзького, особливо цікавився теорією конічних перетинів. Вівіані розробив і дослідив фігуру Вівіані — геометричне місце точок, утворене перетином півсфер у кубі, що дозволило йому вивчати питання площі й об'єму, продовжуючи архімедівську традицію.

Окреме місце у його працях займали інженерні задачі. Вівіані виконував численні замовлення герцогського двору: проектував куполи, укріплення, працював над проблемами стійкості споруд. У 1687 році він опублікував трактат «Міркування про захист від затоплень і розмивання берегів річками» (*Discorso intorno al difendersi da' riempimenti e dalle corrosione de' fiumi*), у якому застосував математичні методи до гідротехнічних завдань.



Тіто Лессі, Галілей і Вівіані, 1892 р.

Вівіані також проводив фізичні експерименти. Разом із Джованні Альфонсо Бореллі²⁹ у 1660 році він визначив швидкість звуку, вимірюючи інтервал між спалахом і звуком

²⁹ Джованні Альфонсо Бореллі (Giovanni Alfonso Borelli, 1608–1679) — італійський математик, фізик, астроном і натураліст, один із засновників біомеханіки. Учень Галілея, він поєднував математичні

гарматного пострілу. Отримане значення — близько 350 м/с — виявилося значно ближчим до сучасних даних, ніж попередні оцінки.

У 1661 році він помітив під час дослідів із маятником, що той відхиляється вбік — спостереження, яке передбачало маятник Фуко³⁰. Хоча Вівіані не пов'язав цей ефект із обертанням Землі й усунув його, підвісивши маятник на двох струнах, його експеримент став ще одним прикладом проникливого наукового спостереження.

Зі зростанням слави Вівіані отримав запрошення від Людовіка XIV і польського короля Яна II Казимира. Проте він відмовився від цих почесних пропозицій, залишившись у Флоренції, де у 1666 році здобув титул першого математика тосканського двору — посаду, яку раніше обіймали Галілей і Торрічеллі.

Цікавим є також епізод його співпраці з натуралістом Ніколасом Стено³¹. Разом вони застосовували геометричні методи для аналізу м'язових волокон акули, що знайшло відображення в трактаті *Elementorum myologiae specimen* — одному з ранніх прикладів поєднання анатомії та математики.

У останні роки життя Вівіані працював над трактатом про опір твердих тіл, який після його смерті завершив і опублікував Луїджі Гвідо Гранді.

Йоганн Кеплер

Йоганн Кеплер (1571–1630) народився у Священній Римській імперії, в місті Вайль-дер-Штадт. Його дитинство та юність минули у складних умовах: батько був найманцем, мати — знахаркою, яку вважали відьмою. Згодом її двічі звинувачували у чаклунстві та засуджували до смертної кари, і Кеплер особисто захищав її, відігравши вирішальну роль у її виправданні. Ці події залишили глибокий слід у його долі та світосприйнятті.



Майбутній астроном навчався у гімназії монастиря Маульбронн — там, через кілька століть, здобував освіту Герман Гессе, автор «Гри в бісер». Пізніше Кеплер вступив до Тюбінгенського університету, де готувався стати протестантським священником, але дедалі більше захоплювався математикою й астрономією. Саме в університеті він уперше ознайомився з геліоцентричною

методи з дослідженням природних явищ. У праці *De motu animalium* («Про рух тварин») застосував механічні принципи для пояснення м'язової діяльності, розглядаючи тіло як систему важелів і сил.

³⁰ Маятник Фуко — експеримент, здійснений у 1851 році французьким фізиком Жаном Бернаром Леоном Фуко (Jean Bernard Léon Foucault, 1819–1868), який наочно продемонстрував обертання Землі. Маятник, вільно підвішений на довгому тросі, з часом змінює площину коливань відносно поверхні Землі. Цей ефект став одним із перших прямих доведень добового обертання нашої планети.

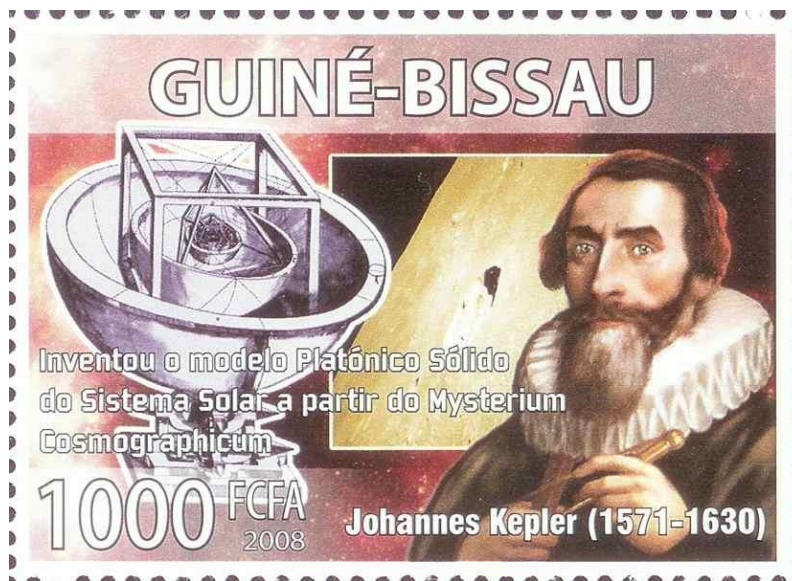
³¹ Ніколас Стено (Niels Stensen, лат. Nicolaus Steno, 1638–1686) — данський анатом, геолог і натураліст, один із засновників стратиграфії та кристалографії. Відкрив закономірності розташування шарів земної кори (закон суперпозиції) та постійність кутів між гранями кристалів. Як анатом уперше детально описав будову м'язів, серця й залоз. Наприкінці життя став католицьким священником і єпископом, згодом беатифікований (зарахований до лику блаженних Католицької церкви).

системою Коперника, якій одразу надав перевагу перед традиційною птоlemeївською моделлю.



а й гармонію.

Без формальної математичної освіти Кеплер фактично став математиком-самоучкою. У 1594 році він отримав викладацьке місце в університеті міста Грац, де почав розробляти власні космологічні ідеї. У 1596 році опублікував свою першу книгу — «Тасмниця світобудови», у якій намагався довести, що кількість планет має бути саме п'ять — за числом правильних багатогранників Платона, вписаних у небесні сфери. Пізніше він сам визнавав, що ця ідея радше поетична, ніж наукова, але вона чудово ілюструє його прагнення бачити у космосі не лише механіку,

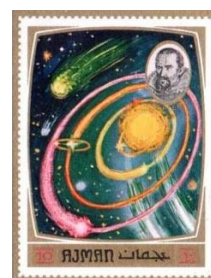


«Кубок Кеплера» — модель Сонячної системи з п'яти платонових тіл.

У 1600 році Кеплера запросили до Праги на службу до великого данського астронома Тихо Браге. Після раптової смерті Браге у 1601 році Кеплер посів його місце імператорського математика й пропрацював у Празі десять років — це був найплідніший період його життя.

Головний внесок Кеплера — формулювання трьох законів руху планет, заснованих на надзвичайно точних спостереженнях Тихо Браге та власному математичному аналізі. Вони були опубліковані у двох працях: у «Новій астрономії» (1609) викладено два перші закони.

Перший закон Кеплера: планети рухаються еліптичними орбітами, у фокусі яких знаходиться Сонце.



Другий закон Кеплера: радіус-вектор, що з'єднує планету із Сонцем, за рівні проміжки часу описує рівні площі.



Ці закони стали першими строгими математичними описами реального руху небесних тіл. Кеплерові знадобилися роки, щоб довести, що орбіта Марса — не коло, а еліпс. Уперше в природі з математичною точністю була відкрита крива другого порядку — еліпс. Це відкриття стало переломним моментом в історії астрономії та математики.

Третій закон з'явився пізніше, у 1619 році, в книзі «Гармонія світу».

Третій закон Кеплера: квадрати періодів обертання планет пропорційні кубам великих півосей їхніх орбіт.

Цей закон виразив глибоку гармонію в устрої Сонячної системи, яку Кеплер прагнув досягнути все життя: «Я з'ясував, що всі небесні рухи, як у цілому, так і в кожному окремому випадку, пронизані спільною гармонією — не тією, яку я уявляв, а ще досконалішою».



Він уявляв планети як учасників космічного хору: Марс — тенор, Сатурн і Юпітер — басы, Венера й Земля — альти, а Меркурій — сопрано з найширшим діапазоном. За його словами, «Земля співає мі, фа, мі — і навіть із цих звуків можна зробити висновок, що в нашому домі панують нещастя й голод».

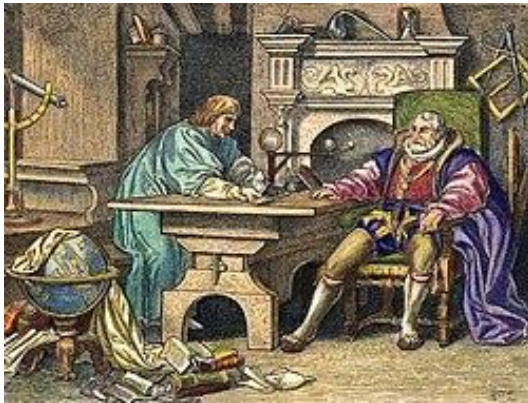
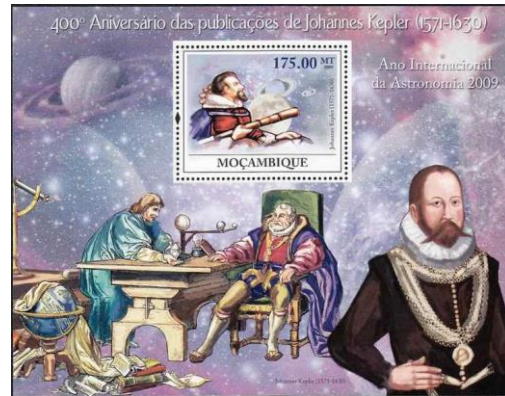
Усі три закони Кеплера згодом лягли в основу класичної механіки Ньютона і стали першими прикладами точних кривих другого порядку, що описують не абстрактні геометричні фігури, а реальний рух небесних тіл. Подібно до результатів Тарталї та Галілея щодо траєкторії польоту снаряда (параболи), вони відкривали шлях до розуміння природи за допомогою алгебраїчних кривих.

Кеплер був особистістю надзвичайно складною. Його автогороскоп «Про себе» — дивовижно відверте психологічне зізнання: «Він береться за безліч нових справ, не завершивши попередніх... робота йому ненависна. І все ж він уперто трудиться, керований невгамовною жагою знання... Поспішність і пристрасність призводять до того, що він часто говорить дурниці... Мова його плутана...».

Він порівнює себе з дворнягою: худю, рухливою, що гризе кістки й їсть хлібні скоринки. Ненаситний до знань, але часто відволікається на нове, залишаючи старе

незавершеним. Цей портрет, сповнений самоіронії та тонкого самостереження, робить Кеплера особливо близьким сучасному читачеві.

Попри злидні, політичні й релігійні катастрофи свого часу, Кеплер зумів створити фундамент астрономії нового періоду. Його закони були не просто інженерними розрахунками — це були поеми про порядок світу, у яких математика й музика, віра й раціональність зливалися в єдине ціле.



Ф. Бюло, гравюра «Кеплер і імператор Рудольф II», 1862 р.

Ейнштейн писав про нього: «Він жив у добу, коли ще не було впевненості в існуванні загальної закономірності для всіх явищ природи. Якою ж глибокою була його віра в таку закономірність, якщо, працюючи на самоті, без підтримки й розуміння, він протягом багатьох десятиліть черпав у ній сили для важкої, копіткої емпіричної праці з дослідження руху планет і математичних законів цього руху! Тепер, коли ці закони вже відомі, важко уявити, скільки винахідливості, уяви й невтомної праці потрібно було, щоб їх встановити з такою дивовижною точністю!»

Окрім небесних питань, Кеплера турбували й цілком земні справи. У 1615 році він написав невеликий, але дуже показовий твір — «Нова стереометрія винних бочок» (*Nova stereometria doliorum vinariorum*). Поштовхом став практичний конфлікт: у місті Лінц, де Кеплер тоді мешкав, збирач податків на вино вимірював об'єм бочок, орієнтуючись лише на довжину палиці, зануреної всередину, не враховуючи форму чи ширину посудини. Такий метод учений вважав кричущо неточним.

Роздратований цим грубим спрощенням, Кеплер вирішив розібратися, як насправді визначати об'єм бочок — традиційно схожих за формою на еліпсоїд або гіперболоїд. Він почав із простого — обчислення об'ємів тіл обертання, які виникають при обертанні кривих другого порядку (еліпсів, парабол, гіпербол) навколо осі.

Так народився трактат, у якому вперше в європейській історії майже сучасними аналітичними методами були обчислені об'єми тіл складної форми. Кеплер мисленно — і буквально — розрізав фігури на частини, користуючись принципами, близькими до інтегрування, задовго до Ньютона і Лейбніца. Можна сказати, що в бочках із вином він «намацав» ідею границі та інтеграла, знову побачивши в реальних формах геометрію другого порядку.

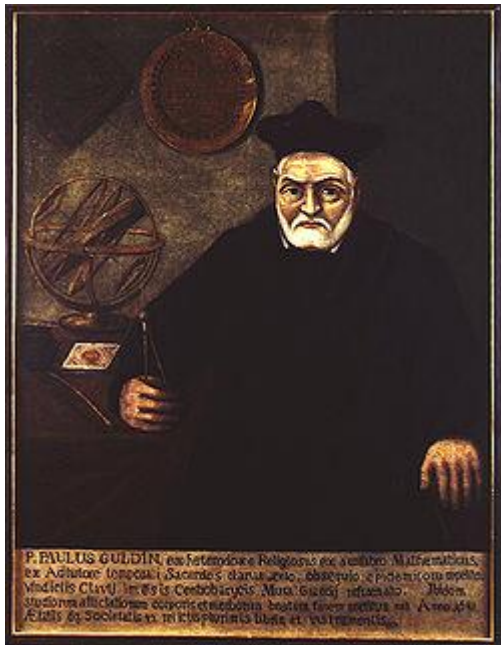
Для самого Кеплера це було не просто практичне завдання. У своїй пристрасті до математичної точності він убачав вияв пошани до божественного порядку — навіть коли

йшлося про податки на вино. Як він писав, «вимірювання потребує не лише рук і лінійки, а й розуму та геометрії».

Так скромне побутове питання перетворилося на справжній внесок у розвиток стереометрії. І знову, як і у випадку з орбітами планет, світ виявився сповненим кривих другого порядку.

Пауль Гульдін

Пауль Гульдін (1577–1643), при народженні — Аввакум Гульдін, народився в селі Мельс на території сучасного швейцарського кантону Санкт-Галлен, у протестантській сім'ї єврейського походження. У юності він працював ювеліром і торговцем, подорожував німецькими землями. Приблизно 1597 року, перебуваючи у Фрайзингу, пережив духовну кризу, яка привела його до переходу в католицизм. Приймавши хрещення, він узяв ім'я Пауль і вступив до ордену єзуїтів у Мюнхені.



Гульдін здобув освіту як схоласт і священник у єзуїтських закладах. Особливу увагу він приділяв математиці, яку почав вивчати в Римській єзуїтській колегії під керівництвом відомого педагога Христофора Клавія. Завдяки таланту й наполегливості Гульдін швидко досяг високого рівня в математиці.

З 1617 року Гульдін почав викладати в Єзуїтській колегії в Граці, але невдовзі через хворобу був змушений тимчасово перервати заняття. У 1623 році його призначили професором математики Віденського університету. Згодом, за дорученням ордену, він викладав у єзуїтській гімназії в Загані (нині Жагань у Польщі), заснованій Альбрехтом фон Валленштайном³². У 1637 році він знову переїхав до Граца, де продовжував наукову

роботу до самої смерті 3 листопада 1643 року.

Наукова спадщина Гульдіна тісно пов'язана з розвитком геометрії та механіки, особливо з поняттям центру мас і задачами обчислення об'ємів та площ тіл обертання. Його головна праця — чотиритомний твір *Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae* («Про центр ваги трьох видів неперервних кількостей»), що видавався в 1635–1641 роках. Цей твір узагальнював і систематизував результати, пов'язані з поняттям центру ваги (центру мас) тіл, ліній і поверхонь.

У першому томі *Centrobaryca* він формулює визначення центру мас, наближаючись до сучасного розуміння: центр мас тіла — це така точка, відносно якої всі частини тіла

³² Альбрехт фон Валленштайн (1583–1634) — богемський (чеський) аристократ, полководець і державний діяч Священної Римської імперії, один із найвпливовіших воєначальників Тридцятилітньої війни. Був покровителем наук і мистецтв, заснував у своєму володінні місто Саган (Жагань) і підтримував розвиток єзуїтських освітніх закладів.

врівноважуються. Прямі лінії, що проходять через центр мас, поділяють тіло на частини рівної маси. Гульдін наголошує, що центр мас може перебувати як усередині, так і поза тілом (наприклад, у випадку кільця).

Найбільшу відомість Гульдін здобув завдяки формулюванню двох теорем, що стосуються тіл обертання, — нині відомих як теореми Паппа — Гульдіна. Хоча ці результати походять від античного математика Паппа Александрійського (III–IV ст.), саме Гульдін надав їм сучасного геометричного вираження й застосував у контексті поняття центру мас.

Перша теорема Паппа — Гульдіна (для поверхонь): Площа поверхні тіла, отриманого обертанням плоскої кривої навколо осі, що лежить у тій самій площині з кривою й не перетинає її, дорівнює добутку довжини цієї кривої на довжину кола, описуваного її центром мас.

Друга теорема Паппа — Гульдіна (для об'ємів): Об'єм тіла обертання, отриманого обертанням плоскої фігури навколо осі, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, описуваного її центром мас.

Гульдін також брав участь у полеміці з Бонавентурою Кавальєрі — італійським математиком, який розробив метод неподільних, що передував інтегральному численню. Гульдін критикував Кавальєрі за надмірну вільність у поводженні з нескінченно малими величинами й стверджував, що його підхід не відповідає строгій геометричній традиції, що бере початок від Евкліда.

Пауль Гульдін відомий своєю перепискою з видатним астрономом і математиком Йоганном Кеплером. Вона тривала з 1618 по 1628 рік і охоплювала широкий спектр тем — від наукових дискусій до релігійних і адміністративних питань. Попри те, що Кеплер був протестантом, а Гульдін — єзуїтом, їхні стосунки довгий час залишалися шанобливими та плідними.

Гульдін надавав Кеплеру цінну підтримку. Він сприяв передачі петиції Кеплера імператору Фердинанду II з проханням профінансувати публікацію *Rudolphine Tables* («Рудольфових таблиць»); допоміг Кеплеру отримати телескоп через свого колегу, єзуїта Нікколо Дзуккі; обговорював із ним наукові питання — рух небесних тіл, космологічні ідеї та календарні реформи.

У подячному листі Кеплер із захопленням писав про телескоп, подарований йому через Гульдіна: «З ким мені ще нині обговорювати астрономію, як не з Вами... Я думаю, що Ви повинні отримати від мене перші плоди задоволення, яке я відчув, користуючись Вашим дарунком (телескопом).»

Однак наприкінці переписки почали виявлятися релігійні суперечності. Гульдін, очевидно, сподівався на навернення Кеплера в католицизм, але той відкинув ці очікування. Після цього Гульдін особисто більше не відповідав Кеплеру, а одне з останніх листів було підписане іншим, невідомим єзуїтом. Припиненню переписки, ймовірно, сприяло й те, що Кеплер, перейшовши на службу до Альбрехта фон Валленштайна й переїхавши до Загана, вже не потребував колишньої підтримки. Із їхньої переписки збереглося одинадцять листів Кеплера і один — не від самого Гульдіна, а від його колеги.

Джованні Домініко Кассіні

Джованні Домініко Кассіні (1625–1712) народився в Перінальдо, поблизу Ніцци, у Лігурії, і здобув освіту в єзуїтському коледжі, де виявив здібності до астрономії та математики. Згодом він навчався у Болоньї філософії, математики та інженерії, викладав астрономію в Болонському університеті й став директором місцевої обсерваторії.



У 1669 році, на запрошення Жана-Батіста Кольбера, Кассіні переїхав до Парижа і став першим директором Паризької обсерваторії, заснованої Людовиком XIV. Тут він натуралізувався під іменем Жан-Домінік Кассіні й став одним із найвпливовіших учених Франції. Його нащадки протягом чотирьох поколінь продовжували працювати астрономами, утворивши своєрідну наукову династію — «родину Кассіні».

Хоча Кассіні найбільше відомий своїми астрономічними відкриттями — супутників Сатурна, визначенням обертання Юпітера та уточненням розмірів Сонячної системи, — його діяльність була глибоко математизованою і вплинула на розвиток геометрії та математичного моделювання в астрономії.

Одним із найцікавіших його математичних внесків було прагнення уточнити модель руху планет, запропоновану Йоганном Кеплером. Кеплер стверджував, що орбіти планет — це еліпси, в одному з фокусів яких розташоване Сонце. Кассіні ж у 1680-х роках запропонував розглянути як альтернативу криві четвертого порядку, які згодом отримали назву овали Кассіні.

Овал Кассіні — це геометричне місце точок, для яких добуток відстаней до двох фіксованих точок (фокусів) залишається сталим. На відміну від еліпсів Кеплера, де сталою є сума відстаней до фокусів, тут ідеться про добуток. Такі криві мають складнішу форму: залежно від параметрів вони можуть бути овальними, мати вигляд вісімки (лемніскати) або навіть розпадатися на два окремі замкнені компоненти.



Хоча згодом спостережні дані³³ підтвердили точність кеплерівських еліпсів, пропозиція Кассіні була не лише математично обґрунтованою, а й важливим кроком у розвитку

³³ У 1968 році поштове відомство французького заморського архіпелагу Сен-П'єр і Мікелон випустило марку, присвячену астроному Кассіні. На ній указано дату — 31 липня 1678 року, зображено портрет Джованні Домініко Кассіні та контури островів. Однак, очевидно, марка містить дві історичні помилки. По-перше, Кассіні I (Джованні Домініко) ніколи не відвідував ці острови. Насправді 31 липня 1768 року в Сен-П'єрі висадився його правнук — Кассіні IV (Жан-Домінік Кассіні),

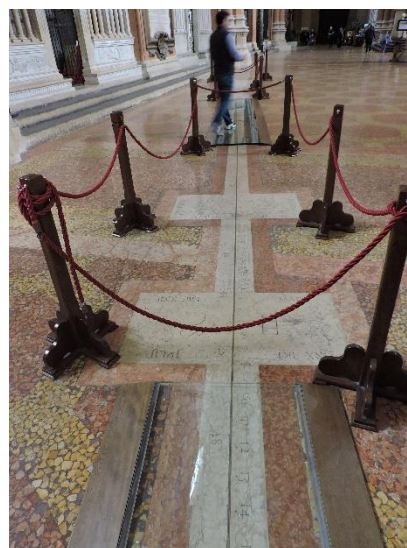
прикладної геометрії та аналітичного опису орбітальних рухів. Вона також продемонструвала готовність учених XVII століття експериментувати зі складнішими алгебраїчними кривими для опису природних явищ.



Інтерес до точних вимірювань проявився у Кассіні вже на ранньому етапі його кар'єри. Яскравим пам'ятником його інженерної та астрономічної думки є меридіан Кассіні, збудований у базиліці Сан-Петроніо в Болоньї. Цей меридіан — довга латунна лінія, вбудована в підлогу храму й орієнтована строго з півночі на південь. У куполі базиліки зроблено невеликий отвір (гномон), крізь який сонячний промінь падає на підлогу, дозволяючи точно фіксувати момент істинного полудня та рух Сонця впродовж року.

Меридіан Кассіні став, по суті, гігантським сонячним годинником і водночас інструментом для уточнення календаря, вимірювання тривалості року, спостереження сонцестояння і, ширше — для дослідження руху небесних тіл. У XVII столітті подібні «астрономічні інструменти в камені» вважалися вершиною наукової інженерії. Болонський меридіан Кассіні й досі існує та використовується як пам'ятка наукової точності й математичного мислення епохи бароко.

Крім того, Кассіні зробив вагомий внесок у розвиток геодезії. Він брав участь у масштабній триангуляції території Франції, заклавши основи сучасної картографії. Його вимірювання паралаксу Марса дозволили вперше досить точно визначити відстань від Землі до Сонця, що мало вирішальне значення для побудови масштабної моделі Сонячної системи.



Логарифми

Ідея, що лежить в основі логарифмів, походить від спостереження, що під час множення степенів із однаковою основою їхні показники додаються: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

Цей закон степенів був відомий ще античним математикам, а в середньовіччі його активно застосовували індійські вчені. Так, у VIII столітті Вірасена уклав таблиці степеневих залежностей для основ 2, 3 і 4 — по суті, це були таблиці логарифмів з цілими показниками. Проте ці знання залишалися фрагментарними й не були оформлені як самостійний математичний апарат.

Вирішальний зсув відбувся в пізньому середньовіччі та на початку нового часу. У Європі XVI століття швидко зростала потреба в прискоренні та спрощенні громіздких

який очолював французьку географічну експедицію. По-друге, портрет на марці зображує саме прадіда — Кассіні I. Експедиція Кассіні IV була присвячена уточненню географічних координат островів і перевірці морських хронометрів, розроблених П'єром Леруа, для вимірювання довготи. Він склав перший науковий опис архіпелагу та його мешканців. Плутанина, відображена на марці, цілком зрозуміла: в історії астрономії фігурують чотири покоління науковців із прізвищем Кассіні, яких для зручності розрізняють як Кассіні I, II, III і IV.

обчислень — насамперед для потреб астрономії, навігації та торгівлі. Традиційні методи арифметики погано справлялися з операціями множення й ділення багатозначних чисел, а також із добуванням коренів. Тоді кілька європейських математиків прийшли до ідеї: спростити обчислення, зіставивши значення геометричної прогресії (тобто степеневій функції) з числами арифметичної прогресії за допомогою таблиць. Таким чином, трудомістке множення можна було замінити додаванням, ділення — відніманням, а добування коренів — діленням. Ця ідея стала відправною точкою для створення логарифмів у сучасному розумінні.

Першим, хто чітко сформулював цю думку, був німецький математик Міхаель Штіфель, який у 1544 році опублікував працю *Arithmetica integra*. Він уперше склав логарифмічну таблицю, у якій степені двійки (та інших чисел) були розміщені паралельно до цілих і дробових чисел. Штіфель зробив важливий крок, перенісши увагу з цілих показників на дробові — фактично усвідомивши, що степінь може бути будь-яким числом. Хоча його таблиці ще мали попередній характер і не отримали практичного застосування, внесок Штіфеля став важливою віхою на шляху до створення логарифмічного апарату. Його попередниками можна вважати Ніколя Орема (XIV ст.) і Ніколя Шюке (XV ст.), які також розмірковували про степеневі залежності, але в обмеженішому контексті.

Незалежно й майже одночасно ідея зіставлення геометричної та арифметичної прогресій з'явилася в ісламській математиці. У 1591 році Ібн Хамза опублікував роботу, де за допомогою спеціальної таблиці також намагався замінити операції множення й ділення на додавання та віднімання. Проте, як і Штіфель, він не розвинув цю ідею до повноцінної системи.



Головна заслуга у відкритті логарифмів належить шотландському математику Джону Неперу (John Napier, 1550–1617), якого сучасники називали «чарівником із Мерчїстона». У 1614 році він опублікував працю *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* («Опис дивовижного канону логарифмів»), де виклав основи нового методу. У передмові до цієї книги Непер писав: «Переконавшись, що немає нічого іншого, що викликало б більші труднощі у математичній практиці, а також більше заважало й обтяжувало обчислювачів, ніж множення, ділення, добування квадратних і кубічних коренів, які, окрім утомливого марнування часу, є головним джерелом численних помилок, я почав міркувати над тим, яким надійним і простим способом я міг би усунути ці перешкоди. І, розмірковуючи над різними засобами, придатними для досягнення цієї мети, я, нарешті, знайшов чудові короткі правила, які можна буде використовувати надалі. Серед усіх цих правил немає корисніших, ніж ті, що усувають із обчислень числа, які мають бути перемножені, поділені або перетворені на корені, і замість них ставлять інші числа, за допомогою яких усі обчислення виконуються лише додаванням, відніманням або діленням на два чи три».

Він не лише пояснив ідею, але й уклав таблиці логарифмів для синусів, якими можна було користуватися в астрономічних і навігаційних розрахунках.

Непер виходив не з алгебраїчних, а з геометричних і кінематичних міркувань. Він уявляв собі точку, що рухається прямою з постійною швидкістю, і іншу — за експоненціальним законом, та пов'язував між собою пройдені ними відстані. Ця ідея стала основою його «логарифмів», хоча формули, які він застосовував, не збігаються з сучасними

натуральними логарифмами. Більше того, він ще не використовував за основу число e , як це робитимуть пізніше.



Джон Непер, портрет невідомого автора

Логарифмічні таблиці Непера швидко здобули популярність. Хоч у них і траплялися помилки після шостого знаку, сама ідея й метод виявилися настільки плідними, що були зустрінуті з ентузіазмом. Йоганн Кеплер використав логарифми при створенні своїх Рудольфінських таблиць і присвятив Неперу захоплену передмову.

Цікаво, що логарифми Непера не були пов'язані з десятковою системою числення. Невдовзі після публікації його роботи англійський математик Генрі Бріггс (Henry Briggs, 1561–1630), професор геометрії в Грешем-коледжі, запропонував нову версію — десяткові логарифми, засновані на числі 10.

Бріггс особисто зустрівся з Непером у Шотландії, і вони обговорили перехід до нової системи. У 1617 році він опублікував таблиці логарифмів чисел від 1 до 1000 з 14 знаками, а в 1624 році розширив їх до 20 000 чисел. Бріггс запропонував зручну шкалу з основою 10 і ввів логарифм одиниці, рівний нулю. Невдовзі інший англійський математик, Джон Спайделл, підготував власні таблиці — ближчі до сучасних, де логарифми вже розглядалися як обернена операція до піднесення в степінь.

До кінця XVII століття логарифми стали невід'ємною частиною наукових обчислень. Їхнє значення вже далеко виходило за межі обчислювальної практики. Вони стали ключовим елементом у математичній теорії, що бурхливо розвивалася. У 1629 році бельгієць Грегуар де Сен-Венсан показав, що площа під гіперболою $y = 1/x$ змінюється за логарифмічним законом — найважливіше відкриття на шляху до розуміння інтегральних функцій. У 1668 році Ніколас Меркатор опублікував логарифмічну функцію у вигляді нескінченного степеневого ряду, поклавши початок систематичному вивченню рядів.

Нововведення поширилося Європою з вражаючою швидкістю. Логарифмічні таблиці друкувалися в Німеччині, Франції, Італії, Нідерландах; їх включали до математичних і астрономічних довідників, вивчали в навігаційних школах і університетах. Логарифми стали стандартним інструментом не лише в астрономії, а й в артилерії, укріплювальному будівництві, геодезії, торгівлі.

Крім того, на основі логарифмів невдовзі було винайдено логарифмічну лінійку — перший справді масовий обчислювальний прилад, що дозволяв робити наближені розрахунки «на ходу». Її створив англійський інженер Вільям Отред у 1630-х роках. Логарифмічна лінійка служитиме людству аж до 1970-х років, коли її остаточно витіснять електронні калькулятори.

Жиль де Сен-Венсан

Жиль Грегуар де Сен-Венсан (1584–1667) народився в Брюгге, в іспанських Нідерландах. Після вивчення філософії в університеті Дуе він 21 жовтня 1605 року вступив до ордену єзуїтів. Його математичний талент помітив відомий учений Христофер Клавій³⁴ у Римі, що відкрило перед ним шлях у наукове середовище ордену.



З 1612 року Сен-Венсан перебував у Лувені, де вже наступного року, 1613-го, був висвячений у священники. З 1617 по 1620 роки він викладав в Антверпені разом із Франсуа д'Агільоном — видатним єзуїтським математиком і архітектором. Ці роки стали важливим етапом у формуванні його наукового світогляду. З 1621 по 1625 роки Сен-Венсан викладав математику в Лувені, де почав розвивати власні ідеї в галузі геометрії та нескінченно малих величин.

У 1625 році він захопився ідеєю квадратури круга. Він звернувся до керівництва ордену по дозвіл на публікацію своєї теорії, але отримав відмову до проведення консультації з римським математиком Христофом Грінбергером. Сен-Венсан вирушив до Риму, проте не здобув бажаного схвалення й повернувся на північ у 1627 році.

З 1628 року він служив при дворі імператора Фердинанда II у Празі. Під час хвороби його підтримував єзуїт Теодор Моретус, а коли 1631 року Прагу зайняли саксонці, Сен-Венсанові довелося тікати, втративши частину своїх рукописів. Деякі з них вдалося повернути лише 1641 року завдяки сприянню Родерікуса де Арріаги.³⁵

³⁴ Христофер Клавій (Christophorus Clavius, 1538–1612) — німецький єзуїтський математик і астроном, професор Римського колегіуму. Відомий як один із головних укладачів григоріанської календарної реформи 1582 року.

³⁵ Родерікус де Арріага (Rodericus de Arriaga, 1592–1667) — іспанський єзуїтський філософ і теолог, професор Лувенського університету. Представник схоластичної традиції XVII століття, відомий своїм головним твором *Cursus philosophicus* (1632–1636), у якому прагнув поєднати аристотелізм із новими науковими ідеями.

З 1632 року і до кінця життя він мешкав у Генті, де викладав математику й працював над своїм головним твором — *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii*, опублікованим лише 1647 року, через два десятиліття після написання.

Наукова діяльність Сен-Венса розвивалася на межі традиційної евклідової геометрії та зароджуваного математичного аналізу. Його головна праця *Opus geometricum* була спробою систематично дослідити задачі квадратур (визначення площ і об'ємів) за допомогою суто геометричних методів, що передували інтегральному численню.



Титульна сторінка *Opus Geometricum*

Ключовим поняттям у його методі стало так зване *ductus plani in planum* — геометрична процедура перетворення плоскої фігури на тривимірне тіло. Сен-Венсан із великою винахідливістю обчислював об'єми різних тіл, наприклад так званих «унгул» — сегментів циліндрів, утворених перетином похилою площиною. Ці конструкції стали попередниками об'ємних інтегралів, при цьому автор обходився без алгебраїчної символіки чи формального апарату інтегралів, спираючись виключно на просторове мислення й геометричні побудови.

Особливе місце у його працях посідає квадратура гіперболи — знаходження площі під кривою $y = 1/x$. Сен-Венсан зауважив, що площа під цією кривою між $x = a$ і $x = b$ залежить лише від відношення b/a , що дозволяє визначити функцію зі властивістю $A(xy) = A(x) + A(y)$. Це — основна властивість логарифма, і саме такою була природа гіперболічного логарифма, попередника натурального логарифма.

Сам Сен-Венсан не вживав слова «логарифм», але його учень, єзуїт Альфонс-Антуан де Сараса, чітко сформулював, що йдеться про логарифмічну функцію, визначену через площу під гіперболою. Це відкриття було сприйняте як спосіб перетворення множення на додавання — тобто як фундаментальна ідея логарифмічної залежності. Таким чином, Сен-Венсан стояв біля витоків уявлення про логарифм як площу під певною кривою — ідеї, яка вже у 1660-х роках активно поширювалася в працях Гюйгенса, Джеймса Грегорі та Ніколаса Меркатора.

Крім того, Сен-Венсан працював над задачами трисекції кута та знаходження середніх пропорційних, що також підводило його до методів, пов'язаних із границями й нескінченно малими величинами. Він часто використовував ідею послідовного наближення та вичерпування — метод, що сягає Архімеда, але в його виконанні набув нового систематичного вигляду.

Хоча в *Opus geometricum* автор стверджував, що розв'язав задачу квадратури круга, його розв'язок зустрів критику, зокрема з боку Вінсента Леота³⁶, і згодом був визнаний некоректним. Проте сама спроба й використані в ній методи вплинули на формування математичного мислення XVII століття.

Наукова спадщина Сен-Венсана активно цитувалася сучасниками. Його праці згадував Християн Гюйгенс у *Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis, et Circuli* (1651), а ідея зв'язку між логарифмом і площею під гіперболою стала загальновідомою вже в 1660-х роках.

Таким чином, Жиль Грегуар де Сен-Венсан був одним із тих математиків XVII століття, які, залишаючись у межах геометричної традиції, наблизилися до ідей аналізу та інтегрування. Його праці стали важливою перехідною ланкою між античною геометрією та математикою Нового часу.

Арифметика і алгебра

Наприкінці XVI — на початку XVII століття алгебра вступає у фазу активного переосмислення. Значний внесок у її розвиток зробили англійський математик Томас Гарріот (1560–1621) і француз Альбер Жирар (1595–1632). Гарріот одним із перших почав систематично використовувати буквені позначення для невідомих і параметрів рівняння, а також запропонував записувати рівняння у вигляді, коли всі члени перенесено в один бік, рівний нулю — форма, що стала стандартною.

Жирар, своєю чергою, першим чітко сформулював загальне правило: рівняння степеня n може мати до n коренів, включно з уявними та кратними. Хоча він і не дав строгого доведення, його думка стала важливим кроком на шляху до основної теореми алгебри, яка стверджує, що кожне алгебраїчне рівняння степеня n має n коренів (у множині комплексних чисел, з урахуванням кратностей).

Алгебра доби Відродження стає дедалі більш символічною. Якщо в ранніх авторів, таких як Вієт, символи позначали лише числа й параметри, то тепер вони починають виконувати операційну функцію — позначати дії, перетворення й навіть узагальнення алгоритмів. З'являються сучасні знаки для додавання й віднімання, множення (хрестик або крапка), ділення (дробова риска або двокрапка), степеня й кореня. Ці позначення допомогли звільнити мислення від громіздких словесних описів і дали алгебрі мову, придатну для вираження загальних структур.

³⁶ Вінсент Леон (Vincent Léon, бл. XVII ст.) — маловідомий учень і послідовник Григорія де Сен-Венсана, який займався популяризацією його математичних ідей. Імовірно, працював у середовищі єзуїтських учених Фландрії та Лувена. Згадується в листуванні сучасників як один із тих, хто сприяв поширенню геометричних методів свого вчителя, зокрема у вивченні нескінченно малих і логарифмів.

Німецький математик Пітер Роте (бл. 1575 — після 1622) у своїй книзі *Mathematische Unterweisung* сформулював думку, близьку до основної теореми алгебри: що рівняння степеня n може мати n коренів. Хоча його твердження не супроводжувалося строгим доведенням, сама ідея виявилася надзвичайно плідною і стала основою майбутньої концепції комплексного поля.

Жирар використовував від'ємні та уявні числа в обчисленнях, визнаючи їх математичну значущість. Проте в його час уявні числа (корені з від'ємних чисел) залишалися об'єктом скепсису: їх вважали штучними, «неіснуючими». Навіть самі терміни — уявні й фантастичні числа — відображають ставлення епохи. Хоч Жирар і застосовував їх, широкого визнання вони не здобули аж до кінця XVII століття.



Лоран де ла Гір, Аллегорія арифметики, 1590 р.

Якісний стрибок у розвитку алгебри пов'язаний з ім'ям Рене Декарта (1596–1650). У «Геометрії» (1637) він реформує не лише техніку алгебраїчних обчислень, а й сам підхід до математики. Його мета — створити універсальний метод розв'язання задач, заснований на аналізі за допомогою рівнянь. Саме у Декарта буквені позначення набувають усталеного змісту: x , y , z — невідомі³⁷, a , b , c — параметри. Він послідовно дотримується сучасного формату запису рівнянь і вводить метод систематичного зниження степеня під час розв'язання.

³⁷ Окрім «алфавітної» версії про те, що Декарт просто зарезервував для змінних останні літери абетки, існують ще три гіпотези, чому невідому в алгебрі найчастіше позначають саме літерою x : 1) Типографічна гіпотеза: у друкарнях часів Декарта літера x використовувалася рідко, тому була зручною для позначення змінної: вона не потрібна для друку звичайних латинських слів, економила місце й залишалася «вільною». 2) Арабсько-іспанська гіпотеза: існує популярна, хоча історично не цілком доведена версія, за якою іспанські перекладачі арабських математичних текстів нібито передавали арабське слово شيء (шай'), що означає «річ» або «щось» (невідоме), через іспанське xei , а згодом скоротили його до x . Однак прямих доказів цьому майже немає, і сама гіпотеза виникла заднім числом. 3) Практична гіпотеза: x — коротка, легко впізнавана й графічно проста літера, особливо зручна для письма від руки та для типографського набору.

Декарт показує, як перекладати геометричні задачі в алгебраїчну форму і навпаки, тим самим поєднуючи геометрію й алгебру — народження аналітичної геометрії.

XVII століття приносить розширення поняття числа. Все частіше використовуються від'ємні числа, визнані повноправними розв'язками рівнянь; уявні числа, що отримали робочу інтерпретацію (хоча філософськи вони ще викликають суперечки); десяткові дробі, які систематично застосовуються в обчисленнях (розвинені Штіфелем, Стевіном і Бюргі); неперервні дробі — представлення чисел у вигляді ланцюгових дробів, що дозволяє точніше наближати ірраціональні величини. Так алгебра виходить за межі простої «арифметики літер» і перетворюється на універсальний інструмент дослідження числових і геометричних об'єктів.

Французький математик Мішель Ролль (1652–1719) відіграв важливу роль у уточненні понять, пов'язаних із рівняннями. Його теорема (у сучасному формулюванні — з математичного аналізу) стверджує, що якщо функція неперервна на відрізку і має рівні значення на його кінцях, то всередині відрізка знайдеться точка, у якій похідна дорівнює нулю. У XVII столітті це розуміли як твердження про наявність максимуму або мінімуму функції між коренями. Хоча формальний аналіз ще не був розвинений, інтуїція, що лежить в основі теореми Ролля, уже працювала на практиці під час наближеного розв'язання рівнянь.

Нарешті, уже в XVII столітті, у працях Лейбніца, а трохи пізніше — на початку XVIII століття — у Крамера з'являються визначники — особливі вирази, пов'язані з системами лінійних рівнянь. Спочатку їх використовували як зручний спосіб запису розв'язків, а згодом вони стали самостійним об'єктом дослідження. Визначники стали важливим кроком на шляху до лінійної алгебри й аналізу функцій багатьох змінних.

Томас Гарріот

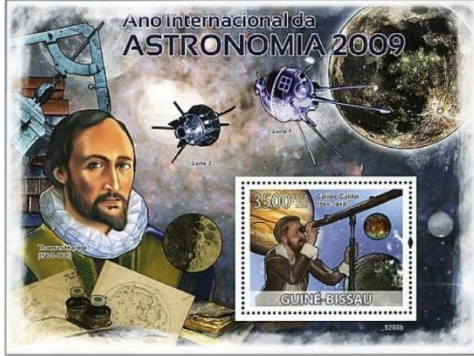
Томас Гарріот (1560–1621) народився 1560 року в Оксфорді, де 1577 року вступив до коледжу St Mary Hall (згодом включеного до Ориел-коледжу). Гарріот проявив блискучі здібності до математики й невдовзі після отримання ступеня почав працювати на сера Волтера Релі — фаворита королеви Єлизавети I — як навігаційний експерт і викладач.



У 1585 році він узяв участь в англійській експедиції до Нового Світу, організованій Релі та очоленій Ральфом Лейном. Гарріот побував на острові Роанок (нині — узбережжя Північної Кароліни), де вивчав мову алгонкінів (зокрема, каролінський діалект) і розробив систему транскрипції, щоб її можна було записувати. Знання мови зробило його ключовою фігурою експедиції та важливим посередником між англійцями й місцевими жителями. Він особисто спілкувався з двома індіанцями — Мантео та

Вончізом — яких Релі привіз до Англії, і згодом згадував, як алгонкіни були вражені технічними приладами європейців — компасами, астролябіями, годинниками та іншими інструментами, що здавалися їм «справою богів, а не людей».

Повернувшись, Гарріот у 1588 році опублікував трактат *A Briefe and True Report of the New Found Land of Virginia*, де описав географію, населення, звичаї та потенціал нових земель для колонізації. Його праця справила значний вплив на формування британської колоніальної стратегії в Північній Америці й стала важливим джерелом для наступних поселенців.



Серед незвичних епізодів його життя — припущення, що саме Гарріот першим завіз картоплю до Великої Британії та Ірландії, хоча достовірність цього твердження залишається предметом дискусій серед істориків.

Після падіння Релі в немилість у 1592 році Гарріот знайшов нового покровителя — Генрі Персі, 9-го графа Нортумберлендського, відомого своєю прихильністю до наук. Граф надав йому житло й лабораторію в маєтку Сайон-Гаус, де Гарріот працював до кінця життя. Його оточували такі ж учені й викладачі, як Уолтер Уорнер та Роберт Г'юз. 1595 року Персі подарував йому земельну власність у Даремі, забезпечивши соціальне піднесення.

У 1605 році, після Порохової змови³⁸, Гарріота тимчасово заарештували через зв'язок з одним із учасників — Томасом Персі, далеким родичем графа. Проте самого Гарріота швидко звільнили, і він продовжив наукову діяльність.

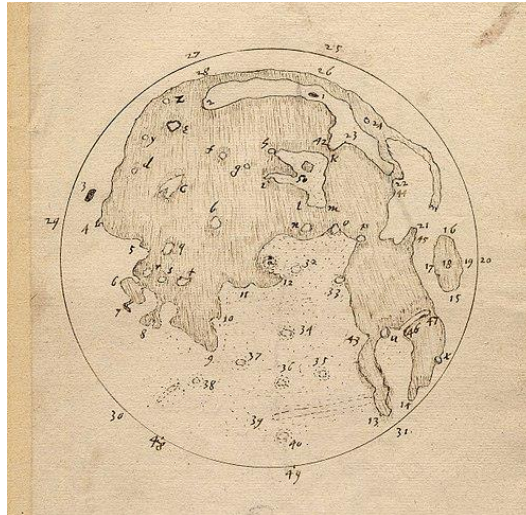
Гарріот зробив внесок у цілу низку галузей — математику, оптику, астрономію, навігацію, етнографію й навіть ранню хімію. Він розробляв нові навігаційні методи, навчав капітанів мореплавству та користуванню астролябією й секстантом, а також писав трактати (зокрема *Articon* — нині втрачений твір із навігації).

У математиці він ішов слідами Франсуа Вієта, але просунувся далі у напрямку алгебраїчної символіки. У посмертно опублікованій праці *Artis Analyticae Praxis* (1631) він уперше в історії друку використовує позначення $>$ і $<$. У цій же роботі він викладає методи розв'язання алгебраїчних рівнянь, формуючи підхід, близький до сучасного аналітичного методу.

Крім того, задовго до Лейбніца Гарріот розробив основи двійкової системи числення — запису чисел за допомогою нулів і одиниць, але його рукописи було виявлено лише у XX столітті.

Гарріот став одним із перших європейських астрономів, які застосовували телескоп. У липні 1609 року (за старим стилем — 26 липня, за новим — 5 серпня) він зробив перше в історії телескопічне зображення Місяця — за кілька місяців до більш відомих малюнків Галілея. Його карти включали кратери та інші деталі місячної поверхні, і хоча за точністю вони поступалися галілейвським, залишалися найдетальнішими до середини XVII століття. До 1613 року він уже створив дві докладні карти всього Місяця.

³⁸ Порохова змова (Gunpowder Plot, 1605) — невдала спроба групи англійських католиків на чолі з Гаєм Фоксом підірвати будівлю Палати лордів під час відкриття парламенту, щоб убити короля Якова I та членів уряду. Метою змовників було припинення переслідувань католиків і відновлення католицької монархії в Англії.



Також він незалежно від Галілея спостерігав сонячні плями (у грудні 1610 року) і першим в Англії спостерігав комету Галлея 1607 року, розпочавши обчислення її орбіти.

Спираючись на ідеї античної механіки, Гарріот теоретично довів, що траєкторія тіла, кинутого горизонтально, є параболою. В оптиці він наблизився до формулювання закону заломлення світла, але свої результати, як і багато іншого, не опублікував.

З 1614 року Гарріот страждав на рак носоглотки, ймовірно, пов'язаний із надмірним уживанням тютюну. Він помер 2 липня 1621 року в Лондоні, перебуваючи в домі друга на Треднідл-стріт. Похований був у церкві St. Christopher le Stocks, знищеній під час Великої пожежі 1666 року; згодом на її місці звели Банк Англії.

Томас Гарріот залишив по собі понад 400 аркушів рукописів, багато з яких досі не опубліковано. Його посмертна репутація як одного з найобдарованіших і недооцінених учених свого часу лише зміцнюється з кожним новим дослідженням його архівів.

Альбер Жирар

Альбер Жирар народився 1595 року в місті Сен-Мійєль, розташованому в Лотарингії, у Франції. Він походив із протестантської родини й з юних літ виявляв музичні здібності — професійно грав на лютні, писав музику і навіть планував створити трактат із музичної теорії. Однак, якщо такий твір і було завершено, він не зберігся.

Після заборони протестантських богослужінь у Франції 1610 року Жирару з родиною довелося залишити батьківщину. Точна дата переселення невідома, але вже 1613 року він жив в Амстердамі. Там він одружився, заробляв на життя музикою і, попри постійну нужду, продовжував розвиватися як учений. У листах Жирар не раз із сумом згадував Францію та скаржився на скрутне матеріальне становище.

З 1617 року Жирар навчався в Лейденському університеті, де вивчав переважно математику й музику. Його листування з другом і товаришем по навчанню Якобом Голіусом, майбутнім відомим сходознавцем і математиком, свідчить про широкий коло наукових інтересів. Попри відсутність офіційних академічних посад, Жирар продовжував займатися математикою — часто самотужки й без підтримки. Він був

замкненою людиною, майже не вів особистих записів, що ускладнює відтворення його біографії.

Після завершення навчання Жирар став військовим інженером в армії принца Фредеріка Генріха Оранського. Його робота включала складання карт і розрахунок фортифікаційних споруд — завдання, що вимагали серйозної математичної підготовки. У цей період він познайомився з кількома видатними науковцями, серед яких Віллеброрд Снелл, Сімон Стевін і П'єр Гассенді. Останній, залишивши спогади про Жирара, відзначав, що обидва поділяли геліоцентричну модель Коперника — сміливу на той час позицію.

Жирар планував опублікувати кілька наукових праць: відновлений ним трактат Евкліда «Поризми», дослідження з оптики та трактат про музику. Однак фінансові труднощі не дали змоги здійснити ці задуми. Із наявних згадок випливає, що його оптичні роботи стосувалися заломлення світла і, ймовірно, розвивали ідеї Снелліуса.

Жирар помер у Лейдені 1632 року, у віці всього 37 років. Його дружина тоді чекала на народження дванадцятої дитини. Похований він під іменем «пан Альберт, інженер» на цвинтарі в Галлі. Попри коротке життя, Жирар залишив значну наукову спадщину.

Учений зробив внесок у кілька галузей математики. У трактаті 1625 року він першим сформулював (без доведення) твердження, що кожне просте число, яке має вигляд $4n + 1$, можна подати як суму двох квадратів. Згодом цю теорему довели Ферма та Ейлер, однак низка математиків, зокрема Джеймс Діксон, називали її саме теоремою Жирара.

У трактаті з тригонометрії, опублікованому 1626 року під назвою «Таблиці синусів, тангенсів і секансів із коротким трактатом про тригонометрію плоских і сферичних трикутників», він систематизував відомі на той час теореми, увів нові результати та запропонував позначення $\sin$, $\cos$ і $\tan$ — скорочення, що згодом стали стандартом у математиці.

Одним із його найважливіших відкриттів стала теорема Жирара: площа сферичного трикутника на сфері одиничного радіуса дорівнює різниці між сумою його кутів і π . Це було перше строге вираження зв'язку між геометрією сферичних трикутників і їхніми кутами. Хоча аналогічну формулу отримали також Гарріот, Кавальєрі й Роберваль, уперше її опублікував саме Жирар.

Він також сформулював цікаву теорему про площу чотирикутників, вписаних у коло: якщо фіксовано довжини сторін, але дозволено змінювати їхній порядок, то сума площ усіх можливих таких чотирикутників дорівнює добутку трьох різних діагоналей, поділеному на подвоєний діаметр кола. Його тригонометричний трактат перевидавали 1627 та 1629 року.

1629 року, вже під час військового походу³⁹, Жирар написав невеликий, але новаторський трактат «Нове відкриття в алгебрі». У ньому він одним із перших досліджував симетричні функції коренів алгебраїчного рівняння та сформулював

³⁹ Йдеться про військову кампанію 1629 року під проводом принца Фредеріка Генріха Оранського — облогу міста 'с-Гравензеель (Hoes Castle або 's-Hertogenbosch) під час Восьмидесятирічної війни (1568–1648) між Нідерландами та Іспанією. У цей період Жирар служив інженером у нідерландській армії, займаючись картографічними й фортифікаційними розрахунками.

положення, відоме сьогодні як основна теорема алгебри: кожне алгебраїчне рівняння має стільки коренів, якова його степінь. Жирар урахував і уявні (комплексні) корені, наголошуючи на їхньому значенні, і першим представив від'ємні числа як точки на числовій осі — ідея, що згодом стала центральною в розвитку алгебри та аналітичної геометрії.

У тому ж трактаті він задовго до Паскаля описав «трикутник Паскаля» і вивів низку тотожностей для симетричних многочленів — формули, які пізніше знову відкрив Ньютон і які стали основою теорії рівнянь. Ці ідеї згодом розвинули Лагранж, а потім Коші та Галуа в межах теорії груп.

В іншій праці, написаній 1634 року, Жирар уперше навів рекурентну формулу для чисел Фібоначчі й помітив, що відношення сусідніх членів послідовності прямує до золотого перетину.

Він також зробив внесок у перекладацьку та редакторську діяльність: переклав французькою твори Діофанта, підготував видання праць Сімона Стевіна, уточнивши й доповнивши його таблиці, особливо тригонометричні.

Нарешті, Жирар увів у математичну символіку два знаки, що стали класичними: символ кореня довільного степеня ($\sqrt[n]{}$) та знак плюс-мінус ($\pm$). Він активно використовував круглі дужки, сприяючи стандартизації математичного запису, і підтримав запропоновані Ніколя Шюке терміни для великих чисел — мільйон, мільярд, трильйон.

Йоганн Фаульгабер

Йоганн Фаульгабер (1580–1635) народився 5 травня 1580 року в Ульмі, у сім'ї ткача, і спочатку сам здобував фахову підготовку з цієї професії. Проте невдовзі виявив схильність до математики й став Rechenmeister — учителем прикладної арифметики. Він



викладав, писав підручники, складав задачі й мав репутацію вправного «майстра чисел». На початку XVII століття отримав посаду міського геодезиста та інженера, а згодом працював як фортифікаційний інженер у Базелі (1622–1624), Франкфурті та інших містах, зокрема під командуванням Моріса Оранського в Нідерландах. В Ульмі він будував водяні колеса й створював геометричні прилади для військових потреб. Таким чином, його діяльність поєднувала математику, механіку й техніку — як це було властиво для раннього Нового часу.

Свою славу як математик Фаульгабер здобув завдяки працям про арифметичні суми: він досліджував суми степенів натуральних чисел (наприклад, $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$), вивів формули до 17-го степеня, а згодом — і до 25-го. Ці

результати передбачали пізнішу теорію чисел Бернуллі, що з'явилася вже наприкінці XVII століття. Сам Яків Бернуллі посилався на Фаульгабера у своїй *Ars Conjectandi*. Проте Фаульгабер не прагнув до строгого обґрунтування й чіткого викладу: свої результати він записував у вигляді символічних і загадкових виразів, насичених містикою й грою зі знаками. Його підхід демонструє поєднання практичного знання з езотеричним баченням, характерне для наукової культури того часу.

Однією з найвідоміших його книг став *Arithmetischer Cubicossischer Lustgarten* (1604) — «Арифметичний кубікосський сад насолод». Ця робота, що містила 160 задач, мала слугувати рекламою його майстерності. Розв'язків він не наводив, а лише подавав відповіді — запрошуючи зацікавлених звертатися до нього по навчання. Назва книги відсилає до кубічних рівнянь і терміна *cosa* («річ»), яким у часи Рудольфа й Штіфеля позначали невідоме в алгебраїчних рівняннях.

Фаульгабер намагався тримати свої методи в таємниці й різко реагував на спроби їх розголошення. Так сталося з Петером Роте, який у 1608 році у своїй *Arithmetica Philosophica* не лише обґрунтував власні ідеї, а й докладно розібрав усі 160 задач із книги Фаульгабера, навівши розв'язки, які сам автор свідомо приховав. Це викликало в Фаульгабера бурю обурення: як учитель, він заробляв на життя особистою передачею цих знань, і публікація покрокових розв'язків підривала його професійну модель. Цей епізод ілюструє ширший культурний конфлікт — між математикою як ремеслом, майстерністю, таємним знанням і математикою як відкритою наукою.

Фаульгабер цікавився також логарифмами й став першим, хто опублікував праці Генрі Бріггса про логарифми в Німеччині. Крім того, йому приписують перший друкований опис розв'язання задачі рівномірної темперції в музиці⁴⁰ — важливої проблеми музичної теорії строю.

Окрім математичних праць, Фаульгабер глибоко цікавився містикою, астрологією, алхімією та числовою символікою. Він був пов'язаний із розенкрейцерами — духовно-містичним рухом, популярним у німецькій культурі XVII століття. У 1618 році, під час появи Великої комети, він опинився в центрі так званої ульмської кометної суперечки — публічного конфлікту між астрономами та богословами щодо природи небесних знамен. У 1619 році він опублікував *Fama Syderea Nova* («Нова зоряна звістка»), що містила пророцтва, пов'язані з кометою та початком Тридцятирічної війни. Його астрологічна позиція підкреслювала символічне, «божественне» значення астрономічних явищ.

Фаульгабер спілкувався з Йоганном Кеплером і Людо́льф ван Цейленом⁴¹, а, за деякими даними, навіть листувався з Рене Декартом у 1620 році — ймовірно,

⁴⁰ Задача рівномірної темперції — поділ октави на рівні проміжки між звуками, тобто так, щоб кожен півтон мав однакове частотне відношення до сусідніх. Ця проблема виникла в європейській музичній теорії в XVI–XVII ст. і була пов'язана з пошуком способу узгодити гармонічну чистоту інтервалів із можливістю вільної зміни тональностей. Рівномірно темперований стрій (12 рівних півтонів в октаві) став стандартом у подальшій музичній практиці, зокрема в творах Й. С. Баха.

⁴¹ Людо́льф ван Цейлен (нід. *Ludolph van Ceulen*, 1540–1610) — нідерландський математик німецького походження, відомий обчисленням числа π з безпрецедентною для свого часу точністю — до 35 десяткових знаків. Цей результат було вибито на його надгробку в Лейдені. Він викладав у Лейденському університеті та вважається одним із засновників голландської математичної школи початку XVII ст.

обговорюючи алгебраїчні методи розв'язування рівнянь. Цей факт свідчить про його європейську відомість. У 1626 році його називали *Arithmeticus Europae doctissimus* — «найученіший арифметик Європи».

Пітер Роте

Пітер Роте (бл. 1575 — після 1622) — один із представників практичної математики у німецькомовному світі початку XVII століття, тісно пов'язаної з професією міських *Rechenmeister* — учителів лічби і прикладних обчислень. Про нього відомо небагато, проте його праці залишили помітний слід у розвитку європейської алгебри.

Він народився в Нюрнберзі, у сім'ї Генріха Роте. 17 липня 1603 року Пітер одружився з Марією Магдаленою Герольд, дочкою гарматного майстра. Згадується також, що його син, імовірно Пауль Роте, продовжив родинну традицію й теж став *Rechenmeister*.

Головною працею Пітера Роте вважається *Arithmetica Philosophica*, що вийшла 1608 року. Книга поєднувала елементи традиційної прикладної арифметики з питаннями алгебри, зокрема вищої. Роте першим серед німецьких математиків чітко сформулював гіпотезу про те, що многочлен степеня n не може мати більш ніж n коренів — ідею, яка лежить в основі майбутньої основної теореми алгебри.

Він викладав методи розв'язання кубічних рівнянь за Джироламо Кардано, розглядав суми полігональних і пірамідальних чисел, спираючись на праці Йоганна Фаульгабера, з яким, однак, вступив у публічний конфлікт. Причиною стала друга частина його Арифметики, де Роте розкрив методи розв'язання всіх 160 задач із книги Фаульгабера *Arithmetischer Cubicossischer Lustgarten* (1604), у якій сам Фаульгабер подавав лише відповіді, сподіваючись залучати учнів до навчання особисто. Роте, навпаки, прагнув демократизації математичних знань і тому відкрито опублікував методи розв'язання, за що й зазнав різкої критики з боку Фаульгабера. У третій частині своєї книги Роте навіть висунув нові задачі, явно адресовані самому Фаульгаберу — багато з них зводилися до рівнянь четвертого, п'ятого, шостого й сьомого степенів. Примітно, що Роте вірив у можливість їх розв'язання в радикалах — переконання, досить поширене серед алгебраїстів того часу.

До нашого часу дійшов і його більш ранній рукопис 1599 року, який нині зберігається в бібліотеці Колумбійського університету. У ньому Роте викладає розв'язання задач із першого німецького підручника з алгебри — *Coss* Христофа Рудольфа в редакції Міхаеля Штіфеля, демонструючи добре знання алгебраїчної символіки та методів епохи.

Вплив Пітера Роте вийшов далеко за межі Нюрнберга. Його ідеї та методи, особливо пов'язані з поданням многочленів і їхнім розкладанням на множники, справили вплив на Рене Декарта, зокрема під час написання його знаменитої Геометрії (1637). Німецький професор математики Даніель Швентер у своїх Математичних забавах (1636) хвалив Роте за праці про латинські квадрати⁴², що свідчить і про його інтерес до комбінаторики.

⁴² Латинський квадрат — це квадратна таблиця розміру $n \times n$, заповнена n різними символами (наприклад, числами або літерами) так, що кожен символ з'являється рівно один раз у кожному рядку та кожному стовпці. Такі таблиці мають важливе значення в комбінаториці, теорії ймовірностей, криптографії та плануванні експериментів; згодом їх систематично досліджував Леонард Ейлер у XVIII

За словами сучасників, до 1620-х років Роте мав авторитет одного з найерудованіших арифметиків свого часу.

Юст Бюрги

Юст Бюрги (1552–1632) — одна з найзагадковіших і водночас ключових постатей раннього періоду наукової революції. Народився 1552 року в швейцарському Ліхтенштайзі, в Тоггенбурзі, який тоді перебував під юрисдикцією монастиря Санкт-Галлена. Незважаючи на те, що про його ранню освіту майже нічого не відомо, припускають, що він міг навчатися у Страсбурзі, можливо, у Конрада Дазіподія, проте документальних підтверджень цьому не знайдено. Тим не менш, уже за життя Бюрги вважався одним із найкращих механіків і годинників свого часу, справжнім майстром-автодидактом. Ландграф Гессен-Кассельський Вільгельм IV, його покровитель, називав його «другим Архімедом».



З 1579 по 1604 рік Бюрги служив придворним годинником та астрономом у Вільгельма IV у Касселі. Саме там він у 1585 році сконструював перші в історії годинники з секундною стрілкою, що дозволило вимірювати нову одиницю часу — секунду, і тим самим заклав основу для використання годинників як наукових інструментів. Надалі він удосконалив механізми точних годинників, запровадивши так званий хрестовий спуск (cross-beat escapement) та механізм постійної сили (remontoire), що значно підвищило точність хронометрії та зробило можливим вимірювання часу під час астрономічних спостережень.

У 1592 році Бюрги доставив імператору Рудольфу II у Празі виготовлений ним зоряний глобус. Ця подія стала початком його зв'язків із Празьким двором, де він остаточно оселився з 1604 року і працював до 1630 року. У Празі він зблизився з Йоганном Кеплером, і їхня співпраця відіграла важливу роль у розвитку астрономії. Кеплер високо цінував майстерність Бюрги, використовував виготовлені ним інструменти (зокрема секстанти) і писав про його логарифми в передмові до своїх «Рудольфових таблиць» (1627).

Бюрги не лише створював астрономічні інструменти та годинники, а й брав активну участь у наукових дослідженнях. Разом із Ротманом він склав один із перших зоряних каталогів, що містив 121 зірку, причому вперше для визначення координат зірок систематично використовувалося точне вимірювання часу. Він також виготовив механічні моделі руху планет, модель аномалій руху Місяця, механізовані армілярні сфери та небесні глобуси, багато з яких сьогодні зберігаються в музеях Парижа, Цюриха, Касселя, Дрездена та Відня.

Серед його математичних досягнень особливо вирізняються роботи з тригонометрії та логарифмів. Уже до 1586 року Бюрги розробив методи високоточних чисельних апроксимацій синусів, зокрема за допомогою оригінального ітераційного алгоритму, який, як показали сучасні дослідження, дійсно сходиться до істинних значень. У

результаті він склав «Canon Sinuum» — таблицю синусів з кроком у 2 кутові секунди та точністю до 8 знаків. Ця таблиця, за свідченням Кеплера, була найточнішою з відомих на той час, хоча оригінал її втрачено.



Близько 1600 року Бюрги незалежно від Джона Непера прийшов до створення логарифмічних таблиць, спираючись на власні потреби як інженера та астронома. Його таблиці представляли собою таблиці прогресій (аналог сучасних антилогарифмів), і хоча вони не ґрунтувалися на теоретичному понятті логарифмічної функції, тим не менш слугували тим же практичним цілям. За проханням Кеплера він опублікував їх, але лише у 1620 році — через шість років після виходу праці Непера. Через пізню публікацію та менш зручний формат логарифми Бюрги не отримали широкого

розповсюдження, а його внесок надовго був забутий аж до XIX століття. Тим не менше Кеплер прямо вказував, що Бюрги прийшов до цих результатів «за багато років до Непера».

Незважаючи на колосальні заслуги, Бюрги не залишив після себе значних теоретичних трактатів — він був радше практиком і винахідником, «вченим-ремісником», чий вплив проявився у справах, а не в творах. Його праця «Fundamentum Astronomiae», у якій він викладав свої методи, зберігалася в рукописі і лише частково відома за копією, зробленою Кеплером.

Клод Гаспар Баше де Мезеріак

Клод-Гаспар Баше, більш відомий як Баше де Мезеріак (1581–1638), належить до тих учених XVII століття, у яких ще зберігалось ренесансне поєднання гуманістичної культури та інтересу до точних наук. Він народився в Бурк-ан-Бресі, у регіоні Бресс, у родині дрібного дворянства й здобув освіту в єзуїтському коледжі. З ранніх років Баше однаково захоплювався словесністю й математикою, і все його життя минуло в цьому подвійному полі — між поезією та числами, античною філологією й арифметикою.



Сучасники знали його як поета й перекладача. Він писав вірші французькою та латиною, створював вишукані переклади грецьких і латинських авторів, був людиною, глибоко вкоріненою в гуманістичну традицію. У цьому сенсі Баше нагадує багатьох учених своєї епохи — таких, як Франсуа Вієт, який водночас був юристом і реформатором алгебри, або Марен Мерсенн, що поєднував богослов'я, музику та математику. Такі постаті були типовими для початку XVII століття: межі між гуманітарним і природничо-науковим знанням залишалися ще досить проникними, і математику сприймали радше як частину загальної культури, ніж як окрему «професію».

Попри це, саме в галузі математики Баше увійшов в історію. Найбільшу славу йому приніс переклад «Арифметики» Діофанта Александрійського, опублікований 1621 року. До того античний трактат був майже недоступний європейським ученим, і завдяки праці Баше він уперше увійшов у широкий науковий обіг. Саме на примірнику перекладу Баше П'єр Ферма зробив свої знамениті нотатки, зокрема формулювання «Великої теореми Ферма». Таким чином, Баше опинився в центрі однієї з найважливіших ліній розвитку європейської математики XVII століття — передачі античної спадщини новим поколінням учених.

Його власні дослідження були скромніші за масштабом, але не менш цікаві. Баше займався задачами, які пізніше назвуть діофантовими — тобто рівняннями з цілими розв'язками. Він міркував про подання чисел у вигляді сум квадратів і кубів, цікавився порівняннями чисел за модулем. Особливе місце в його математичних заняттях посідали задачі, у яких перетиналися теорія чисел і комбінаторика. Він був одним із перших у Європі, хто запропонував методи розв'язання лінійних діофантових рівнянь із взаємно простими коефіцієнтами, тобто таких, для яких потрібно знайти цілі розв'язки. Сучасники ще не мали строгої алгебраїчної теорії, і подібні міркування значною мірою виникали з практичних завдань.

Цікаво, що інтерес Баше до діофантових рівнянь тісно переплітався з його захопленням магічними квадратами. Конструюючи квадрати непарного порядку, він розробляв функціональні прийоми, які дозволяли задавати закономірний розподіл чисел, і ці самі методи підштовхували його до пошуків розв'язків в арифметиці. Важко сказати, що було первинним — бажання опанувати мистецтво побудови квадратів чи прагнення розв'язувати рівняння, — але в будь-якому разі обидва напрями живили одне одного. Так Баше став одним із перших європейців, хто побачив у магічних фігурах не просто інтелектуальну забаву, а джерело ідей для теорії чисел.

Варто згадати й його книгу «Приємні питання та задачі» (1612) — збірку дотепних головоломок і арифметичних розваг. У цьому він близький до Мерсенна, який також цінував «приємні» задачі, що поєднують гру розуму й серйозне міркування. Баше, як і багато його сучасників, сприймав математику не лише як строгу науку, а й як джерело радості та вправу в витонченості мислення.

Рене Декарт

Рене Декарт (1596–1650) народився в невеликому містечку Лае у Турені, на заході Франції (зараз це місто носить його ім'я — Лае-де-Декарт). Його родина належала до старовинного, хоча й небагатого дворянського роду. Батько, Жоашен Декарт, був радником у парламенті Бретані, людиною шанованою, але часто зайнятою справами й не надто присутньою в житті сина. Мати, Жанна Брошар, померла, коли Рене було всього один рік, і хлопчик залишився на піклуванні бабусі по материнській лінії.



З ранніх років здоров'я Декарта було слабким: він страждав на крихкість і постійні недуги. Саме через це в родині до нього ставилися з особливою турботою і дозволяли більше свободи, ніж іншим дітям. Пізніше він сам зазначав, що ці обставини пробудили в ньому схильність до споглядального способу життя та звичку до тривалих роздумів.

Коли Рене виповнилося десять років, його відправили навчатися до єзуїтського коледжу Ла Флеш — одного з найкращих навчальних закладів Франції того часу. Там він отримав класичну освіту, що включала латину, риторику, філософію та основи математики. Учителі, помітивши його слабе здоров'я, дозволяли йому вставати пізніше за інших учнів — і ця звичка «ранкового роздуму в ліжку» супроводжувала його все життя.

Навчання Рене Декарта в коледжі Ла Флеш (1607–1614) стало важливим етапом його становлення. Коледж був заснований лише кількома роками раніше за ініціативою Генріха IV і швидко здобув репутацію престижного навчального закладу, де єзуїти виховували майбутніх державних діячів і інтелектуалів Франції.



Франс Халс, портрет Рене Декарта, 1648 р.

Навчання тут базувалося на поєднанні суворої схоластичної філософії з практичними дисциплінами. Декарт вивчав латину та давньогрецьку мову, риторику, поетику, класичну літературу. Особливе місце займала філософія Аристотеля в єзуїтській інтерпретації: учнів навчали логічному мисленню та веденню диспутів. У програму також входили основи природознавства та математики.



Саме в Ла Флеш Декарт вперше по-справжньому захопився математикою. За його власними спогадами, усе, що він чув про інші науки, викликало сумнів і здавалося нестійким, а математика приваблювала його ясністю і строгою необхідністю висновків. Вміння переходити від аксіом і визначень до доведень справляло на юного Рене сильне враження. Хоча сам курс математики в коледжі був обмежений арифметикою та елементарною геометрією, саме тут у нього виникло відчуття, що ця наука може слугувати зразком істинного знання. Пізніше він напише: «Особливо подобалася мені математика через достовірність і очевидність своїх доводів, але я ще не бачив її справжнього застосування, а вважав, що вона служить лише ремеслам, і дивувався тому, що на такому міцному й твердому фундаменті не зведено нічого більш високого.»

Проте в шкільні роки Декарт не був старанним учнем. Він рано почав сумніватися в цінності засвоєного матеріалу і шукав знання, які дали б не лише формальну, а й реальну користь для розуміння світу. Пізніше він згадував, що, закінчивши коледж, відчував скоріше невдоволення: він отримав багато відомостей, але мало істинного розуміння. У «Роздумах про метод» він напише: «Я змалку був вихований науками, і оскільки мене переконали, що за їх допомогою можна здобути ясне і надійне пізнання всього корисного для життя, то у мене було надзвичайно велике бажання вивчати ці науки. Але як тільки я завершив курс навчання, що зазвичай закінчувався прийняттям до лав учених, я зовсім змінив свою думку, бо так заплутався в сумнівах і помилках, що здавалося, моїми стараннями у навчанні я досяг лише одного: усе більше й більше переконувався у своєму невіданні. А між тим я навчався в одній із найвідоміших шкіл Європи і вважав, що якщо на землі десь є вчені люди, то саме там вони й повинні бути. Я вивчав там усе, що вивчали інші, і, не задовольняючись наданими відомостями, переглядав усі книги, що потрапляли мені до рук, і у яких трактувалося про найрідкісніші та найцікавіші науки. Разом із тим я знав, що про мене думають інші, і не помічав, щоб мене вважали гіршим за моїх однокласників... Усе це дало мені сміливість судити по собі про інших і думати, що такої науки, якої мене спершу обнадіювали, у світі немає.»



Після закінчення коледжу Ла Флеш у 1614 році Декарт деякий час жив у Парижі, а потім за наполяганням батька вирушив продовжувати освіту в Пуатьє, де вступив до місцевого університету. Там він вивчав право — традиційний вибір для молодих дворян, яким передбачалося або служити при дворі, або зайняти місце в судових і адміністративних структурах. У 1616 році Рене отримав ступінь ліценціата права, що формально відкривало йому шлях до державної кар'єри.

Однак саме заняття юриспруденцією його мало приваблювало. Декарт ставився до права скоріше як до формального обов'язку, а не як до покликання. Його більше цікавили загальні питання устрою знання і пошуки достовірних методів міркування. В університетські роки він почав читати не лише юридичні трактати, а й твори філософів і математиків, зокрема новітні праці, що тоді поширювалися в науковому середовищі.



До цього часу у нього дедалі ясніше формувалося переконання, що істинне знання не можна зводити до авторитетів і традицій. Справжня наука має будуватися на яasnих і безсумнівних засадах, подібних до тих, що існують у математиці. Цей настрій стане для нього відправною точкою на шляху до власного філософського методу.

Після закінчення університету Декарт не пішов юридичною стежкою. Натомість він багато подорожував і шукав свій шлях у житті: «Ось чому, як тільки вік дозволив мені вийти з підпорядкування моїм наставникам, я зовсім залишив книжкові заняття і вирішив шукати лише ту науку, яку міг здобути в собі самому або у великій книзі світу, і витратив залишок моєї юності на подорожі, відвідування дворів і армій, зустрічі з людьми різних характерів і станів, щоб здобути різноманітний досвід, перевіряючи себе у випадках, які посилає доля, і всюди роздумувати над предметами, що зустрічаються, так, щоб отримати якусь користь із цих занять. Бо мені здавалося, що я можу зустріти більше істини в міркуваннях кожного щодо справ, що його безпосередньо цікавлять, ...ніж у кабінетних роздумах освіченої людини ...»



Саме це «мандрівне» десятиліття стало для нього часом формування як мислителя.

Повернувшись, як і багато молодих дворян його кола, він вирушив на військову службу, яка на початку XVII століття давала не стільки бойовий досвід, скільки можливість подорожувати, знайомитися з людьми й розширювати кругозір.

У 1618 році він вступив на службу до Моріца Нассауського, штатгальтера Нідерландів, де отримав звання добровольця в артилерії. Саме тут він познайомився з інженером і математиком Ісааком Бекманом. Це знайомство виявилось доленосним: бесіди з Бекманом пробудили в Декарті думку про те, що математика та точні науки можуть слугувати ключем до розуміння природи. У цей час він пише свій перший науковий твір — невеликий трактат «Compendium musicae» («Звід з музики»), присвячений Бекману.

Невдовзі після цього Декарт переїхав до Баварії і вступив на службу до герцога Максиміліана. У 1619 році він перебував у складі військ, що брали участь у початку Тридцятилітньої війни. Саме тоді, у листопаді 1619 року, у німецькому місті Нойбург-на-Дунає відбулася подія, яку він сам пізніше вважав переломною в своєму житті:

«Я тоді перебував у Німеччині, де опинився призваним у зв'язку з війною, що не закінчилася там і досі. Коли я повертався з коронації імператора до армії, розпочалася зима, яка затримала мене на одній із стоянок, де, позбавлений розважальних співрозмовників і, крім того, не турбований, на щастя, жодними клопотами і

пристрастями, я залишався цілий день один у теплій кімнаті, маючи повний дозвіл віддаватися роздумам. Серед них першим було міркування про те, що часто творіння, складене з багатьох частин і зроблене руками багатьох майстрів, не таке досконале, як творіння, над яким працював один майстер. Так, ми бачимо, що будівлі, задумані і виконані одним архітектором, зазвичай красивіші і краще влаштовані, ніж ті, в реконструкції яких брали участь багато, користуючись старими стінами, побудованими для інших цілей.»

За власними спогадами Декарта, три ночі поспіль його відвідала серія яскравих снів, які він сприйняв як одкровення про своє призначення. У першу ніч йому наснився шторм, від якого він намагався врятуватися в храмі. У другу він бачив вогонь і чув із нього грізний голос, проте не пам'ятав, що цей голос йому сказав. У третю ніч він відкрив уві сні книгу, на першій сторінці якої було написано: «Яким шляхом ти підеш?» Сні супроводжувалися сильними емоційними переживаннями, і в ніч з 10 на 11 листопада філософ витлумачив їх так: його призначення — створити нову систему знання, засновану на ясному методі, який об'єднає всі науки. Він повірив, що саме йому судилося знайти універсальний спосіб пізнання, подібний до математичної строгості, але застосовний до всіх сфер людського розуму.



Від цього моменту Декарт вирішив «...ніколи не приймати за істинне нічого, що я не визнав би таким із очевидністю, тобто ...включати у свої судження лише те, що здається моєму розуму настільки яким і чітким, що ніяк не може викликати сумнів» і дедалі свідоміше спрямовував свої зусилля на пошук «методу», який згодом стане ядром його філософії та науки.

Після «осаяння» в Нойбурзі Декарт остаточно усвідомив, що його шлях лежить не в військовій службі, а в пошуку нового фундаменту знання. Проте він не одразу усамітнівся для роботи: 1620-ті роки стали для нього часом мандрівок по Європі.

Він побував у Німеччині, Австрії, Угорщині, а потім в Італії — у Венеції, Римі та інших містах. Ці подорожі давали йому змогу бачити різні країни, знайомитися з культурою та науковцями, а головне — обмірковувати власні ідеї. На відміну від багатьох ровесників, Декарт не прагнув до придворної кар'єри або військових подвигів: він шукав внутрішньої ясності та методу, який дозволив би об'єднати розрізнені науки.

У 1622 році він ненадовго повернувся до Франції, успадкував частину родового майна і на деякий час оселився в Парижі. Тут він зблизився з колом учених і філософів, серед яких був і знаменитий монах-математик Марен Мерсенн. Саме Мерсенн стане для Декарта важливим посередником у наукових контактах: він поширюватиме його ідеї та буде вести переписку з іншими мислителями Європи.

Проте життя в Парижі Декарту здалося занадто шумним і тривожним. Щоб працювати над філософськими та математичними задумами, йому було необхідне усамітнення та свобода від світських обов'язків. Тому в 1628 році він ухвалив рішення переїхати до Голландії. Ця країна приваблювала його відносною релігійною терпимістю, спокійною атмосферою та можливістю жити подалі від придворної метушні.

Переїзд до Голландії став для Декарта переломним рішенням. Тут він нарешті отримав те, чого шукав багато років — тишу та усамітнення, необхідні для зосередженої роботи. Голландія того часу була порівняно вільною країною, де цінували наукові заняття, і іноземцю, не залученому до політики, жилося спокійно.

Перші роки в Нідерландах він провів у різних містах — у Амстердамі, Лейдені, Утрехті та кількох інших. Декарт часто змінював місце проживання: з одного боку, він шукав тиші та усамітнення, з іншого — прагнув зберегти незалежність і уникати зайвої уваги. Його життя в ті роки мало майже монаший характер: він встав ранку пізно, багато працював удома, спілкувався лише з невеликим колом довірених друзів і вчених.

Саме в цей період почалася інтенсивна розробка того, що згодом стане відомим «методом Декарта». Основна думка полягала в тому, що знання має будуватися не на авторитеті та традиції, а на ясних і безсумнівних принципах, які можна вивести власним розумом. У 1629–1630 роках він пише перші нариси трактату, який мав викласти ці ідеї у систематичному вигляді.

Запланований твір отримав назву «Роздуми про метод» (*Discours de la méthode*). Його структура була незвичайною: це не сухий трактат, а радше інтелектуальна автобіографія. Декарт розповів, як він сам прийшов до переконання, що треба сумніватися у всьому, що не очевидно; як математика надихнула його на пошуки загальної строгості; і як він виробив чотири правила методу — від аналізу до синтезу, від простого до складного, при постійній перевірці ясності міркувань.



Хоча «Роздуми про метод» вперше побачать світ лише у 1637 році, саме в ці перші голландські роки оформлюється його задум — створити філософію нового типу, в якій математика стане зразком для всіх наук.

Книга була написана не латиною, як було прийнято серед учених, а французькою мовою, що одразу зробило її доступною ширшій публіці. Це був сміливий крок:

Декарт хотів, щоб його ідеї читали не лише університетські професори, а й освічені люди поза академіями.

«Роздуми про метод» починаються як особиста історія: автор пояснює, чому він розчарувався у традиційній освіті, як прийшов до необхідності сумніватися у всьому і як на цій основі сформулював свій метод. У центрі — знаменитий принцип: визнавати істинним лише те, що здається розуму ясным і чітким. З цього підходу Декарт виводить можливість побудови нової науки, заснованої на розумі, а не на авторитеті. Особливу цінність для історії математики мали три додатки до «Роздумів»: «Діоптрика» (про оптику), «Метеори» (про природні явища) і найважливіше — «Геометрія».

Поява «Геометрії» справила на сучасників подвійне враження. З одного боку, стиль викладу Декарта був досить складним: він писав не як шкільний учитель, а як людина, що ділиться своїми відкриттями майже «для посвячених». Багато міркувань залишалися стислими й вимагали зусиль для розуміння. З іншого боку, у математичному середовищі швидко стало зрозуміло: це справжній переворот.

Головна новизна полягала в тому, що Декарт вперше показав, як алгебраїчні рівняння можна пов'язати з геометричними лініями. Пряма, коло, парабола, еліпс і гіпербола — усі вони отримали опис за допомогою рівнянь. Це відкрило шлях до того, щоб досліджувати фігури не лише «на око» або за допомогою побудов, а й засобами обчислень.

Надзвичайно важливе значення мала ідея координат: кожную точку на площині можна задати числами. Сьогодні ми називаємо це декартовою системою координат, і важко уявити математику та фізику без неї. Але в 1637 році це був новаторський спосіб пов'язати простір і числа.

Сам Декарт не поспішав розвивати всі наслідки свого методу, але його ідеї швидко підхопили інші. Велику роль відіграв голландський математик Франс ван Схоотен, який уже у 1649 році видав латинський переклад «Геометрії», доповнивши його детальними коментарями. Завдяки цьому перекладу ідеї Декарта стали доступними широкій європейській аудиторії. Серед читачів і послідовників опинився й молодий Ісаак Ньютон, який пізніше визнавав значення методів Декарта для власних досліджень.

Таким чином, «Геометрія» стала тим мостом, який поєднав класичну математику античності та середньовіччя з новою наукою Нового часу. Внесок Декарта і його «Геометрії» у розвиток математики добре характеризує така цитата з твору: «І я сподіваюся, що наші нащадки будуть вдячні мені не лише за те, що я тут пояснив, а й за те, що я свідомо опустив, щоб вони могли з задоволенням винайти це самі».

У 1640-ті роки Декарт дедалі більше зосереджується на філософії, прагнучи надати своїм науковим та методологічним ідеям міцний метафізичний фундамент.

У 1641 році в Парижі виходить одна з його головних праць — «Роздуми про першу філософію» (*Meditationes de prima philosophia*), написана вже латиною, мовою наукового світу. Тут він послідовно розвиває принцип методичного сумніву: відкидає все, що може викликати найменший сумнів, щоб дійти до абсолютно безсумнівної істини. Цією істиною стає знаменитий *cogito, ergo sum* («мислю, отже існую»). На цій основі він будує докази існування Бога і стверджує, що саме божественна гарантія достовірності забезпечує істинність ясних і чітких ідей.

«Роздуми» викликали жваву дискусію. Декарт спеціально розіслав рукопис своїм сучасникам, щоб вони написали заперечення, а потім опублікував їх разом зі своїми відповідями. Серед опонентів були й відомий філософ-теолог Антуан Арно, і англійський учений Томас Гоббс. Ця полеміка зробила твір Декарта ще більш відомим і зміцнила його авторитет у філософському світі.

Після цього він пише «Початки філософії» (*Principia philosophiae*, 1644), у яких намагається викласти свою систему вже у формі підручника — ясного, логічного, крок за кроком. Тут він поєднує метафізику з фізикою, пояснюючи устрій світу як механічну систему, що підкоряється математичним законам. Для Декарта Всесвіт — це не хаос, а впорядкований простір, де рух тіл можна описати так само строго, як лінії на площині.

Таким чином, у 1640-ті роки Декарт стає фігурою європейського масштабу — як філософ, так і вчений. Його ідеї про метод, сумнів, розум і математичну природу світу поширюються по всій Європі, викликаючи і захоплення, і критику.

У останні роки життя Декарт дедалі більше цінує усамітнення і намагається триматися подалі від шумних інтелектуальних баталій. Проте його слава була такою великою, що навіть монархи прагнули запросити його до двору.

У 1649 році шведська королева Крістіна, освічена і захоплена філософією правительки, вирішила запросити Декарта до Стокгольма, щоб він допоміг їй у науках. Довгий час філософ вагався: йому було вже понад п'ятдесят, він звик до тихого життя в Голландії і не прагнув до придворних обов'язків. Але зрештою погодився і відправився до Швеції.

Прибувши до Стокгольма наприкінці 1649 року, Декарт опинився в зовсім нових умовах. Королева Крістіна, що любила ранні підйоми, призначила свої уроки філософії на п'яту ранку. Для Декарта, який усе життя встав пізно і працював у усамітненні, це було тяжким випробуванням. Крім того, суворий скандинавський клімат виявився згубним для його здоров'я, ослабленого з дитинства.

Взимку 1650 року він застудився, захворів на запалення легень і 11 лютого 1650 року помер у віці 53 років. Його смерть стала несподіваною і болісною втратою для європейської науки.

Спочатку його поховали у Стокгольмі, але через шістнадцять років, у 1666 році, його останки перевезли до Франції. Пізніше, вже у XVIII столітті, їх перепоховали в Парижі, у церкві Сен-Жермен-де-Пре, де вони покоються й сьогодні.

Теорія чисел

У XVII столітті теорія чисел почала виходити з тіні прикладної математики й ставати самостійною галуззю досліджень. Головну роль у цьому процесі відіграли французькі математики, об'єднані навколо листування з П'єром Ферма. Цю умовну «французьку групу» складали Жіль де Роберваль, Клод де Бессі, Жак де Бії, Марен Мерсенн і частково Рене Декарт та Блез Паскаль. Їхні обговорення, а згодом і переписка з англійськими вченими Джоном Валлісом, Вільямом Браункером, а також з голландцями Християном Гюйгенсом і Франсом ван Схоотеном заклали основу міжнародного математичного спілкування в ранній Новий час.

Центральною фігурою серед французів став П'єр Ферма (1601–1665). Він не лише одним із перших поставив у центр уваги чисту арифметику, а й запропонував методи доведення, що стали класичними. Особливо важливим був його метод нескінченного спуску, який представляв ранню форму доведення від протилежного за принципом мінімального елемента: передбачається, що рівняння має розв'язок, з нього виводиться менший розв'язок, потім ще менший, і так далі, що неможливо для натуральних чисел.

Прикладом такого підходу стало доведення, що рівняння $x^4 + y^4 = z^4$ не має розв'язків у натуральних числах, що фактично стало першим кроком до більш загальної Великої теореми Ферма.

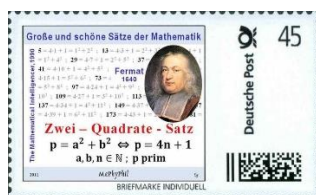
Ферма та його сучасники проявляли особливий інтерес до простих чисел, припускаючи, що за їхнім розподілом приховані закономірності. Ферма висловив гіпотезу, що числа виду $F_n = 2^{2^n} + 1$ є простими для будь-якого натурального n . Такі числа пізніше стали називатися числами Ферма. Проте ця гіпотеза незабаром була спростована: вже $F_5 =$

4294967297 не є простим. Паралельно Мерсенн досліджував числа виду $M_p = 2^p - 1$, де p — просте число. Такі числа, нині відомі як числа Мерсенна, привертати увагу через зв'язок із досконалими числами. Мерсенн склав список простих p , для яких M_p також просте, але припустився помилок, що були виявлені лише через століття.

На полях екземпляра «Арифметики» Діофанта Ферма залишив знамениту приписку: «Я відкрив по-справжньому чудове доведення того, що рівняння $x^n + y^n = z^n$ не має розв'язків у натуральних числах при $n > 2$, але поля цієї книги надто малі, щоб його помістити».

Це формулювання увійшло в історію як Велика теорема Ферма і породило цілу математичну традицію. Хоча Ферма справді довів випадок $n = 4$ (використавши свій метод нескінченного спуску), його загальне доведення так і не було знайдено — якщо воно взагалі існувало. Теорема залишалася недоведеною понад три століття, поки її остаточно не довів Ендрю Уайлс у 1994 році.

Ферма багато займався розв'язаннями невизначених рівнянь, особливо рівнянь у цілих числах і раціональних дробах. Його цікавило, наприклад, у яких випадках ціле число можна подати у вигляді суми двох квадратів. Він показав, що просте число p можна подати як $p = x^2 + y^2$ тоді й тільки тоді, коли $p \equiv 1 \pmod{4}$. Це призвело до розвитку уявлень про квадратичні форми і поклало початок майбутній теорії чисел, розвиненій у XIX столітті Лагранжем, Гаусом і Діріхле.



Ферма також передбачив розв'язання деяких рівнянь Пелля, виду $x^2 - D y^2 = 1$, хоча не дав загального методу. Такі задачі обговорювалися й у переписці з англійськими та голландськими математиками, особливо після того, як Валліс зацікавився арифметикою Ферма.

Ферма досліджував і рівняння, розв'язки яких потрібно було шукати не у цілих числах, а у раціональних. Це наближає його дослідження до пізніших алгебраїчних підходів. Він довів, наприклад, що рівняння $x^3 + y^3 = z^3$ не має розв'язків у ненульових раціональних числах — по суті, це одна з ранніх формулювань випадку теореми Ферма для $n = 3$.

Крім того, Ферма сформулював і довів (у часткових випадках) так звану малу теорему Ферма: якщо p — просте число і a — ціле число, не ділиться на p , то $a^p - 1 \equiv 1 \pmod{p}$.

Це твердження стало наріжним каменем теорії лишків і вплинуло на розвиток модульної арифметики, ставши основою для подальшого створення теорії Ейлера та Лежандра.

П'єр де Ферма

П'єр Ферма народився 17 серпня 1601 року в місті Бомон-де-Ломань, розташованому на південному заході Франції, в області Гасконь. Його сім'я належала до заможного міщанства: батько, Домінік Ферма, займався торгівлею шкірами й мав повагу в місті, а

мати, Клер де Лонг, походила з багатой родини. П'єр не був дворянином за походженням, але зростав у достатку, що дало йому змогу отримати хорошу освіту.



Роллан Лефевр. Портрет П'єра Ферма

Про дитячі роки майбутнього математика відомо небагато, проте очевидно, що він із раннього віку виявляв видатні здібності. Початкову освіту здобув у місцевій школі в Бомоні, після чого продовжив навчання в Тулузі та Орлеані. Уже тоді проявив схильність до мов і гуманітарних наук — вільно володів латиною, грецькою та італійською, цікавився античною літературою й юриспруденцією. Це гуманітарне підґрунтя стало важливою частиною його подальшого життя: Ферма завжди поєднував інтерес до права, служби та класичної культури з незвичайним математичним талантом.

Після перших років навчання П'єр Ферма продовжив освіту в Тулузі, де вивчав гуманітарні та юридичні дисципліни. Відтоді він почав підписуватись як «де Ферма» — що відображало його новий соціальний статус. Згодом переїхав до Орлеана, щоб завершити юридичну освіту в одному з престижних університетів Франції. Там він здобув ступінь із цивільного права й невдовзі посів посаду в парламенті Тулузи — місцевому вищому судовому органі.

Робота юриста визначала зовнішній бік життя Ферма: він був шанованим службовцем, належав до кола заможних і освічених городян, брав участь у громадських справах. Проте, окрім служби, його не покидала пристрасть до науки. Саме в ці роки у Ферма дедалі яскравіше проявляється інтерес до математики — спершу як до інтелектуального захоплення, а потім як до справи всього життя.

До європейських наукових кіл Ферма увійшов незвичним шляхом — не через кафедри й академії, а через листування. У 1630-х роках він встановив контакт із Мареном Мерсенном, келія якого перетворилася на своєрідний поштовий вузол європейської науки. До Мерсенна надходили листи від Роберваля, Паскаля, Декарта, Галілея, Торрічеллі, англійців Волліса та Браункера. Через нього й Ферма став учасником цього «невидимого університету», де задачі, гіпотези й виклики передавалися від одного математика до іншого. Сам Ферма майже не публікувався, і майже все, що ми знаємо

про його відкриття, збереглося саме завдяки його листам, розісланим друзям і колегам, а згодом опублікованим Мерсенном і пізніше його сином.

Особливо драматично склалися стосунки Ферма з Рене Декартом. У 1637 році, одразу після виходу «Діоптрики», Ферма в приватному відгуку різко її розкритикував. Декарт не пробачив цієї зухвалості. Він відповів нищівним розбором методу Ферма для знаходження максимумів, мінімумів і дотичних, навіть натякнувши на плагіат: мовляв, «відкриття» Ферма — лише невдала переробка ідей, уже викладених у «Геометрії». Біда була ще й у тому, що сам Ферма пояснював свій метод занадто стисло й недбало — з його нотаток не завжди було зрозуміло, як саме він міркує.

Декарт вирішив поставити опонента в глухий кут і запропонував задачу: провести дотичну до особливої кривої, нині відомої як «лист Декарта». Але Ферма без зволікання знайшов одразу два правильні розв'язки. Один точно відповідав його власному методу, другий — побудований у дусі «Геометрії» Декарта. І при порівнянні виявилось: метод Ферма не лише правильний, а й значно простіший. За розвитком суперечки спостерігали й інші математики. Жерар Дезарг, який виступив посередником, визнав: суть методу Ферма бездоганна, але виклад справді заплутаний. Після цього Декарту довелося вибачитися, хоча до кінця життя він ставився до суперника з неприхованою неприязню. Цей епізод чудово ілюструє суперечливий дух епохи — нові методи народжувалися в постійних суперечках, де науковий аргумент часто переплітався з особистим самолюбством.



Подальше життя Ферма, попри зовнішню скромність, також було не без примітних епізодів. У 1652 році його навіть «поховали заживо»: Європою розійшлася звістка про смерть Ферма під час чуми. Насправді він справді тяжко захворів, але вижив; більш того, загибель низки колег відкрила йому шлях до найвищої посади в парламенті Тулузі.

Останні десятиліття життя Ферма минули в Тулузі, у звичній для нього ролі судді парламенту й ученого-аматора. Хвороби дедалі частіше давалися взнаки: напади подагри й тяжкі наслідки чуми підточували здоров'я. Проте, незважаючи на це, він продовжував листування й час від часу повертався до улюблених числових задач. Саме в цей період з'явилися його найсміливіші здогади з теорії чисел — багато з них залишалися без доведення, але стали джерелом натхнення для майбутніх поколінь.

Ферма не прагнув ні кафедри, ні паризької слави, задовольняючись тихим життям у Тулузі. У 1650–1660-х роках він, здавалося, усе більше замикався в собі: лише зрідка листувався, ще рідше виїжджав у інші міста. Запланована на 1660 рік зустріч із Блезом Паскалем так і не відбулася: обидва вчені були надто хворі, щоб вирушити в дорогу.

У 1665 році Ферма остаточно відійшов від справ і перебрався до Кастра, де жили його діти. Тут він і помер у січні 1665 року, залишивши по собі не книги, а стоси зошитів і листів, сповнених дивовижних відкриттів і недомовлених ідей.

Ферма, на відміну від Декарта чи Ньютона, не прагнув побудувати систему натурфілософії чи пояснити будову світу загалом. Він займався чистою математикою —

і саме в цьому сенсі увійшов в історію як перший по-справжньому великий «чистий» математик нової Європи.

Наукові інтереси Ферма були водночас надзвичайно широкими й дивовижно цілісними: майже всі вони оберталися навколо чистої математики. На відміну від багатьох сучасників, він не прагнув до систематичних трактатів і не мріяв про гучну славу. Його відкриття поширювалися Європою через листи: короткі нотатки, іноді — задачі-«головоломки», а подекуди — лише натяки на метод, який співрозмовникам доводилося розгадувати.

Незалежно від Декарта Ферма дійшов ідеї аналітичної геометрії: він запропонував описувати криві рівняннями за допомогою координат. Для нас це звучить природно, але у XVII столітті це було справжньою революцією. Досліджуючи криві, Ферма розробив прийоми, які фактично передбачали виникнення диференціального числення. Він умів знаходити дотичні, обчислювати площі під кривими, визначати максимуми й мінімуми функцій. Те, що в Ньютона й Лейбніца стало цілісною системою аналізу, у Ферма було набором дотепних методів — розрізнених, але напрочуд плідних. Недарма Ньютон пізніше зізнався: саме роботи Ферма стали для нього поштовхом до створення математичного аналізу.

Ферма висловив знаменитий «принцип найменшого часу»: промінь світла обирає шлях, на який витрачає мінімум часу. Цей принцип став наріжним каменем оптики й одним із перших прикладів застосування варіаційних методів у фізиці. А в листуванні з Паскалем вони започаткували цілком нову галузь — теорію ймовірностей. Їхні міркування про картярські ігри й ставки стали першим кроком до математики випадкового, без якої неможливо уявити сучасну науку чи економіку.

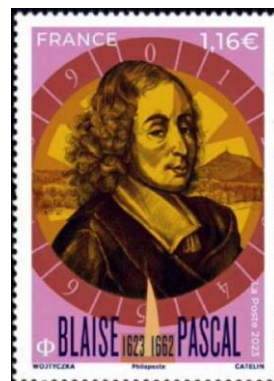
Та найпалкішою пристрастю Ферма залишалася арифметика. Він любив грати з простими числами, формулювати сміливі здогади й пропонувати їх колегам. Саме він увів метод нескінченного спуску — новий спосіб строгого доведення в теорії чисел. Йому належить знаменита теорема про подання простих чисел, рівних одиниці за модулем 4, у вигляді суми двох квадратів. І, звісно, не можна не згадати його «Велику теорему», написану на полях «Арифметики» Діофанта: для показників, більших за два, рівняння $x^n + y^n = z^n$ не має ненульових цілих розв'язків. При цьому Ферма багатозначно додав: «У мене є справді чудове доведення, але поля тут надто вузькі, щоб його вмістити». Доведення Ферма так ніхто й не знайшов, і лише через більш ніж три століття, наприкінці XX століття, теорему Ферма остаточно довів Ендрю Вайлс.

Блез Паскаль

Блез Паскаль народився 19 червня 1623 року в Клермон-Феррані, у родині Етьєна Паскаля⁴³ — юриста за освітою, людини надзвичайно освіченої та захопленої науками.

⁴³ ¹ На честь Етьєна Паскаля названа «улітка Паскаля» (limacon of Pascal) — плоска алгебраїчна крива четвертого порядку, що є конхойдою кола, полюс якої лежить на самій цій колі. Вона може набувати різних форм — від замкненої кривої без самоперетину до кардіоїди чи кривої з петлею — залежно від параметрів рівняння. Криву вперше розглядав Альбрехт Дюрер у 1525 році, називаючи її «арахною» (Arachne, «лінією павука»), а згодом, у 1630 році, її дослідив Етьєн Паскаль. Остаточну назву — «улітка Паскаля» — дав у 1650 році Жиль Роберваль на честь Етьєна Паскаля.

Мати Блеза померла, коли хлопчикові було всього три роки, і турбота про нього та його старших сестер лягла майже повністю на плечі батька. Етьєн Паскаль рано виявив інтерес до науки й був знайомий із найновішими відкриттями свого часу, тож саме він став для сина першим і головним наставником.



Методи виховання, яких він дотримувався, заслуговують на особливу увагу. Етьєн уважав, що навчання має відповідати природному розвитку дитини, й намагався не перевантажувати її занадто ранніми заняттями. Він особливо остерігався, що математика — зі своєю спокусливою простотою й ясністю — може захопити розум хлопчика раніше, ніж той опанує словесні й гуманітарні дисципліни. На його переконання, дитині слід було спершу зміцнитися в мовах, літературі та класичній освіті, а вже потім переходити до точних наук.



Тому в домі Паскалів математика була, так би мовити, «забороненим плодом». Блезові забороняли читати спеціальні книги, а батько уникав розмов про геометрію. Але саме це лише розпалювало цікавість хлопчика. Він почав таємно від батька міркувати про фігури, креслити на підлозі та стінах лінії, намагаючись самостійно зрозуміти їхні властивості. Поступово він відкрив для себе основи геометрії — визначення кола, прямої лінії, властивості трикутників. Джерела розповідають, що одного разу батько застав його за самостійними міркуваннями про те, що сума кутів трикутника дорівнює двом прямим, і був вражений серйозністю та правильністю цих висновків.

Переконавшись у неабияких здібностях сина, Етьєн змінив свою позицію. Він зрозумів, що утримувати хлопчика від занять математикою безглуздо, і вирішив спрямувати його інтерес. Відтоді Блез отримав доступ до книжок Евкліда й почав систематично вивчати геометрію. Надалі саме ця рання самостійність у відкритті законів математики стала визначальною рисою його мислення: Паскаль не стільки повторював готові істини, скільки прагнув відкривати їх сам.

У 1631 році Етьєн Паскаль разом із дітьми переїхав до Парижа. Там він приєднався до гуртка абата Марена Мерсенна, у якому збиралися найкращі математики й філософи

того часу — Декарт, Ферма, Роберваль, Дезарг. Блез, хоча й був ще підлітком, швидко опинився в центрі уваги: його ясність розуму та незвичайний талант вражали досвідчених учених.

Його ранні успіхи в математиці були приголомшливими. У шістнадцять років він написав трактат про конічні перетини, де сформулював знамениту «теорему Паскаля» про шестикутник, вписаний у коніку. Наставники були вражені: така праця цілком могла б належати досвідченому математику, а не юнакові.

Невдовзі його увагу привернула практична задача. Етьєн Паскаль, який отримав посаду інтенданта в Руані, мав вести складні фінансові розрахунки з податків і зборів. Виснажлива трудомісткість цих підрахунків змучувала його, і син вирішив допомогти. Так народилася ідея механічної лічильної машини, яка могла б автоматично додавати й віднімати числа.

Робота над пристроєм забрала у Паскаля кілька років. Перша версія була готова до 1642 року, і юний винахідник продовжував її вдосконалювати. Машина, пізніше названа «Паскаліною», являла собою скриньку з рядами обертових коліщат. Кожне колесо відповідало одній десятковій розрядній позиції: коли воно поверталось на десять поділок, відбувався автоматичний перенос на наступне колесо. Таким чином, машина реалізовувала принцип позиційного запису чисел і виконувала додавання та віднімання механічно — без помилок і втоми.



Паскаль виготовив кілька екземплярів, залучаючи майстрів-годинників. Батько підтримував його починання і навіть вклав значні кошти, сподіваючись, що машина знайде попит серед нотаріусів, фінансистів і збирачів податків. Справді, кілька екземплярів вдалося подарувати або продати — зокрема королю Людовику XIV та знатним вельможам. Проте практична сторона підвела: пристрій був надто дорогим у виготовленні й крихким у роботі. Складність механізму та відсутність масового виробництва зробили його непридатним для широкого використання. У результаті підприємство виявилось збитковим: кошти, вкладені Етьєном Паскалем, не окупилися.

Втім, труднощі були пов'язані не лише з технічним боком справи. Паскалю довелося зіткнутися і з опором соціального середовища. Бухгалтери та писарі, чия робота полягала саме в рутинних арифметичних підрахунках, сприйняли новинку як загрозу

своєму становищу. Ходили чутки, що машина може позбавити їх заробітку, і вони фактично влаштували бойкот винаходу — не хотіли користуватися «механічним конкурентом». Зрештою єдиним постійним користувачем «Паскаліни» залишився її головний натхненник — Етьєн Паскаль, для якого цей пристрій і створювався.

Після смерті Паскаля-старшого справа не дістала розвитку. Лише у XVIII столітті механічні арифмометри почали вдосконалюватися та знаходити своє місце серед тих, кому потрібно було рахувати багато і швидко: у моряків, артилеристів, природознавців. Фінансові ж установи, де винахід міг би бути особливо корисним, дивовижно довго зберігали байдужість — фактично до середини XIX століття, майже двісті років після перших дослідів Блеза Паскаля.

Невдачі з «Паскаліною» не зупинили Блеза Паскаля. Незабаром його інтереси змістилися до природничих наук. У середині 1640-х років він проводив знамениті досліди з атмосферним тиском, продовжуючи дослідження Торрічеллі. Паскаль доручив своєму швагрові піднятися з ртутним барометром на вершину Пюї-де-Дом. Вимірювання підтвердили його здогад: вага повітря змінюється з висотою, а отже, атмосфера справді тисне на нас своєю важкою повітряною колоною. Ці досліді відкрили нову епоху у фізиці.

Однак незабаром здоров'я Паскаля різко погіршилося. Постійні головні болі й слабкість прикували його до дому. Лікарі, не знаючи, чим допомогти, радили хоча б «розважатися й відволікатися». Так він познайомився з шевальє де Мере — дотепним гравцем і завсідником салонів, який захоплювався азартними іграми в кості й карти. Де Мере розповідав про свою «систему» виграшу: він стверджував, що якщо кинути кістку чотири рази, то хоча б один раз обов'язково випаде шістка. Його впевненість викликала у Паскаля запитання, якого до нього ніхто не ставив: чи можна з математичною точністю обчислити ймовірність випадкового результату?



До Паскаля випадковість сприймалася як царина долі, примхи фортуни або гра надприродних сил. Давні могли тлумачити знаки, пророкувати результат за жеребом, але сама думка про те, що ймовірність можна обчислювати, була чужою їхньому світогляду. Паскаль же насмілювався кинути виклик самій ідеї випадковості: він почав розглядати гру не як «волю долі», а як задачу, підвладну розумові.

Розв'язуючи подібні задачі, Паскаль звернувся до побудови, яку сьогодні називають трикутником Паскаля. У цьому числовому устрої, де кожен ряд починається і закінчується одиницею, а кожне внутрішнє число дорівнює сумі двох чисел над ним, Паскаль побачив спосіб обчислювати ймовірності випадання тих чи інших комбінацій. Разом із П'єром Ферма він заклав основи нової науки — теорії ймовірностей.

Роздуми над іграми в кості та карти стали лише першим кроком. Згодом Паскаль зрозумів, що йдеться не тільки про ігри — ймовірність можна застосовувати для оцінки будь-яких рішень і виборів. Саме звідси виросла теорія прийняття рішень: якщо несприятливий результат має вкрай малу ймовірність, можна діяти, не надто боячись його. Ідея здавалася простою, але її наслідки виявилися величезними: вона стала одним

з інтелектуальних джерел сучасної економічної науки, де поведінку людей розглядають через оцінку ризиків і вигод.

Багато років Паскаля мучив нестерпний зубний біль. Під час одного з таких нападів, намагаючись відволіктися від страждань, він узявся за інтелектуальну вправу — задачу про лотерею.

Йшлося про найпростішу гру: розігрувалося 36 квитків, серед яких був один виграшний. Паскаль міркував, якою є ймовірність успіху і як правильно розподілити ставки, щоб гра була справедливою. Його цікавила не лише сама ймовірність виграшу (1 до 36), а й співвідношення між розміром ставки та можливим виграшем. Щоб гра здавалася чесною, виграш мав точно компенсувати малу ймовірність успіху.

Саме під час цих обчислень народилася ідея, що згодом набула власного життя: гра, у якій учасник робить ставку на одне з 36 чисел, а виграш у разі вгадування дорівнює ставці, помноженій на 36. Пізніше ця схема перетворилася на відоме колесо рулетки — гру, що й досі зберігає головні риси паскалевих міркувань: колесо з секторами, ставка на число і заздалегідь розраховане математичне сподівання виграшу.

Для Паскаля ж ці роздуми не були розвагою. Це був спосіб продовжити дослідження того, що він сам називав «геометрією випадкового» — застосування строгої математики до, здавалося б, непередбачуваних явищ. Навіть зубний біль не заважав його розуму шукати закономірності там, де інші бачили лише примху удачі.

Однак незабаром Паскаль відійшов від математики та природознавства. Його здоров'я дедалі більше погіршувалося, і увага все частіше зверталася до питань філософії та віри. У 1654 році стався переломний момент — так зване «нічне навернення», коли Паскаль пережив глибоке релігійне одкровення. Відтоді він приєднався до янсеністського руху⁴⁴, пов'язаного з монастирем Пор-Рояль, і став одним із його найпалкіших захисників.



У 1656–1657 роках він написав знамениті «Листи до провінціала» — блискучі за стилем і дошкульні за змістом полемічні твори, у яких захищав янсеністів від нападок єзуїтів. Ці листи мали величезний вплив не лише на богословські суперечки, а й на розвиток французької літератури: Паскаль показав, як можна викладати філософські та теологічні аргументи ясно, дотепно й доступно широкій публіці.

Його останній великий твір — «Думки» (*Pensées*) — залишився незавершеним. Паскаль готував апологію християнства, але сили були на межі. У цих нотатках, опублікованих уже після його смерті, він розмірковував про велич і нікчемність людини, про розум і

⁴⁴ Янсенізм — богословський і морально-аскетичний рух у католицькій церкві XVII–XVIII століть, заснований на вченні голландського теолога Корнелія Янсена. Янсеністи наголошували на божественній благодаті, передвизначенні, внутрішній побожності та суворій моральності, виступали проти казуїстики та гнучкої моралі єзуїтів. Центром руху у Франції став монастир Пор-Рояль.

серце, про свободу і необхідність віри. Саме тут міститься знамените «Парі Паскаля» — мисленнєвий експеримент, у якому він застосував принципи теорії ймовірностей до питання про існування Бога.

«Парі Паскаля» посідає особливе місце у спадщині мислителя. Це не математичне доведення існування Бога — Паскаль і не ставив такої мети. Радше це розмірковування, у якому він застосував до релігійного питання ті самі принципи, що нещодавно використовував у теорії ймовірностей та прийнятті рішень.

Логіка міркування проста. Людина має вибір: вірити в Бога чи не вірити. Але який вибір раціональніший? Якщо Бог існує, то віруючий здобуває безмежне благо — спасіння і вічне життя. Той, хто не вірив, втрачає все. Якщо ж Бога немає, віруючий втрачає небагато — лише деякі земні задоволення, пов'язані з релігійними обмеженнями, — а невіруючий отримує тільки ці скінченні насолоди. Отже, якщо розглядати це як ставку, вибір на користь віри виявляється незмірно вигіднішим: у разі помилки людина майже нічого не втрачає, а в разі істини — виграє все. Паскаль писав, що в умовах невизначеності треба діяти так, як чинить гравець в азартній грі: оцінювати не лише можливі результати, а й ймовірність їх настання.

У цьому й полягає новаторство «парі Паскаля». Давні вважали віру справою традиції, одкровення чи особистого вибору. Паскаль же вперше застосував мову раціонального розрахунку, переніс у сферу релігії те, що відкрив у грі з кістками та картами: поняття ймовірності та очікуваного виграшу. Так народився парадоксальний аргумент — рішення щодо вічних питань можна приймати за допомогою майже економічного аналізу.



Сам Паскаль розумів, що віра не зводиться до чистої логіки: «серце має свої доводи, яких розум не знає». Але його «парі» стало інтелектуальним викликом і справило глибокий вплив на філософію та культуру Європи. Пізніше саме в цьому міркуванні побачили зародження нового типу мислення — раціонального аналізу ризику, що поєднує математику, філософію й практичне життя.

У 1661 році, за рік до своєї смерті, Паскаль разом із друзями започаткував проект, який цілком справедливо можна вважати одним із перших у Європі прикладів акціонерного товариства. Йшлося про організацію регулярних міських перевезень у Парижі. Доти карети були розкішшю для знаті й заможних містян — їх наймали лише у виняткових випадках. Паскаль же запропонував ідею «загальних карет» — екіпажів із фіксованим маршрутом і сталою ціною, доступною для ширшого кола людей.



Для реалізації задуму було створено підприємство, поділене на частки, які можна було придбати, ставши співвласником справи. По суті, це була рання форма акціонерного товариства: ризики й витрати розподілялися між інвесторами, а прибуток залежав від кількості пасажирів.

«Загальні карети» почали курсувати Парижем у січні 1662 року. Маршрути поєднували важливі райони міста: від Люксембурзького палацу до Лувру, від Сен-Антуанських воріт до Сент-Оноре. Ціна проїзду становила п'ять су — помірна сума, хоч і не цілком доступна для бідняків. Проект одразу викликав зацікавлення і навіть захоплення: сучасники відзначали, що ідея зробила місто більш «згуртованим», дала змогу швидше пересуватися у справах і сприяла спілкуванню між людьми.

Однак не обійшлося без труднощів. Паризькі візники, які втратили частину клієнтів, були невдоволені й влаштовували протести. Незабаром з'ясувалося, що рентабельність підприємства залежить від сталого пасажиропотоку, який виявився нестабільним. До того ж мешканці ставилися до нововведення з обережністю: далеко не всі хотіли сідати в одну карету з незнайомцями.



Попри ці перешкоди, сама ідея виявилася надзвичайно плідною. Паскаль і його соратники заклали основу регулярного громадського транспорту. Їхнє акціонерне товариство стало зразком для майбутніх транспортних компаній і показало, що спільні інвестиції дають змогу реалізовувати великі проекти, недосяжні для одинаків.

Блез Паскаль помер 19 серпня 1662 року, не доживши й до сорока. Його життя було коротким, але дивовижно насиченим: він залишив слід у математиці, фізиці, філософії, літературі і навіть у перших кроках обчислювальної техніки. У ньому ніби поєдналися

дух винахідника, суворого науковця і мислителя, зверненого до вічних питань людського буття.

Комбінаторика і теорія ймовірностей

До XVII століття ймовірність залишалася сферою інтуїції, передчуттів і забобонів. Давні греки вірили у волю богів, а римляни — у фатум, долю. Навіть в азартних іграх, де, здавалося б, можна було спиратися на частоту випадань, ніхто не намагався робити строгих розрахунків. У добу Середньовіччя погляди на випадковість не змінилися: вважалося, що кидок гральної кості — це справа Божого провидіння.

Рідкісні спроби описати числові закономірності в іграх траплялися лише епізодично. Наприклад, Лука Пачолі у своїй «Сумі арифметики, геометрії, вчення про пропорції та відношення» (1494) згадував задачі про шанси в грі в кості, але не дав загальних правил обчислення. У XVI столітті до подібних питань намагався підійти Джероламо Кардано — він залишив рукопис, де описав ймовірнісні принципи гри, але її було опубліковано лише після його смерті. Усе змінилося в середині XVII століття.

Революція почалася з азартного гравця. Французький дворянин і літератор шевальє де Мере (1607–1684) мав схильність до карткових і кісткових ігор і якось поставив цілком практичне запитання: чому в деяких іграх за рівних ставок виграші здаються несправедливими? Пояснення він попросив у свого знайомого — Блеза Паскаля.

Паскаль замислився: чи можна розрахувати ймовірність із математичною точністю? Він був першим, хто наважився кинути виклик самій долі. До нього ніхто не сприймав випадок як щось, що піддається логічному аналізу. Але Паскаль був не один — він вступив у листування з П'єром Ферма. Разом вони заклали основи теорії ймовірностей.

Одна з задач, які обговорювали Паскаль і Ферма, стосувалася розподілу ставок між двома гравцями, якщо гру раптово перервано. Наприклад: грають до трьох перемог, але в момент зупинки один гравець має дві перемоги, а інший — одну. Як чесно поділити банк?

Сьогодні це здається очевидним, але в XVII столітті не існувало ні мови, ні методу для опису таких ситуацій. Паскаль і Ферма запропонували ідею розбиття на всі можливі наслідки та оцінки ймовірностей кожного — комбінаторний підхід. Так народилася нова наука.

Це була справжня революція. Світ випадковостей, як з'ясувалося, можна частково осягнути за допомогою чисел: два рази поспіль «орел» при чесній монеті — це не магія, а ймовірність у 25 %. Випадок отримував числові межі. Із цих відкриттів виросло те, що ми сьогодні називаємо теорією прийняття рішень: якщо ймовірність події надзвичайно мала, нею можна знехтувати під час планування.

Це просте спостереження лягло в основу сучасної економіки — від страхування та управління ризиками до біржових стратегій і маркетингу. Від XVII століття європейці почали приймати рішення, оцінюючи ймовірність різних наслідків. Це стало частиною нової раціональної культури Нового часу.

Самого Паскаля його відкриття вразило. Він поставив питання: у якій ставці — найвища можлива ціна? Відповідь виявилася філософською: у ставці на існування Бога, що він іописує у «парі Паскаля»: «Якщо Бог є — виграш нескінченний (вічне блаженство), якщо немає — програш мізерний. Розумно поводитися по-християнськи, адже ставка — нескінченність». Цей аргумент став не лише філософським розмірковуванням, а й прикладом застосування імовірнісного мислення поза межами ігор і математики.

І все ж першу систематичну теорію ймовірностей виклав Христіан Гюйгенс — нідерландський фізик і математик. 1657 року він опублікував трактат «Про обчислення в іграх випадку» (лат. *De ratiociniis in ludo aleae*), де вперше сформулював поняття математичного сподівання — середнього виграшу, очікуваного у довгостроковій перспективі. Ця книга стала першим підручником із теорії ймовірностей у Європі.

Гюйгенс познайомився з ідеями Паскаля й Ферма через свого друга Франса ван Схоотена, і завдяки цьому теорія поширилася у Нідерландах, Англії та Німеччині.

Поки Паскаль і Ферма обговорювали долю крізь призму гри, в Англії почали з'являтися перші спроби застосувати імовірнісне мислення до самої реальності. Виникла нова галузь знань — політична арифметика, рання форма статистики.

У 1662 році Джон Граунт, лондонський торговець і член щойно заснованого Королівського товариства, опублікував роботу «Природні та політичні спостереження, зроблені над списками смертності». Це був перший в історії досвід кількісного аналізу демографічних даних. Граунт використав звіти про смертність у Лондоні, щоб скласти таблиці смертності, оцінити чисельність населення міста, поширення захворювань і навіть обчислити середню тривалість життя.

Він першим показав, що за випадковістю окремих життів ховаються стійкі закономірності — наприклад, кількість померлих чоловіків і жінок щороку була приблизно однаковою. Це відкриття — що з хаосу людських доль можна вивести статистичні закони — стало відправною точкою для майбутніх теорій ймовірності та демографії.

Ідеї Граунта продовжив його сучасник Вільям Петті — економіст, лікар і філософ. Петті розвинув концепцію політичної арифметики — застосування чисел для управління державою. Він вважав, що для розумного управління потрібні не здогадки, а розрахунки. Він намагався оцінити економічний стан нації, чисельність населення, доходи та ресурси — у цьому сенсі він став одним із попередників економічної статистики та економетрики.

Так формувалася нова думка: ймовірності та числа можуть допомогти не лише в іграх чи філософії, а й в організації суспільства.

Перші десятиліття розвитку теорії ймовірностей завершилися важливою математичною віхою. На початку XVIII століття Якоб Бернуллі, швейцарський математик із відомої родини вчених, підсумував роздуми Паскаля, Ферма, Гюйгенса й статистиків.

У своєму творі «Мистецтво припущень» (лат. *Ars Conjectandi*, опубліковано посмертно 1713 року) Бернуллі довів закон великих чисел — один із фундаментальних результатів теорії ймовірностей. Суть його полягає в тому, що при великій кількості випробувань відносна частота події з великою ймовірністю наближається до її істинного значення.

Тобто, якщо підкидати монету тисячу разів, частка «орлів» буде близькою до 50 %, навіть якщо на початку були відхилення.

Бернуллі математично обґрунтував те, що Ґраунт і Петті спостерігали емпірично: у масі індивідуальних випадковостей проявляються стійкі закономірності. Це стало основою для розвитку статистики, страхування, демографії й науки загалом.

Таким чином, наприкінці XVII століття випадок — із таємничого капризу долі — перетворився на об'єкт наукового аналізу. Теорія ймовірностей і статистика стали частиною раціонального світогляду, характерного для європейської культури Нового часу.

Франс ван Схоотен

Франс ван Схоотен Молодший (1615–1660) — нідерландський математик, чия діяльність відіграла ключову роль у поширенні аналітичної геометрії в Європі XVII століття. Хоча він не був новатором у тому ж сенсі, що Декарт чи Ферма, саме його праці зробили ідеї аналітичної геометрії доступними, зрозумілими та придатними для використання в навчанні й науковій практиці.

Франс ван Схоотен народився 15 травня 1615 року в Лейдені в сім'ї математика Франса ван Схоотена-старшого, професора математики Лейденського університету, викладача військової інженерії та наставника таких майбутніх видатних учених, як Крістіан Гюйгенс, Йоган ван Ваверен Худде та Рене де Слюз. З ранніх років ван Схоотен Молодший зростав у середовищі, де активно розвивалася прикладна й теоретична математика.

У 1632 році він особисто зустрівся з Рене Декартом і мав змогу ознайомитися з його трактатом «Геометрія» — ще до його публікації в складі «Роздуми про метод» (1637). Робота видалася йому надзвичайно складною для розуміння, і він вирішив поглибити свої знання, вирушивши до Франції, де вивчав твори Франсуа Вієта, П'єра Ферма та інших провідних математиків того часу. Повернувшись до Лейдена 1643 року, ван Схоотен почав допомагати батькові у викладанні, а після його смерті 1645 року обійняв його посаду в Лейденській інженерній школі.

Одним із найважливіших учнів ван Схоотена став Крістіан Гюйгенс — майбутній засновник хвильової теорії світла, один із творців механіки та астрономії Нового часу.

Головною справою життя ван Схоотена стала робота над латинським перекладом і коментуванням «Геометрії» Рене Декарта. Перше видання вийшло 1649 року і супроводжувалося поясненнями, зробленими самим ван Схоотеном. Саме ця праця зробила ідеї аналітичної геометрії — поєднання алгебраїчних методів із геометричними задачами — зрозумілими для широкого кола європейських учених, адже латина тоді залишалася головною мовою науки.

Ще більшого впливу набуло розширене двотомне видання 1659–1661 років, у якому ван Схоотен залучив до роботи над коментарями та доповненнями таких видатних нідерландських математиків, як Йоган ван Ваверен Худде, Ян де Вітт, Хендрік ван Геурат і Герард де Бон. Ці томи містили пояснення, розширення та нові задачі, засновані на методах Декарта, і саме з цим виданням ознайомилися Готфрід Лейбніц та

Ісаак Ньютон. Таким чином, вплив ван Схоотена був опосередкованим, але надзвичайно важливим: він створив методологічну та освітню платформу, на якій надалі розвивався математичний аналіз.

Хоча ван Схоотен не вважається великим теоретиком, він зробив істотний внесок у розвиток математичної думки. У 1657 році він опублікував «*Exercitationes mathematicae*» — збірник вправ і задач, у якому вперше було висунуто ідею поширення методів аналітичної геометрії на тривимірний простір. Ця думка стала важливим кроком на шляху до розвитку багатовимірного аналізу та векторної геометрії.

Крім того, ван Схоотен був одним із перших, хто сформулював і використав твердження, відоме нині як теорема ван Схоотена в елементарній геометрії: у рівносторонньому трикутнику, якщо з'єднати будь-яку точку на описаному навколо нього колі з його вершинами, то найдовший із трьох відрізків дорівнює за довжиною сумі двох інших.

Завдяки його викладацькій діяльності, публікаціям і науковій активності Лейден у середині XVII століття на певний час став одним із провідних математичних центрів Європи.

Цікаво, що збереглися портрети Франса ван Схоотена та його дружини Маргрієти Вейнантс, написані не ким іншим, як Рембрандтом. Ці картини — «Портрет джентльмена у високому капелюсі з рукавичками» та «Портрет дами з віялом із страусового пір'я» — нині зберігаються в Національній галереї мистецтв у Вашингтоні.



Франс ван Схоотен помер 1660 року, у віці лише 45 років. Проте його вплив ще десятиліттями відчувався в європейській науці. Його праці стали містком між математичними відкриттями першої половини XVII століття та формуванням нової наукової мови, яка дозволила математиці вийти на якісно інший рівень формалізації, узагальнення та застосувань — у механіці, оптиці, астрономії та інших науках.

Крістіан Гюйгенс

Крістіан Гюйгенс (1629–1695) народився в Гаазі, у Республіці Об'єднаних провінцій — одному з найпередовіших та найосвіченіших регіонів Європи того часу. Його сім'я

належала до голландської інтелектуальної та дипломатичної еліти: батько, Константин Гюйгенс, був поетом, музикантом, вченим і секретарем принців Оранських. У домі Гюйгенсів регулярно бували філософи, вчені та художники, а сам Крістіан змалку зростав в атмосфері вільного мислення та поваги до науки.

Отримавши освіту в Лейденському університеті, а потім у Бреді, він рано проявив здібності до математики, механіки та спостережної астрономії. Уже в юності його цікавили криві лінії, проблеми центрів тяжіння та тіла обертання — теми, що перебували в центрі уваги нової науки, яка зароджувалася на перетині геометрії та фізики.



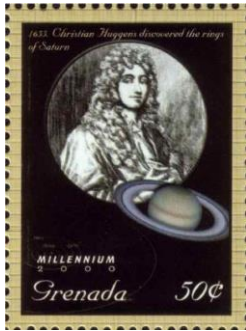
У 1650-х роках Гюйгенс активно займається астрономічними спостереженнями. Завдяки вдосконаленим ним лінзам і телескопам він відкриває кільця Сатурна та його супутник Титан, пропонує першу правильну інтерпретацію форми цих кілець. Саме Гюйгенс був одним із перших, хто використав науку не лише як спосіб пояснення світу, а й як інструмент розширення видимого горизонту Всесвіту.

У 1666 році він переїжджає до Парижа за запрошенням Жана-Батиста Кольбера і стає одним із перших членів новоствореної Французької академії наук. Там він працює понад десять років над оптикою, годинниками та теорією руху. Незважаючи на тісні зв'язки з французькою та англійською науковою елітою, Гюйгенс усе життя залишався людиною Голландської республіки та протестантської культури.



Каспар Нетшер, Крістіан Гюйгенс, 1671 р.

Наприкінці життя він повертається до Гааги. Його останні роки були затьмарені хворобою та зростаючим філософським скепсисом. В одному з пізніх трактатів — *Cosmotheoros* (1698, опубліковано посмертно) — Гюйгенс розмірковує про можливість життя на інших планетах, поєднуючи математичне мислення з філософською допитливістю — рисою, притаманною багатьом ученим його епохи.



У своїй знаменитій книзі «Про світло» (*Traité de la lumière*, 1690) він запропонував хвильову теорію світла, на противагу корпускулярній теорії Ньютона. Гюйгенс висунув ідею, що світло поширюється як хвиля, і сформулював так званий принцип Гюйгенса: кожна точка хвильового фронту стає джерелом вторинних хвиль. Цей принцип став наріжним каменем геометричної оптики та передбачив розвиток хвильової фізики XIX століття.

Одним із головних наукових інтересів Гюйгенса був рух тіл, особливо коливання. Він продовжив дослідження Галілея, математично пов'язавши поведінку маятника з вимірюванням часу. У праці *Horologium Oscillatorium* (1673) він не лише описав пристрій маятникових годинників (і першим їх побудував), а й дав строгий математичний аналіз руху маятника за допомогою геометричних методів і раннього варіаційного числення.

Особливо важливим був його аналіз ізохронізму — властивості ідеального маятника здійснювати коливання з однаковим періодом незалежно від амплітуди.



Хоча в історії науки Гюйгенс найчастіше згадується як фізик і винахідник, його шлях до наукової слави почався з математики. Саме математичні роботи принесли йому перше визнання в європейських інтелектуальних колах. Уже в юності він захоплювався античною наукою — особливо методами Архімеда.



Перша публікація Гюйгенса, *Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis et Circuli* (1651), присвячена проблемі квадратури — обчисленню площ, обмежених кривими. Це була тема, що сходить до античності й залишалася в центрі уваги математиків XVII століття. У цій роботі він розробив теореми про знаходження площ сегментів гіперболи, еліпса та кола, узагальнивши методи Архімеда. Гюйгенс показав, що центр мас сегмента будь-якої з цих кривих пов'язаний із її площею та зміг встановити закономірності, які пов'язують трикутники, вписані в криві другого порядку, із центром мас цих фігур.

Публікація стала вагомим внеском у наукову дискусію про квадратури, зокрема в суперечку з твердженнями Грегуара де Сен-Венса про квадратуру круга — Гюйгенс прямо полемізував із ним у другій частині книги. Завдяки цій роботі він здобув визнання як серйозний геометр і став учасником транснаціонального наукового обміну через листування з Мерсенном та іншими інтелектуалами.

У 1654 році він опублікував ще одну важливу працю — *De Circuli Magnitudine Inventa* («Про нововідкриту величину кола»), де уточнює класичний метод Архімеда для наближення числа π . Використовуючи метод, аналогічний сучасному прискоренню збіжності (наприклад, екстраполяції Річардсона), він досягає значно точніших границь для числа π . У результаті він отримує значення, укладені в інтервал від 3.1415926 до 3.1415927, а пізніше — ще точніше — між 3.1415926533 і 3.1415926538.



Знайомство Гюйгенса з Парижем у 1655 році та з колом учнів Паскаля і Ферма спонукало його до нового напрямку — математики випадкових подій. Уже через два роки він публікує *De Ratiociniis in Ludo Aleae* («Про міркування в грі кості», 1657), першу систематичну роботу з теорії ймовірностей. Книга була видана у збірнику Франса ван Схоотена й стала віхою в історії математики.

Гюйгенс формалізував поняття «чесної гри» та ввів ідею математичного сподівання як принципу раціонального розподілу виграшу. Уперше в європейській науці випадковість перестала бути винятком із раціонального порядку й стала об'єктом строгого аналізу. Гюйгенс показав, що навіть непередбачуваність може підкорятися математичним законам, якщо до неї застосувати підхід, що поєднує алгебру Вієта та аналітичну геометрію Декарта.

Книга завершувалася п'ятьма задачами, які на десятиліття стали стандартом перевірки майстерності в теорії ймовірностей. Над ними працювали провідні математики того часу: Якоб Бернуллі, Абрахам де Муавр, Лейбніц, а також філософ Барух Спіноза, зацікавлений у раціональній природі випадковості.



Ще в 1650 році Гюйгенс підготував рукопис *De Iis quae Liquido Supernatant* («Про тіла, що плавають на рідині»), натхненний трактатом Архімеда про плаваючі тіла. Хоча робота не була опублікована за життя й частково загублена, вона містила оригінальні результати в галузі гідростатики, які були повторно відкриті лише в XVIII–XIX століттях.

У ній він довів загальний принцип: стійкість плаваючого тіла залежить від мінімальної відстані між його центром мас та центром зануреного об'єму. Це фактично передбачення принципу віртуальних переміщень, задовго до появи аналітичної механіки. Він застосував цей підхід до циліндрів, паралелепіпедів і конічних тіл, встановивши залежність стійкості від щільності та геометрії тіла — результати, що мають значення навіть у сучасній інженерії.

Якоб Бернуллі

Ім'я Бернуллі стало майже синонімом математики в Європі Нового часу: протягом кількох поколінь ця швейцарська родина дала світові видатних учених. Але першим, хто проклав цей шлях, був Якоб Бернуллі (1654–1705) — людина, чия доля уособлює переломні риси європейського інтелектуального життя кінця XVII століття: конфлікт між традицією та наукою, між авторитетом і особистим пошуком, між вірою та раціональністю.



Якоб народився у Базелі — місті, яке тоді було важливим протестантським університетським центром і водночас глибоко зануреним у торговельні та ремісничі традиції. Його батько, Ніколаус Бернуллі, походив із родини заможних торговців спеціями і хотів для старшого сина надійної кар'єри в теології — галузі, що в кальвіністській Швейцарії все ще залишалася найшанованішим шляхом

для освіченої людини.

Під тиском родини Якоб здобув богословську освіту в Базельському університеті й навіть отримав ступінь, але потай займався математикою, філософією, астрономією та фізикою. Його приваблювала не догматична схоластика, а нова наука, натхненна працями Декарта, Галілея й Ньютона, яка поступово прокладала собі дорогу крізь старі університетські стіни. Цей внутрішній розрив — між зовнішньою покірністю і внутрішнім вільнодумством — відчувався протягом усього його життя й частково позначився на його непростому характері.



Після закінчення університету він подорожував Європою — Нідерландами, Францією та Італією — де знайомився з передовими ідеями, слухав лекції, встановлював зв'язки з науковим середовищем. Особливо важливим було його спілкування з членами наукових академій і листування з Лейбніцем, яке згодом вплинуло на його наукові інтереси й привело до активної участі у розвитку аналізу.

Повернувшись до Базеля, Якоб почав викладати математику і 1687 року обійняв посаду професора в місцевому університеті. Він читав лекції з астрономії, логіки та етики, але саме заняття математикою приносили йому справжнє задоволення. Як учений, він був суворим, вимогливим до себе й інших, відзначався наполегливістю та схильністю до глибокого аналізу. Як викладач — пристрасним, але нерідко конфліктним: навіть зі своїм молодшим братом Йоганном він вступав у запеклі наукові суперечки, що з інтелектуального суперництва переростали в особисту ворожнечу.

Він помер 1705 року в Базелі, залишивши по собі не лише праці, що стали класикою, а й математичну школу, яка продовжила його справу. В одному з листів до свого учня він якось написав: «Не заради слави, а з любові до істини я досліджую ці закони» — і ці слова цілком можуть слугувати епіграфом до всього його життя.

Перші публікації Бернуллі належать до середини 1680-х років. 1685 року він видав трактат, у якому провів паралелі між логікою та алгеброю — спробу зблизити строгу дедукцію з новою символічною наукою, що формувалася в Європі. У тому ж році він розпочав роботи з теорії ймовірностей, а 1687-го запропонував елегантну геометричну конструкцію, яка дозволяла поділити довільний трикутник на чотири рівні частини двома взаємно перпендикулярними прямими — приклад того, як суто абстрактна задача стає полігоном для розвитку нових методів.

До 1689 року Бернуллі вже активно працював із нескінченними рядами. У низці праць, опублікованих з 1682 по 1704 рік, він досліджував збіжність і розбіжність різних рядів. Зокрема, він показав, що гармонічний ряд $\sum 1/n$ розбігається — результат, відомий ще з часів Орема, але знову відкритий Бернуллі, що свідчить про розрив поколінь і відсутність систематичної передачі знань навіть у межах європейської наукової традиції. Він також довів, що ряд $\sum 1/n^2$ збігається, хоча не зміг знайти його точне значення — це зробить Ейлер через кілька десятиліть.

Саме під час аналізу задачі про безперервні відсотки (компаундування) Бернуллі відкрив знамениту математичну константу e . Досліджуючи границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

він помітив, що зі збільшенням кількості нарахувань за рік підсумкова сума наближається до фіксованого значення. Так із фінансової задачі виросла ідея неперервного зростання — центральна для всього математичного аналізу.

1690 року Бернуллі опублікував роботу в *Acta Eruditorum*, де показав, що задача про ізохрону (криву, якою тіло спускається вниз під дією сили тяжіння за однаковий час незалежно від точки старту) зводиться до розв'язання нелінійного диференціального рівняння першого порядку. Розв'язавши це рівняння методом розділення змінних, він одним із перших використав термін інтеграл у його сучасному математичному значенні — подія величезного значення в історії аналізу.

1696 року він запропонував і розв'язав рівняння, відоме сьогодні як рівняння Бернуллі: $y' = p(x)y + q(x)y^n$. Цей клас рівнянь виникає в багатьох застосуваннях і досі входить до курсу університетської математичної підготовки.

Також Бернуллі вивчав еволюти — геометричні місця центрів кривизни кривих, досліджував каустики (світлові криві) і створив знамениту лемніскату Бернуллі — фігуру у вигляді вісімки, вперше описану ним 1694 року.

Головною, хоча й посмертно опублікованою працею Якоба Бернуллі стала книга *Ars Conjectandi* («Мистецтво припущень»), що вийшла у Базелі 1713 року. Ця робота стала першим фундаментальним трактатом із теорії ймовірностей. Натхненний трактатом Гюйгенса, Бернуллі розвиває й систематизує ідеї про ймовірність як числову міру впевненості, про різницю між моральним і математичним сподіванням, про випадковість і необхідність, про ймовірність *a priori* та *a posteriori*.

Особливе місце у трактаті посідає закон великих чисел — один із перших теоретичних законів, що поєднує випадкове й закономірне. Він показує, що при великій кількості повторень дослідів частота події наближається до її ймовірності. Саме з цієї роботи походить поняття бернуллівського випробування — елементарного випадкового експерименту з двома можливими результатами.

Бернуллі не прагнув ефектної форми: його стиль часто сухий і строгий, але за цим стоїть цілісність мислення та глибоке відчуття математичної істини. Навіть у виборі символу для своєї гробниці він залишився вірним ідеї стійкості в зміні: він заповів зобразити логарифмічну спіраль із написом *Eadem mutata resurgo* («Змінившись, воскресаю тією ж»). Цю спіраль він уважав емблемою природи й духу, які зберігають внутрішню структуру, проходячи крізь перетворення — символом математичної істини та людської гідності. Через помилку на його надгробку замість логарифмічної спіралі вирізали архімедову.



Геометрія

Ще у III столітті до н. е. Ератосфен використовував числові координати — широту й довготу — під час укладання карт і вимірювання розмірів Землі. Апполоній Перзький у своїх «Конічних перетинах» фактично застосовував одну координатну вісь, вимірюючи відстані від фіксованих точок уздовж прямої, щоб описати параболи, гіперболи й еліпси. Його підхід був геометричним, але передбачав кількісне вимірювання — зачаток майбутніх координатних методів.

У середньовічному арабському світі подібні ідеї дістали подальший розвиток. Такі математики, як Ібн аль-Хайсам, досліджували оптичні та механічні задачі, у яких неявно використовувалися координатні уявлення — наприклад, під час побудови траєкторій. Переклади й коментарі до «Конік» Апполонія активно циркулювали в ісламському світі, а згодом були перекладені латинською мовою й стали відомими європейським ученим пізнього Середньовіччя та Відродження.

Цікаво, що координатні ідеї зустрічаються навіть у середньовічних схоластів. Так, французький мислитель XIV століття Ніколя Орем у своєму трактаті «Про конфігурації якостей і рухів» (*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*) використовував вертикальні й горизонтальні відрізки для відображення інтенсивності певних якостей — наприклад, швидкості — стосовно часу. Ця рання «геометрія руху» оперувала координатними відрізками, дуже схожими на пізнішу систему «час – відстань».



У XVI столітті європейські вчені дедалі активніше поверталися до античної спадщини. Однією з ключових фігур став Фредеріко Коммандіно (1509–1575), математик і перекладач, який відіграв важливу роль у передачі ідей Апполонія й Архімеда новому поколінню математиків. Коммандіно перекладав античні твори латинською мовою та супроводжував їх докладними коментарями. Особливо важливим було його перевидання «Конічних перетинів» Апполонія, де він прагнув пояснити давні побудови з використанням сучасніших понять. Він ще не застосовував координати в нашому розумінні, але в його працях уже помітний перехід від суто геометричної мови до більш абстрактно-операційного підходу.

Наступним кроком стала праця Бонавентури Кавальєрі (1598–1647), учня Галілея. У своєму трактаті *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* він розвинув метод «недільних» (індивізібелів), що передбачив виникнення інтегрального числення. Кавальєрі оперував перерізами й відрізками, розташованими вздовж осі — по суті, координатами, хоча термінологія ще не була усталеною. Він також активно використовував графічне зображення залежностей між величинами — підхід, тісно пов'язаний з аналітичною геометрією.

Мікеланджело Річчі (1619–1682), продовжуючи лінію Кавальєрі, працював із поняттям змінної й почав застосовувати позначення, наближені до координатних. Він розглядав величини, що залежать від «місця» вздовж лінії, і розробляв методи вимірювання площ і об'ємів, у яких чітко простежується уявлення про площину як сукупність точок із певним положенням.

Крім того, варто згадати менш відомих, але важливих італійських математиків, таких як Лука Валеріо та Гвідо Убальді. Їхні праці демонструють перехід від геометрії побудов до геометрії чисел, що стало підготовкою до аналітичних методів XVII століття.

Терміни на кшталт *linea ordinata* і *linea applicata* з'являються в цих текстах задовго до Декарта — як спроби описати взаємозалежність величин у геометричному контексті. Ці терміни частково наслідують лексику трактатів Аполонія, але вже спрямовані на кількісний опис простору.

Таким чином, до моменту появи праць Ферма й Декарта в першій половині XVII століття європейська думка вже підійшла до ідеї координатного опису простору — через практику, термінологію та алгебраїзацію геометрії, значною мірою завдяки зусиллям італійських гуманістів і математиків епохи Відродження.

Одним із перших, хто свідомо й послідовно застосував алгебраїчні методи для розв'язання геометричних задач, був французький математик П'єр Ферма (1601–1665). Його трактат «Вступ до вивчення плоских і тілесних місць» (*Ad locos planos et solidos isagoge*), написаний близько 1636 року, став наріжним каменем нової науки. Хоч сам трактат довгий час залишався відомим лише у вузькому колі паризьких учених, його повна публікація відбулася вже після смерті Ферма — 1679 року, у збірці *Varia Opera*.

У цьому трактаті Ферма стверджує, що якщо рівняння містить дві невідомі, то воно описує геометричне місце — множину точок, які задовольняють певну умову. Інакше кажучи, Ферма розглядає алгебраїчне рівняння як спосіб зафіксувати фігуру на площині. Він прямо пише, що «щоразу, коли в кінцевому рівнянні є дві невідомі величини, маємо геометричне місце, яке описує кінцева точка однієї з невідомих».

Хоча Ферма не використовує систему координат у звичному для нас вигляді (її запровадить Декарт), він оперує величинами, відкладеними від фіксованих прямих під певним кутом. Одну з перемінних він розглядає як вимір уздовж «основи», іншу — як вимір, що відкладається від неї під кутом. Це фактично й є прообраз прямокутної системи координат, хоча й виражений словами, а не кресленням.

У такому підході рівняння прямої зводиться до простого алгебраїчного виразу — наприклад, лінійного рівняння виду $ay = bx + c$, де змінні x і y — це відкладені відрізки. Складніші рівняння — квадратні та кубічні — вже описують не прямі, а криві другого й третього порядку, зокрема конічні перерізи: параболу, еліпс і гіперболу.

Ферма детально класифікує геометричні місця за степенями відповідних рівнянь і прагне дати повний перелік можливих кривих, які можуть бути отримані з рівнянь даного степеня. У цьому виявляється вплив античних задач, особливо трактатів Аполлонія, але в абсолютно новій — алгебраїчній — формі. Його мова лишається вербальною, проте метод — по суті символічний, що особливо помітно в розв'язанні

задач на максимуми й мінімуми, де він винаходить прообраз диференціального числення.

У завершенні трактату Ферма впевнено пише: «Таким чином ми коротко й ясно виклали все, що залишили неясним давні щодо площинних і тілесних місць». Хоча це твердження, безумовно, перебільшене, як показують уже праці його сучасника Декарта.

Тоді як твір Ферма «Вступ до вивчення площинних і тілесних місць» довгий час залишався в рукописі й не здобув широкого розповсюдження, другий засновник аналітичної геометрії — Рене Декарт (1596–1650) — зробив свої ідеї надбанням наукової громадськості ще за життя. Його знаменитий твір «Геометрія» (*La Géométrie*) вийшов друком 1637 року як додаток до філософського трактату «Роздуми про метод». Цей момент став переломним не лише для геометрії, а й для всієї математики.

Декарта глибоко не задовольняв стан сучасної йому геометрії. Він вважав, що в ній панує надмірна роздробленість: кожна задача потребує особливого підходу, а загальних методів майже немає. Він прагнув привести математику до єдності, довести, що алгебра й геометрія — це не дві різні науки, а одна й та сама, виражена різними мовами. Після «Геометрії» стало очевидно, що вся математика може розглядатися як єдина, зв'язна й цілісна система знань. Відтепер аналітичні задачі можна було не лише розв'язувати за допомогою рівнянь, а й наочно уявляти на площині — графіки, криві, точки й координати вступили в гру як рівноправні елементи.

Головне нововведення Декарта — введення прямолінійних координат. Він запропонував фіксувати точку на площині за допомогою двох чисел, відкладених уздовж взаємно перпендикулярних осей. Цей метод здається нам сьогодні природним, але для XVII століття це була справжня революція мислення: уперше простір і числа виявилися пов'язаними простим і універсальним правилом. Будь-яку криву на площині відтепер можна було описати рівнянням, а кожне рівняння — проілюструвати графіком.

Серед інших досягнень Декарта — перша загальна класифікація алгебраїчних кривих, тобто тих, що задаються степеневими рівняннями з цілими показниками степенів. Він ставив важливе для свого часу питання: які лінії допустимо вважати предметом геометрії? В античності геометрія обмежувалася колами, прямими, конічними перетинами. Але що робити з кривими, які виникають у механіці, — наприклад, спіралями чи циклоїдами? Декарт пропонував виключити з геометрії так звані «механічні» лінії, що потребують руху або часу для свого опису. Він уважав, що в межах математики слід розглядати лише ті лінії, які можна виразити рівняннями, — тобто алгебраїчні криві.

У цьому дусі він розв'язує й складні задачі, що раніше здавалися майже нерозв'язними. Зокрема, він блискуче впорався із задачею Паппа: знайти множину точок на площині, для яких сума відстаней до двох заданих прямих дорівнює сумі відстаней до інших двох прямих. Розв'язання цієї задачі засобами координатних рівнянь продемонструвало силу нового підходу.

Для Декарта аналітична геометрія була не просто методом, а способом перетворити саму структуру математичного мислення. Він писав: «Я вважаю, що тепер не пропустив нічого з початків, необхідних для пізнання кривих ліній» — з цієї фрази починається ціла епоха. Він заклав основи математичного аналізу, відкрив шлях до числення

нескінченно малих і показав, що навіть найскладніші форми можна описувати за допомогою чисел.

Після виходу «Геометрії» Декарта 1637 року знадобилося чимало зусиль, щоб її ідеї були зрозумілі, опрацьовані й увійшли до наукового обігу. Мова і стиль викладу Декарта були складними для сприйняття: він уникав загальноприйнятої алгебраїчної нотації, викладав матеріал фрагментарно й філософськи. Тому вирішальну роль у поширенні й систематизації декартової аналітичної геометрії відіграли його послідовники — особливо Франс ван Схоотен, Ян де Вітт, Філіп де ла Гір та інші математики середини й кінця XVII століття.

Франс ван Схоотен, професор у Лейдені, став головним популяризатором і коментатором Декарта. Він не просто видав «Геометрію» з власними обширними коментарями та поясненнями (1659–1661), а фактично переписав і пояснив її мовою сучасної тоді математики. Схоотен додав до оригінального тексту формальні означення, систематичні міркування та уточнену алгебраїчну символіку, зробивши книгу доступною для широкого кола читачів. Саме в його виданні ідеї координатної геометрії отримали своє друге народження й почали викладатися в університетах Європи.

Серед учнів і соратників Схоотена був Ян де Вітт — майбутній великий пенсіонарій⁴⁵ Голландії, державний діяч і талановитий математик. Він активно брав участь в обговоренні геометричних проблем і у своїх працях відділяв ідеї Декарта від зайвої філософії, надаючи їм більш прикладного й технічного характеру. Завдяки таким постатям, як де Вітт, аналітична геометрія увійшла до практики розв'язування інженерних і механічних задач.

Далі, Філіп де ла Гір, один із найвидатніших представників французької школи геометрів, пішов ще далі — він прагнув геометризувати досягнення аналітичного методу. У його працях помітний новий синтез: він поєднує ідеї Декарта й античну традицію Евкліда, розробляючи планіметрію та стереометрію з елементами координатного підходу. Ла Гір активно досліджував властивості кінцевих перетинів, працював над класифікацією кривих і згодом відіграв важливу роль у розвитку проективної геометрії.

Значним внеском де ла Гіра стало розвиток геометрії кривих ліній — він наочно показував, як рівняння визначають форму, симетрію та взаємне розташування кривих. Для XVII століття це було надзвичайно важливе уточнення: стало зрозуміло, що алгебраїчні криві не просто розв'язують задачі — вони самі стають об'єктом геометричного дослідження.

Отже, друга половина XVII століття стала часом формування сталої школи аналітичної геометрії. Ідеї, висловлені Декартом у загальному вигляді, отримали чітке оформлення, розвиток і педагогічне осмислення. Завдяки роботам ван Схоотена, де Вітта, де ла Гіра та інших учених аналітична геометрія перетворилася з філософського задуму на

⁴⁵ Пенсіонарій — у Нідерландах XVII століття це титул вищого державного службовця, фактичного керівника республіки; «великий пенсіонарій» (нид. *raadpensionaris*) відповідав сучасному голові уряду або канцлеру.

технічно розвинений метод, здатний розв'язувати широкий спектр задач — від суто математичних до фізичних і інженерних.

Особливе місце в розвитку геометрії XVII століття посідає твір Ньютона «Класифікація кубічних кривих» (Classification of Cubic Curves, 1676, опублікований 1704 року). У ньому він класифікував алгебраїчні криві третього степеня, показавши, що існує 72 можливих типи таких кривих (у сучасній класифікації — 78, якщо враховувати вироджені випадки). Ця робота стала вершиною застосування аналітичної геометрії до дослідження складних кривих.

Розвиток аналітичних методів у геометрії до середини XVII століття наштотхнув учених на важливе філософське й математичне питання: що відбувається з фігурами «на нескінченності»? У геометрії античної традиції — евклідовій — таких об'єктів просто не існувало: паралельні прямі не перетиналися, віддалених точок не було. Однак під час вивчення перспективи, конічних перетинів і перетину кривих математики почали відчувати потребу включити в геометричну картину не лише скінченні, а й «нескінченно віддалені» точки.

Першим, хто серйозно замислився над цим і насмілювався ввести нескінченність у геометрію, був Йоганн Кеплер. У своїх міркуваннях про перспективу та конічні перетини він писав, що паралельні прямі можна розуміти як такі, що перетинаються в нескінченно віддаленій точці. Це не просто метафора художника: Кеплер, натхненний працями з оптики та перспективи, намагався побудувати уніфіковану геометрію, у якій усі прямі — навіть паралельні — перетинаються. Так з'явилася нова ідея геометричного простору, яке включає не лише «звичайні» точки, а й точки на нескінченності, і в якому лінії мають універсальні властивості перетину.

Ця ідея знайшла свої строгі формулювання в працях Жерара Дезарга, одного із засновників проєктивної геометрії. У своєму трактаті «Бесіди про перспективу» (1639) Дезарг запропонував розглядати геометричні властивості фігур в іншому світі — не через вимірювання, а через відношення та взаємне розташування, що зберігаються під час перспективних (проєктивних) перетворень. Основними об'єктами вивчення стали точки, прямі, площини, а також інваріанти — властивості, які не змінюються під час переходу від однієї перспективи до іншої.

Класичним прикладом такого інваріанта стала теорема Паскаля (1639), що узагальнює властивості конічних перетинів: якщо взяти шість точок на коніці та з'єднати їх попарно за певним правилом, то точки перетину протилежних пар прямих лежатимуть на одній прямій. Це вже не евклідова геометрія у звичному розумінні, а нова — геометрія проєкцій, інваріантів, перетинів і нових типів симетрій.

Величезну роль у формуванні проєктивного підходу відіграв і Готфрід Вільгельм Лейбніц, який, розмірковуючи про природу математичних об'єктів, запропонував принцип неперервності: якщо фігуру можна перетворити на іншу шляхом неперервного перетворення, то властивості, що не змінюються в цьому процесі, слід вважати сутнісними й геометричними. Це означало, що перехід від кола до еліпса, а потім до параболи й гіперболи — не зміна об'єктів, а прояв однієї й тієї самої геометричної природи конік. Такий підхід руйнував попередні жорсткі межі між різними типами ліній

і наближав геометрію до розуміння її як науки про відношення та перетворення, а не лише про фігури.

Цікаво, що й Ісаак Ньютон у своїй «Універсальній арифметиці» та в «Началах» використовував проєктивні міркування, хоча й не формулював їх у термінах нової геометрії. Він аналізував властивості алгебраїчних кривих під час проєктивних перетворень, що дозволило йому не лише класифікувати їх, а й порівнювати криві, зовні різні, але проєктивно еквівалентні. Для Ньютона, як і для Лейбніца, перетворення координат — це не просто обчислювальний прийом, а інструмент розуміння внутрішньої структури об'єкта.

Отже, наприкінці XVII століття сформувалися основи проєктивного мислення, у центрі якого стояли ідеї нескінченності, неперервності та перетворень. Геометрія перестала бути наукою про «фігури у просторі» й перетворилася на дослідження відношень, що зберігаються під час перетворень, — фундамент, на якому в XIX столітті виросте проєктивна геометрія Понселе, Гомера та інших. Але все почалося з Кеплера, Дезарга, Лейбніца й Ньютона — тих, хто наважився поглянути на нескінченність як на повноправну частину геометрії.

Жерар Дезарг

Ім'я Жерара Дезарга (1591–1661) нечасто згадується поза межами історії математики, але його внесок у геометрію виявився справді поворотним. Він став одним із тих учених XVII століття, хто зумів не лише розширити межі античної математики, а й задати цілком нову оптику — у прямому й переносному сенсі. Його ідеї поклали початок проєктивній геометрії — науці, що змінила парадигму і запропонувала дивитися на фігури не як на фіксовані об'єкти, а як на співвідношення, стійкі до змін погляду, масштабу й перспективи.



Жерар Дезарг народився 1591 року в Ліоні, у знатній та шанованій родині, тісно пов'язаній з адміністративною службою Франції. Його батько був королівським нотаріусом і комісаром-слідчим при сенешальському суді Ліона, а також відповідав за збір церковних податків у єпархії. Ймовірно, Жерар був третім із шести дітей. Про його юність відомо небагато, і лише з 1630-х років його ім'я починає з'являтися в наукових колах.

Перш ніж здобути визнання як геометр, Дезарг працював приватним учителем, можливо — технічним радником при дворі кардинала Рішельє, і займався інженерними проектами. У 1640-х роках він остаточно утвердився як архітектор: спроектував низку громадських і

приватних будівель у Парижі та Ліоні, а також розробив гідравлічний пристрій для підйому води, встановлений поблизу Парижа.

Дезарг опинився на перетині двох традицій — античної оптики, що бере початок від Ібн аль-Хайсама (Альхазена), та ренесансної науки про перспективу, яку розвивали художники й архітектори. Але він пішов далі — від художніх прийомів до строгого геометричного аналізу.

У 1639 році він публікує свою головну математичну працю — «Схематичний нарис про результати перетинів конуса» (*Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du Cone avec un Plan*), де формулює ключові положення проєктивної геометрії. Найвідоміша частина цієї роботи — теорема Дезарга, що встановлює дивовижну відповідність між двома трикутниками: якщо продовження пар відповідних сторін перетинаються в трьох точках, то ці точки лежать на одній прямій, за умови, що прямі, які з'єднують відповідні вершини, проходять через одну спільну точку. Ця теорема стала наріжним каменем усієї подальшої проєктивної геометрії.

У 1643 році Дезарг також публікує практичний посібник *Pratique du trait à preuves*, присвячений кресленню й побудовам, у якому поєднує інженерний і геометричний підхід.

В останні десятиліття життя Дезарг продовжував займатися архітектурою та геометрією. Однією з його пізніх праць стала публікація з загадковою назвою DALG, яку прийнято розшифровувати як *Des Argues, Lyonnais, Géomètre* — «Дезарг, ліонець, геометр».

Жерар Дезарг помер 1661 року в рідному Ліоні у віці 70 років. Його праці довго залишалися в тіні — стиль викладу був складним, термінологія специфічною, а мова — французькою, а не латинською, що обмежувало коло читачів. Лише в XIX столітті, завдяки зусиллям таких математиків, як Понселе та Шарль, його роботи були знову відкриті: у 1864 році їх перевидали, а в 1951 році побачило світ повне зібрання праць Дезарга.

Еванджеліста Торрічеллі

Еванджеліста Торрічеллі народився у Фаенці, у Романії (частині Папської області), в родині ремісника. Його талант помітили досить рано, і він здобув освіту в *Collegio Romano* — єзуїтському коледжі, де навчався під керівництвом Бенедетто Кастеллі, учня Галілея. Згодом Торрічеллі став секретарем і кореспондентом Галілея, а в останні місяці життя вченого навіть жив у його домі. Після смерті Галілея у 1642 році Торрічеллі зайняв його місце професора математики у Флоренції при дворі герцога Тоскани.



Він жив і працював у Флоренції, тісно співпрацюючи з Академією дель Чіменто — одним із перших наукових товариств, члени якого активно займалися експериментальною наукою.

Одним із найважливіших внесків Торрічеллі в математику була перша спроба строгого спрямлення кривої, тобто знаходження точної довжини дуги. Зокрема, він досліджував еквівалентність площ і довжин у дусі методу неподільних, розробленого Бонавентурою Кавальєрі. Торрічеллі застосував цей метод до логарифмічної спіралі та параболи і, попри обмеженість формального апарату, зміг отримати точні вирази для довжини дуг

деяких типів кривих. Це було передвісником інтегрального числення, яке пізніше розвинули Ньютон і Лейбніц.

Ще одним видатним досягненням Торрічеллі стало побудування дотичної до параболи методом руху точки, тобто кінематичним способом. У ті часи ще не існувало строгого поняття похідної, але Торрічеллі трактував рух уздовж кривої як результат нескінченно малих переміщень і знаходив напрямок дотичної як граничне положення січної.



Торрічеллі також досліджував центри ваги складних фігур, спираючись на ідеї Архімеда, і вперше розглянув парадоксальні об'єми, у яких скінченна площа обмежує нескінченну довжину або навпаки. Один із таких прикладів — тіло Торрічеллі (або ріг Гавриїла): фігура, отримана обертанням гіперболи $y = 1/x$ при $x \geq 1$ навколо осі Ox . Вона має скінченний об'єм, але нескінченну поверхню — результат, що викликав бурхливу реакцію в наукових колах.



Найвідоміший Торрічеллі в історії науки як винахідник ртутного барометра. У 1644 році він запропонував експеримент: заповнити трубку ртуттю, перевернути її у чашу з ртуттю й спостерігати, як у трубці утворюється порожнина (вперше інтерпретована як вакуум), а рівень ртуті зупиняється на висоті близько 76 см. Це було перше експериментальне підтвердження існування атмосферного тиску.



Торрічеллі сформулював важливий закон про рівновагу рідин у сполучених посудинах, який згодом ліг в основу гідростатики.

Серед математичних задач, якими Торрічеллі обмінювався із сучасниками, особливо вирізняється його листування з П'єром Ферма. В одному з листів Ферма запропонував задачу про побудову точки, сума відстаней від якої до трьох заданих точок є мінімальною — класична варіаційна задача, нині відома як задача Торрічеллі. Торрічеллі дав їй геометричне розв'язання.

Бонавентура Кавальєрі

Бонавентура Франческо Кавальєрі (1598–1647) народився в Мілані й у п'ятнадцятирічному віці вступив до чернечого ордену єзуїтів блаженного Єроніма, у якому й провів усе подальше життя. Теологічну освіту він здобув у міланському монастирі Сан-Джероламо, а геометрію вивчав в Пізанському університеті. Його наукова кар'єра проходила переважно в Пізі та Болоньї. У 1629 році він став професором математики в Болонському університеті, де викладав до самої смерті.

Кавальєрі опублікував одинадцять книжок, перша з яких — *Lo Specchio Ustorio* (1632) — була присвячена теорії відбиття світла в дзеркалах кінчної форми. У ній він теоретично дослідив поведінку світла на параболічних, гіперболічних та еліптичних дзеркалах, хоча практично створити такі прилади у XVII столітті було ще неможливо.



Особливе місце в його біографії посідає спілкування з Галілео Галілеєм. Вони листувалися з початку 1620-х років, і Кавальєрі надіслав Галілею понад сотню листів. Галілей високо цінував молодого науковця і якось сказав, що «з часів Архімеда ніхто не просунувся так далеко в геометрії, як Кавальєрі».

Найбільшу славу Кавальєрі принесло розроблення методу, викладеного в головній праці його життя — *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* («Геометрія, розвинена новим способом за допомогою неподільних неперервного», 1635). Хоча написано її було ще 1627 року, опубліковано лише через

вісім років. У цій праці Кавальєрі запропонував новаторську концепцію: фігуру можна розглядати як сукупність нескінченної кількості паралельних перетинів — так званих неподільних. Плоска фігура складається з «усіх ліній», а об'ємне тіло — з «усіх площин», паралельних певній напрямній (регулі).

Ці неподільні — це елементи, що мають на один вимір менше, ніж сама фігура: лінії для площ, площини для об'ємів. Порівняння геометричних об'єктів зводилося до порівняння їхніх нескінченно малих перерізів. Наприклад, якщо всі перерізи двох фігур пропорційні з коефіцієнтом 1:2, то й площі фігур перебувають у такому самому співвідношенні. Такий підхід дозволяв Кавальєрі обчислювати площі та об'єми навіть складних тіл, зокрема гіперboloїда обертання.

Принцип Кавальєрі стверджує: якщо площі перерізів двох тіл, що лежать на однаковій відстані від базової площини, рівні, то рівними є й об'єми цих тіл. Аналогічно — для плоских фігур і лінійних перерізів. Цей принцип, до речі, використовувався й у стародавній китайській математиці: у VI столітті його застосовував математик Цзу Генчжі під час обчислення об'єму кулі.

Кавальєрі застосовував свій метод до різних фігур і, зокрема, обґрунтував, що об'єм конуса становить третину об'єму циліндра з тією ж основою і висотою. Він також обчислив площу під кривою $y = x^n$ для натуральних $n < 9$, отримавши результати, еквівалентні інтегралам $\int_0^1 x^n dx$ задовго до появи строгого інтегрального числення.

Метод неподільних, попри свою ефективність, викликав чимало критики. Деякі сучасники, зокрема Пауль Гульдін і Андре Таке, звинувачували Кавальєрі в запозиченнях у Кеплера та у відсутності строгості. Гульдін, зокрема, стверджував, що порівнювати «всі лінії» безглуздо, адже неможливо встановити відношення між двома нескінченностями. У відповідь Кавальєрі опублікував *Exercitationes geometricae sex* (1647), де захистив свою теорію, розвинувши ідеї про відносну нескінченність і наголосивши, що його метод не потребує строгої філософської онтології: «Про строгість має дбати філософія, а не геометрія».

У цій самій книзі Кавальєрі навів більш чіткі доведення теорем Гульдїна й продовжив роботу над теорією площ і об'ємів, прагнучи підвищити строгість свого методу. Він також намагався виразити об'єми тіл як суми неподільних перерізів за допомогою алгебраїчних перетворень і переходів.

Хоча головну увагу Кавальєрі приділяв геометрії та механіці, він також цікавився астрономією, про що свідчить його пізня праця *Trattato della ruota planetaria perpetua* (1646), присвячена конструкції гіпотетичного «вічного планетарного механізму».



Пам'ятник Кавальєрі роботи Джованні Антоніо Лабуса, Палаццо ді Брера, Мілан, 1844 р. (фото з [сайту Вікіпедія](#)).

Крім того, Кавальєрі був одним із перших, хто запровадив логарифми в італійську наукову практику. Він опублікував логарифмічні таблиці, підкреслюючи їхнє значення для обчислень в астрономії та геодезії. Також він сконструював гідравлічний насос для потреб монастиря — приклад практичного застосування наукових знань.

Філіп де ла Гір

Філіп де ла Гір (1640–1718) народився в Парижі в родині відомого художника Лорана де ла Гіра — учня Симона Вуе, автора численних церковних фресок. Лоран де ла Гір був не лише живописцем, а й інтелектуалом, захопленим математикою та перспективою. Він товаришував із Жераром Дезаргом, що зумовило інтерес Філіпа до геометрії.



Спершу юний Філіп навчався живопису і навіть вирушив до Італії, щоб удосконалювати майстерність. Однак згодом він переключився на наукову діяльність і став учнем видатного єзуїтського математика, фізика й теолога Оноре Фабрі. Через Фабрі де ла Гір опинився в колі активних інтелектуалів, серед яких були Джованні Доменіко Кассіні, Клод Франсуа Мільє Дешаль, Крістіан Гюйгенс, Рене Декарт, Готфрід Лейбніц і Марен Мерсенн. Ці контакти визначили широкий спектр його наукових інтересів.

Де ла Гіра вважають одним із найважливіших послідовників і популяризаторів ідей проективної геометрії Жерара Дезарга. У своєму трактаті *Traité des coniques* (1685) він не лише виклав властивості конічних перетинів, а й запропонував систематичну інтерпретацію цих кривих із погляду проєкцій та січних.

Одним із значних досягнень де ла Гіра було застосування координат у тривимірному просторі. Тоді як Декарт і Ферма обмежувалися площинними координатами, де ла Гір став першим, хто отримав рівняння поверхні в просторі за допомогою координатного методу. Це стало важливим кроком у розвитку аналітичної геометрії многовимірних просторів.

Саме де ла Гірові належить запровадження в науковий ужиток термінів «абсциса» і «ордината», якими й досі позначають координати на площині.

Він також досліджував рулети — криві, що утворюються при котінні одного кола по іншому (у дусі робіт Торрічеллі та Паскаля).

З 1678 року де ла Гір став членом Французької академії наук, зайнявши місце після смерті Жака Буо. Відтоді він активно займався астрономічними спостереженнями, укладав таблиці руху Сонця, Місяця та планет, а також брав участь у розробці прицільних систем для астрономічних телескопів.

У 1679–1682 роках він брав участь у зйомці узбережжя Франції, а 1683 року допомагав у розширенні Парижського меридіана на північ — частині великого картографічного проекту. Того ж року він обійняв кафедру математики в Колеж де Франс, а з 1687 року також викладав у Королівській академії архітектури. В обох установах він читав лекції з геометрії, механіки, астрономії та архітектури, формуючи нове покоління французьких учених та інженерів.

Де ла Гір цікавився також історією математики: він переклав французькою трактат візантійського автора Мануїла Мосхопула про магічні квадрати, доповнивши його власною збіркою відомих на той час теорем (видано у 1705 році).

Філіп де ла Гір був видатним практичним астрономом. Його обчислення й таблиці руху небесних тіл отримали визнання й широко використовувалися астрономами XVIII століття. У 1702 році він опублікував повний комплект астрономічних таблиць, де узагальнив результати своїх спостережень.

Він також займався механікою та гідравлікою, досліджував опір матеріалів, проектував різноманітні пристрої, працював над проблемами рівноваги тіл. Його методика викладання базувалася на принципах Галілея й Торрічеллі, зосереджуючись на наочності та точності фізичних міркувань.

Інтерес до фізики привів його і до природознавства: він писав роботи з фізіологічної оптики, досліджував процеси дихання, а також брав участь у створенні описових зоологічних робіт.

Джованні Чева

Джованні Чева (1647–1734) — італійський математик, чие ім'я тісно пов'язане з однією з ключових теорем класичної геометрії. Він народився в Мілані в заможній родині та здобув гарну освіту. Навчався в Міланському та Падуанському університетах, де головним чином займався математикою й механікою. Згодом Чева став професором математики в Мантуї, а також активно працював у сфері інженерії та гідротехніки герцогства. Його приваблювали практичні завдання — укріплення русел річок,

регулювання водних потоків, будівництво гідроспоруд, — і в цьому він проявив себе не лише як теоретик, а й як інженер.

Життя Чеви припало на переломну добу європейської науки: це час Галілея, Кавальєрі, Торрічеллі, а трохи пізніше — Ньютона й Лейбніца. На цьому тлі він виступив не стільки як революціонер науки, скільки як продовжувач класичних традицій евклідової геометрії, однак його внесок виявився надзвичайно тривалим — його ім'я й нині згадують у курсах елементарної математики.

Головна математична праця Чеви — книга «*De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*» («Про прямі лінії, що перетинаються між собою, побудова зі статики»), опублікована 1678 року. У ній він сформулював і довів теорему, що нині відома як теорема Чеви. Її суть полягає в такому: якщо в трикутнику провести з кожної вершини відрізки до протилежної сторони (так звані чевіани), то вони перетнуться в одній точці тоді й лише тоді, коли виконується певне просте співвідношення між відрізками, на які ці чевіани ділять сторони трикутника.

Ця теорема стала важливим інструментом класичної геометрії, адже дала змогу систематично розв'язувати задачі про перетин прямих усередині трикутника. Сьогодні її вивчають навіть у школі, а прізвище Чеви назавжди закріпилося в мові математики в терміні «чевіана».

Окрім цієї теореми, Чева займався також питаннями статики й механіки. Він намагався застосовувати геометричні методи для опису рівноваги сил, розвиваючи традиції античних математиків. Особливий інтерес він виявляв до гідротехнічних застосувань математики: Чева писав трактати про регулювання річкових течій і захист земель від повеней. У цьому він був типовим ученим XVII століття, який поєднував чисту теорію з практичними інженерними завданнями.

Ще одна значна праця Чеви — «*De re numeraria*» («Про грошову справу», 1711), де він застосував математичні міркування до економічних питань, фактично передбачивши елементи майбутньої економічної науки.

Ніколаус Меркатор

Ніколаус Меркатор (близько 1620 — 1687), справжнє ім'я — Ніколас (або Ніколаус) Кауфман (нім. *Niklaus Kauffmann*), був німецьким математиком XVII століття. Латинізований псевдонім Меркатор (від лат. *mercator* — «купець») є буквальною перекладом його німецького прізвища (*Kauffmann*) і відображає традицію того часу надавати іменам учених класичної форми.

Він народився у місті Ойтін, у герцогстві Гольштейн, і з 1642 по 1648 рік жив у Нідерландах, де, ймовірно, познайомився з передовими науковими ідеями свого часу. Згодом навчався в університетах Ростока та Лейдена, а з 1648 по 1654 рік викладав математику в Копенгагенському університеті. У 1655–1657 роках жив і працював у Парижі, а потім переїхав до Англії, де залишався до 1682 року.

В Англії Меркатор здобув широку відомість. Він навчав математики в аристократичних колах, зокрема Йоселіна Персі — сина 10-го графа Нортумберленда. У 1661 році разом із Крістіаном Гюйгенсом та Томасом Стріттом спостерігав проходження Меркурія по

диску Сонця. У 1666 році його обрали членом Лондонського королівського товариства, а згодом він став одним із придворних математиків Карла II, для якого проєктував морський хронометр.

У 1682 році, на запрошення французького міністра Жана-Батіста Кольбера, Меркатор переїхав до Франції, де брав участь у проєктуванні та будівництві знаменитих фонтанів Версалю. Проте його стосунки з Кольбером невдовзі зіпсувалися, і останні роки життя Меркатор провів у відносній тіні. Він помер у Версалі в 1687 році.



Основний внесок Ніколауса Меркатора в математику пов'язаний із дослідженням нескінченних рядів — галузі, що у XVII столітті лише формувалася. У 1668 році він опублікував трактат *Logarithmo-technia*, у якому навів одне з перших розкладів логарифмічної функції в степеневий ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Цей ряд, відомий сьогодні як ряд Меркатора, став важливою віхою в розвитку математичного аналізу. Хоча подібні результати обговорювали й інші математики (зокрема Джеймс Грегорі та Айзек Барроу), саме Меркатор першим опублікував цей результат у чіткій аналітичній формі. Його трактат також примітний тим, що в ньому одним із перших (поряд із П'єтро Менголі) ужито термін «натуральний логарифм» (*logarithmus naturalis*), який згодом став основою формального підходу до логарифмічних функцій.

Робота Меркатора стала важливою частиною інтелектуального контексту, у якому формувалися ідеї Ісаака Ньютона та Готфріда Вільгельма Лейбніца. Розклади функцій у нескінченні ряди, подібні до ряду Меркатора, стали ключовими інструментами математичного аналізу — нової дисципліни, що саме зароджувалася в той час.

Окрім математики, Меркатор виявив себе й в інших науках. Зокрема, у музичній теорії він запропонував оригінальну систему поділу октави — так звану шкалу Кауфмана, засновану не на 12, а на 53 рівних частинах. Ця система мала теоретичне значення й викликала інтерес у дослідженні точної настройки музичних інтервалів, хоча й не набула широкого практичного застосування.

Вільям Нейл

Вільям Нейл (1637-1670) народився в заможній англійській родині. Його батько, сер Пол Нейл, був придворним Карла I й підтримував зв'язки з інтелектуальною елітою того

часу. Завдяки становищу родини юний Вільям здобув чудову освіту й рано виявив схильність до наук. Уже в підлітковому віці він серйозно зайнявся вивченням математики, фізики та астрономії, а 1651 року, у віці всього чотирнадцяти років, вступив до Оксфордського університету (в коледж Ведгем), де потрапив у коло молодих і прогресивних учених, близьких до майбутнього Королівського товариства.

Нейл рано помер — 1670 року, не досягши й 35 років, однак устиг зробити помітний внесок у розвиток математики XVII століття.

Головна заслуга Вільяма Нейла в математиці — це обчислення довжини дуги алгебраїчної кривої, що стало одним із ранніх досягнень зароджуваного математичного аналізу.

1657 року Нейл опублікував результати, що стосувалися кривої, відомої нині як кубічна парабола або крива Нейла, заданої рівнянням $y^2 = x^3$. Він зумів визначити довжину дуги цієї кривої від початку координат до довільної точки. Це була одна з перших задач, у якій алгебраїчна крива піддавалася аналітичному дослідженню з метою знайти довжину дуги — задачі, що лежить в основі інтегрального числення.

Методи, які застосовував Нейл, ще не були сформульовані в термінах інтеграла, адже теорія Ньютона й Лейбніца з'явиться пізніше. Проте його міркування свідчать про розвинене інтуїтивне розуміння граничних переходів і підсумовування нескінченно малих величин — того, що згодом стане серцевиною математичного аналізу.

Робота Нейла справила велике враження на його сучасників, зокрема на Джона Валліса, який високо оцінив досягнення молодого математика й включив його результати до власних публікацій. Завдяки Валлісу та іншим членам майбутнього Королівського товариства ідеї Нейла дістали ширше визнання.

Окрім математики, Вільям Нейл цікавився астрономією та механікою. Він підтримував зв'язки з провідними науковцями свого часу, брав участь у спостереженнях і наукових обговореннях, які передували науковій революції кінця XVII століття.

Вільям Браункер

Коли 1662 року за наказом короля Карла II у Лондоні було засновано Королівське товариство — наукове об'єднання, яке поклало початок сучасній академічній науці в Англії, — його першим президентом став не фізик і не природознавець, а математик і дворянин: Вільям Браункер, 2-й віконт Браункер (1620–1684). Його ім'я рідко згадують поза історичними оглядами, проте його внесок у математику та організацію науки XVII століття вартий особливої уваги.

Вільям Браункер народився близько 1620 року в Ірландії, у родині придворного Карла I. Його батько отримав титул віконта, сплативши за це чималу на ті часи суму, а сам Вільям здобув освіту в Оксфорді, де вивчав не лише математику, а й медицину — і навіть отримав ступінь доктора. Утім, практикувати як лікар він не прагнув: набагато більше його цікавили абстрактні ідеї, логічні конструкції та числові закономірності. Свої математичні зацікавлення він розвивав переважно в приватному листуванні, особливо тісному — з іншим видатним англійським ученим, Джоном Валлісом.



Пітер Лелі. Вільям Браункер, близько 1674 р.

Саме Валліс у своїх працях 1650-х років зберіг для нас головні результати Браункера. Серед них — перші систематичні спроби працювати з неперервними дробами, а також розв’язання рівнянь, які пізніше стали відомі як «рівняння Пелля» — помилково, адже справжнім автором методу був саме Браункер. Це рівняння має вигляд $x^2 - Ny^2 = 1$ і відіграє важливу роль у теорії чисел. Браункер першим у Європі застосував неперервні дроби для пошуку цілих розв’язків таких рівнянь — за два століття до того, як ця техніка стала звичною.

Найвідоміше ім’я Браункера пов’язане з іншим досягненням: поданням числа π у вигляді неперервного дробу. Ця витончена формула

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}}$$

з’явилася в результаті його роботи над рядом Лейбніца для π і стала однією з перших демонстрацій того, як за допомогою нескінченно тривалих алгебраїчних виразів можна описувати ірраціональні числа. Сучасники спершу поставилися до формули з недовірою, але коли Браункер за її допомогою правильно обчислив перші десять десяткових знаків π , її визнали. Валліс використав це вираження у своєму фундаментальному трактаті *Arithmetica Infinitorum*.

Внесок Браункера не обмежувався теорією чисел. Його цікавили й питання, що лежали на межі з майбутнім математичним аналізом. Він був одним із перших в Англії, хто розглядав проблему розкладу натурального логарифма в нескінченний ряд, наближаючись до ідей, які згодом розвинулися в теорії степеневих рядів. Також він

займався геометричними задачами спрямлення, тобто знаходження довжини кривих. Зокрема, він отримав вирази для довжини дуги параболи й гіперболи — крок, що проклав шлях до визначення інтеграла як міри довжини кривої.

Цікаво, що саме Браункеру приписують введення терміна «гармонічний ряд» для позначення послідовності $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ — ряду, який відіграє важливу роль в аналізі, теорії чисел і музичній акустиці. Така назва підкреслювала зв'язок між числовими співвідношеннями та музичними інтервалами, і знову проявлялося прагнення Браункера математизувати та впорядкувати найрізноманітніші сфери знання.

Свою наукову діяльність Браункер поєднував з активною участю у становленні Королівського товариства — не лише як його президент, а й як організатор перших наукових демонстрацій, член урядових комісій і один із посередників між наукою та двором Карла II. Він служив в Адміралтействі, брав участь у експериментах із маятниками й балістикою, просував ідеї математичного моделювання руху та вів (нерідко гострі) дискусії з іншими ученими — особливо з Робертом Гуком, якого, ймовірно, вважав надто запальним експериментатором. Їхній конфлікт завершився тим, що Браункер залишив пост президента Товариства 1677 року.

Окрім математики в її звичному сенсі, Браункера цікавила й музика. 1653 року він анонімно переклав англійською ранню працю Декарта про музичну теорію, додавши до неї власні математичні коментарі. Його приваблювала ідея побудови музичної шкали, заснованої не на звичній рівномірній темперації, а, наприклад, на золотому перетині. У цьому проявлялося типове для XVII століття прагнення математизувати все — навіть мистецтво.

Джон Валліс

Джон Валліс (1616–1703) народився в Кенті, у родині священника. Освіту здобув у Кембриджі, де спочатку мав намір займатися медициною, проте швидко звернувся до богослов'я. Незабаром, однак, на перший план у його інтересах вийшли математика та криптографія — здібності, які проявилися під час політичних заворушень в Англії 1640-х років. Валліс став цінним кадром для парламенту: він розшифровував перехоплені королівські депеші й згодом став одним із провідних криптографів країни.

З 1649 року він обіймав Савіліївську кафедру геометрії в Оксфорді й залишався на ній до кінця життя. У цей же період Валліс став учасником кола лондонських учених, з якого 1660 року виросло Королівське товариство — один із головних наукових інститутів Нового часу в Європі.



Особливо важливу роль Валліс відіграв в інтелектуальній біографії Ісаака Ньютона. Саме в листах до Валліса у 1692 році Ньютон уперше відкрито виклав принципи своєї версії диференціального числення. Ці листи були опубліковані з дозволу Ньютона в перевиданні «Трактату з алгебри» Валліса 1693 року й стали важливим етапом у визнанні математичного аналізу в Англії.

У 1655 році в трактаті *De sectionibus conicis* («Про конічні перетини») Валліс уперше вводить знак нескінченності — ∞ . Точне походження цього символу залишається невідомим: припускають, що він міг бути стилізованою формою римської тисячі (CIO або CO) або походити від грецької

омеги (ω), яка в деяких рукописах також використовувалася для позначення «останньої межі».

Наступного року, 1656-го, з'явилася його головна математична праця — *Arithmetica Infinitorum* («Арифметика нескінченностей»), у якій Валліс робить сміливу спробу систематизувати методи Декарта й Кавальєрі, поширюючи поняття степеня на дробові показники і тим самим наближаючись до інтегрального числення. Саме в цьому трактаті вперше з'являється знаменита формула для числа π , відома як добуток Валліса:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

— одне з перших нескінченних добутків у європейській математиці, яке дозволяло наближено обчислювати π й відкривало шлях до аналізу нескінченно малих величин.

У 1658 році Блез Паскаль запропонував задачу: знайти площу під дугою циклоїди та об'єм тіла, утвореного її обертанням. Він пообіцяв нагороду тому, хто її розв'яже. Валліс разом зі своїм учнем Вільямом Нілом не лише подав точний розв'язок, а й розвинув ідею так званої ректифікації — «вирівнювання» кривих, тобто знаходження довжини дуги. Він застосував цей метод до напівкубічної параболи ($y = x^{3/2}$), що стало важливим кроком у розвитку диференціальної геометрії кривих.

У кінці 1660-х років Валліс бере участь у дискусіях із механіки, які ведуть між собою провідні розуми Європи — Христіан Гюйгенс, Крістофер Рен і сам Ньютон. У 1668–1669 роках вони незалежно один від одного доходять формулювання законів пружних зіткнень, спираючись на принцип збереження кількості руху. Це стало важливою віхою у становленні класичної механіки.

У 1685 році Валліс опублікував працю *A Treatise on Algebra*, у якій подав не лише широкий огляд алгебраїчних методів свого часу, а й спробував побудувати філософське обґрунтування алгебри як дисципліни. Ця робота була важлива не стільки новими теоремами, скільки способом викладу: Валліс запровадив наочне тлумачення від'ємних чисел як руху «в протилежному напрямку»: наприклад, «+3 ярди вперед» і «–3 ярди

назад», використав буквені позначення змінних і параметрів у рівняннях, стандартизуючи практику, започатковану Віетом і Декартом. Уперше англійською мовою Валліс детально виклав методи розв'язання рівнянь до четвертого степеня. Він також розглянув ірраціональні та уявні числа, хоч і з обережністю, визнаючи їх «можливими коренями» алгебраїчних рівнянь.

Цей трактат справив великий вплив на Ньютона, який, за свідченням самого Валліса, користувався його ідеями під час розробки методу флюксій — попередника диференціального числення.

У одній із пізніх праць Валліс запропонував нове формулювання відомого п'ятого постулату Евкліда — аксіоми про паралельні прямі. Він переклав з арабської коментар перського математика Насіра ад-Діна ат-Тусі, який прагнув більш інтуїтивного розуміння цього постулату. Слідом за ним Валліс запропонував еквівалентне твердження: на будь-який відрізок завжди можна побудувати трикутник, подібний до заданого. Цей підхід, заснований на подібності фігур, підводить нас до сучасного аксіоматичного аналізу евклідової та неевклідової геометрії.

Серед захоплень Валліса особливе місце займала криптографія. Він почав працювати в цій галузі під час Громадянської війни в Англії, коли допомагав парламенту розшифровувати перехоплені листи роялістів. Одна з найвідоміших історій — його розшифрування складного шифрованого листа про падіння Чичестера всього за дві години. Це миттєво зробило його цінним агентом.

Після Славної революції 1688 року⁴⁶ Валліс продовжив свою діяльність уже в інтересах нового уряду — як офіційний криптограф Вільгельма III та королеви Анни. Йому була призначена пенсія у 100 фунтів стерлінгів на рік. Серед збережених документів — сотні сторінок розшифрованих листів, що нині зберігаються в архівах Бодлеанської бібліотеки в Оксфорді.

Ісаак Барроу

Ісаак Барроу народився в жовтні 1630 року в Лондоні. Він був єдиною дитиною в родині, яка пережила дитинство — мати померла, коли йому було близько чотирьох років, а батько, торговець льоном, незабаром одружився вдруге. Дитинство Барроу пройшло між Лондоном і Кембриджем, де він жив у родичів.

У школі він прославився як важка дитина: бився, сперечався і не особливо цікавився навчанням. Все змінилося, коли він потрапив до школи в Фелстеді, де несподівано для всіх виявився блискучим учнем: вивчав латину, грецьку, іврит і швидко заглибився у серйозну освіту.

У 1648 році Барроу вступив до Трініті-коледжу Кембриджа. Він навчався відмінно, став стипендіатом і в 1652 році отримав ступінь магістра. Але подальший шлях був непростим: у роки англійської республіки він відмовився скласти присягу новій владі — за що втратив посаду. Цей поворот виявився несподіваним подарунком долі. Замість

⁴⁶ Славна революція 1688 року — мирна зміна влади в Англії, в результаті якої король Яків II був скинутий, а престол успадкували Вільгельм III Оранський і Марія II. Подія зміцнила парламентську монархію та закріпила принципи конституційного уряду.

Кембриджа Барроу вирушив у довгу подорож Європою: побував у Парижі, Флоренції, Венеції, а потім — у Смірні та Стамбулі. На зворотному шляху його корабель зазнав нападу піратів. На відміну від більшості пасажирів, Барроу не розгубився і допоміг екіпажу відбитися від загарбників.



Мері Біл, портрет математика (Ісаак Барроу), 1680 р.

Повернувшись до Англії, він швидко зайняв видні академічні посади. Спершу — професор грецької мови в Кембриджі, потім — геометрії в Gresham College, а в 1663 році став першим володарем Люкасовської кафедри математики — тієї самої, яку пізніше обійме Ньютон.

Саме Барроу помітив у молодому Ньютоні виняткові здібності. Вони були різними за характером: Барроу — кмітливий, запальний, недбалий у вбранні та досить балакучий; Ньютон — замкнутий, мовчазний і стомлений власними роздумами. Але Барроу не тільки не ревнував до таланту Ньютона — він допомагав йому. У 1669 році він добровільно відмовився від кафедри на користь Ньютона, що стало ключовим кроком у академічній кар'єрі Ньютона.

Барроу, однак, не відійшов у тінь. Він продовжував викладати і писати. Його математичні роботи були високо оцінені сучасниками. Він переклав і прокоментував «Начала» Евкліда, написав лекції з геометрії та оптики, в яких, задовго до Ньютона, наблизився до ідеї, що лежить в основі математичного аналізу — зв'язку між похідною і інтегралом. Його підхід був геометричним, але глибоким: він ясно розумів, що площа під кривою і швидкість зміни величини — дві сторони однієї медалі.

Барроу увійшов в історію як людина, що стояла на порозі створення математичного аналізу — але не переступила його. Він не розробив повного формального апарату, який пізніше з'явиться у Ньютона та Лейбніца, але його роботи з геометрії заклали основу для цих відкриттів.



Пам'ятник Барроу у Трініті-коледжі (фото [Andrew Dunn](#))

У своїх «Геометричних лекціях» Барроу запропонував новий спосіб знаходження площ під кривими та побудови дотичних до них. Особливо цікавим є його метод визначення дотичних, який сьогодні можна назвати геометричним попередником диференціального числення. Він працював у дусі, який пізніше підхоплять Хюдде та Слюзе, а натхненням для нього слугували ідеї Ферма.

Ферма вже знав, що для побудови дотичної в точці на кривій достатньо знайти одну додаткову точку поруч. Барроу пішов далі: він розглянув дві близькі точки на кривій — P і Q — і побудував між ними маленький трикутник, сторони якого відображали зміни координат. Цей трикутник він називав «диференціальним», бо його сторони представляли собою різниці (або, по суті, диференціали) абсцис і ординат. Порівнявши пропорції в трикутнику, Барроу отримав співвідношення між змінами координат — те, що сьогодні позначають як похідну або кутовий коефіцієнт дотичної.

Він застосував свій метод не лише до простих кривих, як парабола $y^2 = px$, але й до значно складніших: кривої каппа $x^2(x^2 + y^2) = r^2y^2$, кривої Ла Галанд $x^3 + y^3 = rxy$, квадратриси та інших. Наприклад, для параболи він показав, що співвідношення між змінами абсциси і ординати дорівнює $2y : p$, звідки легко вивести рівняння дотичної. Все це робилося без границь і диференціалів у сучасному сенсі, але по суті представляло ту саму ідею: обчислення миттєвої зміни величини.

Важливо, що Барроу усвідомлював загальний характер цих прийомів. Він не обмежувався окремими задачами, а шукав універсальні підходи, прагнучи зрозуміти зв'язки між геометрією та змінами. Це було більше, ніж просто алгебраїчне ремесло — це була майже філософія руху, викладена термінами геометрії.

І хоча він сам не оформив усе це у вигляді формальної теорії, його ідеї лягли в основу методу Ньютона. Багато сторінок «Геометричних лекцій» виглядають як начерки майбутнього аналізу — тільки без звичних нам символів. Це робить Барроу однією з ключових фігур в історії математики XVII століття: він став мостом між геометричною традицією Евкліда та новою наукою руху і змін, що стане серцем нової фізики.

Барроу цікавився й природою світла: писав про оптичні явища, лінзи, веселку — і робив це з математичною строгістю, але без зайвої абстракції.

Починаючи з 1670-х років, він дедалі більше зосереджувався на богослов'ї. Його проповіді користувалися популярністю, і в 1672 році він став магістром Трініті-коледжу. На цій посаді він заснував університетську бібліотеку і продовжував надихати студентів.

Ісаак Барроу помер у 1677 році у віці всього 46 років. За своє недовге життя він встиг залишити слід у трьох галузях — математиці, оптиці та теології. І головне — він зіграв вирішальну роль у долі Ньютона. Можна сказати, що Барроу — рідкісний приклад ученого, який не тільки зробив багато сам, але й вчасно відійшов, щоб дати місце генію.

Джеймс Грегорі

Джеймс Грегорі народився в листопаді 1638 року в невеликому селі Драмоуд у Шотландії, у родині священника Джона Грегорі. Його мати, Джанет Андерсон, походила з освіченої родини та відіграла ключову роль у його ранньому навчанні: саме вона прищепила сину любов до геометрії. Її дядько, Александр Андерсон, був учнем і видавцем праць знаменитого математика Вієта, тож математична традиція в родині відчувалася.



Після смерті батька в 1651 році навчання Джеймса продовжив його старший брат Девід. Юний Грегорі навчався в Абердинській гімназії, потім у коледжі Марішал, де в 1657 році отримав ступінь магістра мистецтв. Уже тоді він проявляв схильність до математики та астрономії.

У 1663 році Грегорі вирушив до Лондона, де познайомився з Джоном Коллінсом — одним із головних посередників між вченими того часу, а також із співвітчизником Робертом Мореєм, одним із засновників Королівського товариства. Через рік він поїхав до Венеційської республіки та вступив до Падуанського університету, де навчався у математика Стефано Анджелі. Італійський період став для нього надзвичайно

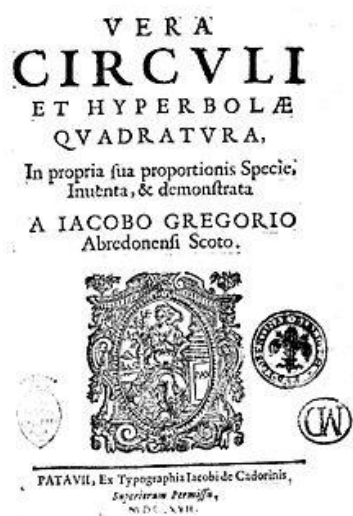
плідним: тут він опублікував *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667) та *Geometriae Pars Universalis* (1668) — книги, що засвідчили його близькість до провідних математиків Європи.

Повернувшись до Англії в 1668 році, Грегорі був обраний членом Королівського товариства, а незабаром отримав кафедру математики в університеті Сент-Ендрюса, створену спеціально для нього за розпорядженням короля Карла II. Пізніше він обійняв професорську посаду в Единбурзькому університеті. У 1674 році одружився з Мері Джеймсон, дочкою відомого живописця.

На жаль, його життя виявилося недовгим. У 1675 році, спостерігаючи зі студентами супутники Юпітера, він переніс інсульт і незабаром помер, ледь досягнувши 37 років.

Ім'я Джеймса Грегорі найчастіше пов'язують з астрономією — саме він у 1663 році запропонував конструкцію дзеркального телескопа, відомого як «телескоп Грегорі». Але його математична спадщина виявилася не менш важливою — вона поставила його в один ряд з Джоном Валлісом та Ісааком Барроу як одного з передвісників аналізу, що підготували ґрунт для відкриттів Ньютона.

У *Optica Promota* (1663) Грегорі описав пристрій відбивного телескопа, у якому головне дзеркало повинно було бути параболічним, що дозволяло виправляти сферичну аберацію, а додаткове — еліптичним. Сам він, за власними словами, не володів майстерністю оптики і не знайшов майстра, здатного виготовити прилад. Лише через десять років Роберт Гук зібрав такий телескоп. Однак ідея виявилася живучою: «схема Грегорі» використовується і сьогодні, зокрема в радіотелескопах. У тій же книзі він висловив думку про можливість виміряти відстань від Землі до Сонця через спостереження проходження Венери — метод, реалізований лише в XVIII столітті.



У *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667) Грегорі запропонував нові способи наближення площі круга та гіперболи за допомогою збіжних рядів, що дозволило обчислювати логарифми з високою точністю. Він також займався задачами квадратури кривих і визначення довжин дуг, використовуючи нескінченні ряди.

У *Geometriae Pars Universalis* (1668) він уперше опублікував формулювання та доведення того, що пізніше назвуть основною теоремою аналізу: зв'язок між площею під кривою та похідною функції. Це доведення стосувалося часткового випадку кривих, але стало важливим кроком до загальної теорії інтегрального та диференціального числення. Ісаак Барроу, наставник Ньютона, високо оцінив цей труд.

У переписці та опублікованих працях Грегорі дав розклади у ряди для тригонометричних функцій. Особливо відомий ряд для арктангенса:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Якщо покласти $x = 1$, отримуємо знамениту формулу для числа $\pi/4$, відому сьогодні як ряд Грегорі — Лейбніца. Подібні ряди використовувалися для обчислень π і відіграли важливу роль у становленні аналізу.

Грегорі намагався дати строгий опис того, що ми сьогодні називаємо границею. Він міркував про «останні відношення» послідовності, передбачаючи майбутні формальні визначення. Його інтуїція щодо граничних процесів суттєво вплинула на Ньютона, особливо у розробці методу флюксій.

Грегорі спостерігав дифракцію світла — він помітив спектр, що виникає при проходженні сонячного світла через пташине перо, що було близьким до досвіду Ньютона з призмою. Він також пропонував методи побудови дотичних і обчислення логарифмів через нові ряди.

Ісаак Ньютон

Ісаак Ньютон народився в селі Вулсторп у Лінкольнширі 25 грудня 1642 року (за юліанським календарем; за новим стилем — 4 січня 1643 року) в родині дрібного землевласника. Його батько помер за кілька місяців до народження сина, а мати невдовзі знову вийшла заміж, залишивши маленького Ісаака на піклування бабусі. Дитинство майбутнього вченого минуло в сільській обстановці, далекій від університетської науки та освічених кіл.

На відміну від таких постатей, як Блез Паскаль чи Готфрід Лейбніц, які з ранніх років виявляли ознаки надзвичайних здібностей, маленький Ньютон нічим подібним не вирізнявся. Він виглядав кволим, хворобливим і, за спогадами сучасників, у дитинстві не подавав ознак майбутнього генія.



Коли прийшов час навчання, його віддали до школи в Грентемі. Спершу хлопець не виявляв особливого інтересу до занять і поїхав туди швидше з наполягання родини, ніж з власної волі. Однак доля розпорядилася інакше: невдовзі сімейні справи погіршилися, і мати вирішила, що синові корисніше буде допомагати по господарству, тому забрала його назад у Вулсторп. Неочікувано для всіх саме це стало переломним моментом. Ньютон, уже відчувши смак навчання і зрозумівши, що книги й заняття приваблюють його більше, ніж сільська праця, сам попросився повернутися до школи. Цей крок став першим проявом його майбутньої відданості науці та освіті.

У середині XVII століття англійські університети вже мали практику приймати на навчання не лише вихідців із заможних родин. У Кембриджі існував особливий статус «сайзерів» — студентів, які могли здобувати освіту в обмін на виконання господарських доручень і прислугування більш забезпеченим товаришам. Саме таким чином у 1661 році Ньютон вступив до Трініті-коледжу.

Спочатку навчання давалося йому нелегко: традиційна схоластична програма здавалася застарілою, а сам Ньютон не виявляв особливої активності. Проте поступово він усе

більше заглиблювався у математику та природознавство, знайомився з працями Коперника, Кеплера, Галілея та Декарта. В ці роки вирішальну роль у його становленні відіграв Ісаак Барроу — професор математики в Кембриджі.

Барроу був одним із небагатьох, хто поєднував класичну освіченість із живим інтересом до нових наукових ідей. Його лекції, у яких математика подавалася не як застигла дисципліна, а як наука, що активно розвивається, справили на Ньютона велике враження. Але ще важливішим стало особисте спілкування: Барроу помітив у своєму студентові незвичайні здібності й зумів спрямувати його інтереси в бік самостійного дослідження. Саме Барроу став для Ньютона тією людиною, яка не лише ознайомила його з сучасним станом математики, а й надихнула на власні пошуки. Згодом Барроу навіть поступився йому кафедрою в Кембриджі, чудово розуміючи, що його учень здатний на значно більше.

За традицією випускники Трініті-коледжу, які прагнули викладацької кар'єри, мали прийняти духовний сан і тим самим пов'язати себе з Церквою. Для Ньютона цей вибір виявився проблематичним. Попри релігійність епохи, він не хотів ставати священником, вважаючи чернецтво та церковні обов'язки несумісними зі своїм прагненням до науки. Ця відмова могла коштувати йому університетської кафедри, адже формально без обітничі він не мав права викладати.



Ситуацію врятували друзі та покровителі, серед яких був і Барроу. Для Ньютона зробили виняток, дозволивши йому продовжити академічну кар'єру без прийняття сану. Таким чином, його шлях у науку міг обірватися ще до того, як він устиг проявити свій талант у повну силу.

Однак незабаром зовнішні обставини перервали його заняття. У 1665 році Кембриджський університет закрили через епідемію чуми, що охопила Англію. Ньютон повернувся до рідного Вулсторпа, де провів майже два роки в усамітненні. Саме цей період — з 1665 по 1667 рік — увійшов в історію як його *anni mirabiles*, «роки чудес». Позбавлений лекцій і формальних обов'язків, він уперше повністю розкрив свій талант, зробивши відкриття, які згодом визначили долю науки.

Ця вимушена перерва у навчанні виявилася для Ньютона надзвичайно плідною. Опинившись у Вулсторпі без викладачів, лекцій і навіть без бібліотек, він, здавалось, уперше здобув внутрішню свободу для власних роздумів і дослідів. Пізніше він згадував ці роки як час, коли на нього «зійшли перші промені натхнення». Саме тоді сформувалися головні напрями його наукової творчості — математика, оптика й механіка.

В усамітненні Вулсторпа Ньютон почав розробляти те, що називав «методом флюксій». У цьому методі величини розглядалися як «текучі» (флюенти), а їхні миттєві зміни — як «флюксії». Так, задовго до появи звичного нам символічного аналізу він створив основи нового математичного мови, який дозволяв описувати рух і зміну. У 1671 році Ньютон виклав свої ідеї в трактаті «Метод флюксій і нескінченних рядів», але друкувати його не став. Цей текст побачив світ лише через десятиліття, вже після його смерті. У ньому були викладені правила знаходження екстремумів, методи інтегрування («квадратур»),

прийоми розкладання функцій у ряди та способи розв'язання складних геометричних задач.

Приблизно в той самий час з'явився інший твір — «Про перелік кривих третього порядку». Опубліковано його було лише 1704 року, як додаток до «Оптики», хоча основні ідеї належать до волсторпського періоду. У цій праці Ньютон здійснив систематичну класифікацію кубічних кривих, поділивши їх на 14 родів і 72 види. Класифікація ґрунтувалася на аналізі асимптот, нескінченних гілок і особливих точок кривих. Важливо й те, що Ньютон вільно користувався від'ємними координатами та геометричними перетвореннями, які полегшували дослідження форми рівнянь. Ця робота стала зразком строгої систематизації в аналітичній геометрії й довгий час залишалася неперевершеною.

Паралельно з математикою Ньютон занурився в оптику. Саме тоді він провів знамениті досліди з призмою, які показали, що біле світло складається з багатьох кольорів, кожен із яких має власну ступінь заломлення. Ця ідея пізніше лягла в основу його трактату «Оптика» і визначила напрям подальших досліджень у фізиці світла. Водночас він узявся за вдосконалення телескопів: саме в цей час був створений його перший відбивний телескоп, який згодом приніс йому славу в Лондоні.

Нарешті, саме до 1666 року належать його перші роздуми про природу тяжіння. Пізніше, вже в старості, Ньютон розповідав своєму другові та біографу Вільяму Стьюклі, що поштовхом до цих думок стало просте спостереження в саду Вулсторпа: він сидів за столом під яблунею, коли на землю впало яблуко⁴⁷. Ця буденна подія викликала в нього низку міркувань: якщо яблуко падає вниз, то що змушує його рухатися саме до центра Землі? Чи не та сама сила утримує Місяць на небесній орбіті, не дозволяючи йому «впасти» на Землю або полетіти в космос? Ця думка стала початком його довгих досліджень, у результаті яких поступово сформувалася ідея всесвітнього тяжіння, що поєднує земний і небесний світи.

Отже, два роки, проведені у вимушеній самотності, стали «роками чудес» не лише для самого Ньютона, а й для всієї науки: саме тоді були закладені основи числення, оптики й механіки, що згодом сформували ядро його великої спадщини.

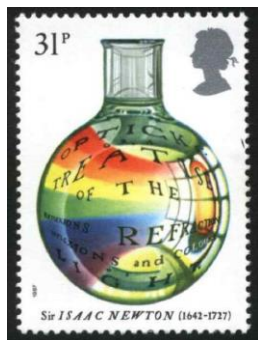
Коли загроза чуми минула, Ньютон повернувся до Кембриджа. У 1667 році його обрали стипендіатом Трініті-коледжу, а невдовзі, завдяки підтримці Барроу, він отримав право викладати. Однак академічна кар'єра Ньютона склалася незвичним чином. Формально він став професором математики, але педагогічні здібності в нього були, м'яко кажучи, скромні. Його лекції вирізнялися надзвичайною абстрактністю й насиченістю обчисленнями; пояснювати просто й захопливо він не вмів. Сучасники згадували, що аудиторії майже порожніли: студенти рідко приходили слухати професора, і фактично Ньютон так і не здобув справжніх учнів.

Зате поза межами лекційних залів його діяльність швидко привернула увагу. Першим гучним успіхом стало створення вдосконаленого телескопа-рефлектора. У 1668 році Ньютон збудував невеликий дзеркальний телескоп, який перевершував за якістю

⁴⁷ Твердження, що яблуко саме впало на голову Ньютона є, безперечно, лише науковим міфом, не підтвердженим документально.

зображення звичні лінзові інструменти: він усував хроматичну аберацію⁴⁸, неминучу в оптичних об'єктивах. У 1671 році цей прилад був представлений Лондонському королівському товариству й викликав жвавий інтерес. Уже наступного року Ньютона обрали членом товариства, що дало йому можливість безпосередньо спілкуватися з провідними науковцями Англії.

Відтоді починається його шлях як публічної постаті в науковому світі. Щоправда, перші кроки були непростими: його перші публікації в «Трудах Королівського товариства» про природу світла й кольору викликали бурхливу дискусію, навіть скандал, — але це вже наступний етап у житті Ньютона.



Першою серйозною працею Ньютона, яка представила його науковій спільноті, була робота з оптики. У 1672 році в журналі Philosophical Transactions Королівського товариства з'явилася його стаття про природу світла й кольору. У ній Ньютон доводив, що біле світло не є однорідним, а складається з безлічі «простих» кольорів, кожен із яких має власну ступінь заломлення. Саме тому світло, проходячи крізь призму, розкладається на спектр, і саме тому неможливо створити лінзовий об'єктив без хроматичних спотворень. Це було радикальне твердження, що руйнувало уявлення про світло як про єдину субстанцію, і воно відразу ж викликало запеклі суперечки.

Найзавзятішим опонентом Ньютона став Роберт Гук — тодішній куратор експериментів Королівського товариства. Гук, який дотримувався власної «хвильової» теорії світла, різко розкритикував Ньютона, заявивши, що той переоцінює власні досліди й робить поспішні висновки. Для молодого професора це стало тяжким випробуванням: він болісно сприймав критику, а полеміка з Гуком швидко переросла в запеклий конфлікт, у якому особисті амбіції та вразливе самолюбство відігравали не меншу роль, ніж сама наука.

Ньютон настільки важко переживав це протистояння, що навіть хотів відмовитися від наукової діяльності й припинити публікувати свої праці. У листах він прямо зізнавався, що публічні дискусії приносять йому лише тривогу й роздратування. Однак, попри зовнішню замкнутість, він продовжував працювати над математикою та механікою — лише тепер обережніше, намагаючись не розкривати свої ідеї до кінця й уникати передчасної критики.

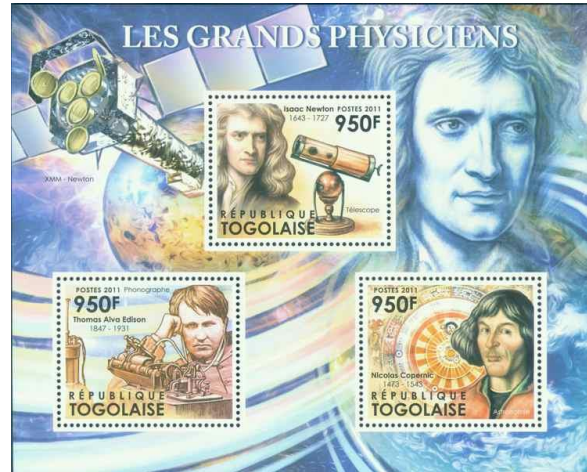
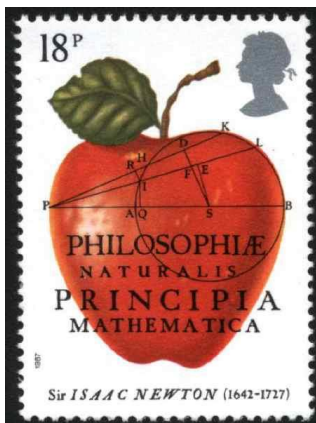
Саме на тлі цього першого серйозного конфлікту формується риса, яка супроводжуватиме Ньютона все життя: з одного боку, він прагнув граничної строгості й бездоганності своїх доведень, а з іншого — у край болісно реагував на суперечки та конкуренцію, намагаючись якомога більше уникати відкритої полеміки.

⁴⁸ Хроматична аберація — оптичне спотворення, яке виникає через те, що промені різних кольорів (довжин хвиль) заломлюються лінзою під різними кутами. Унаслідок цього зображення має кольорові обідки або виглядає нечітким, оскільки фокус для кожного кольору зміщується. Дзеркальні (рефлекторні) телескопи, які використовують відбивання замість заломлення, позбавлені цього недоліку.

Попри те, що оптичні дослідження зробили Ньютона відомим у Лондоні, саме механіка поступово ставала центром його зацікавлень. У тиші свого кабінету він повертався до думок, що зародилися ще у Вулсторпі: про притягання, про рух планет і про зв'язок небесної механіки із землею. Ці ідеї довго існували лише у вигляді начерків і нотаток, але наприкінці 1670-х, а особливо у 1680-х роках, вони набули чіткої форми.

Ключовою подією стала зустріч Ньютона з астрономом Едмондом Галлеєм. У 1684 році Галлей відвідав Кембридж і поставив Ньютону пряме запитання: за яким законом повинна діяти сила на планети, щоб їхні орбіти були еліпсами, як стверджував Кеплер? Ньютон без вагань відповів: «За законом обернених квадратів». Ба більше, він запевнив, що вже довів це. Галлей був вражений — і наполегливо просив показати доведення.

Ця розмова стала поворотною. Ньютон знову взявся за свої старі записи й невдовзі написав невелику працю «De motu corporum in gyrum» («Про рух тіл по орбіті»), де стисло виклав основні ідеї. Галлей одразу зрозумів значущість цього тексту й переконав Ньютона розвинути його у великий твір. Ба більше, саме Галлей узяв на себе всі турботи про видання, включно з фінансовими витратами, оскільки Королівське товариство не могло оплатити друк.



Так почалася робота над «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» — «Математичними началами натуральної філософії». Упродовж двох із половиною років Ньютон зосереджено працював, майже повністю відсторонившись від зовнішнього життя.

Робота просувалася з рідкісною для Ньютона інтенсивністю. Він переписував цілі розділи, уточнював доведення, додавав нові частини. Через властиву йому підозріливість і страх критики він довго не наважувався показати рукопис колегам, але Галлею вдалося переконати його в необхідності публікації.

Улітку 1687 року тритомне видання було завершене й побачило світ.

Вихід книги збігся з бурхливими подіями в англійській історії — розпал конфлікту між королем Яковом II і університетами⁴⁹. Ньютон, який виступав за збереження автономії

⁴⁹ Конфлікт між королем Яковом II та англійськими університетами розгорівся у 1686–1687 роках і був частиною ширшого протистояння між королем, який намагався відновити католицький вплив у країні, та протестантським істеблшментом. Яків II, ревний католик, прагнув послабити обмеження для своїх одновірців, зокрема надати католикам доступ до державних посад і навчальних закладів, що суперечило чинним законам та університетським статутам.

У 1687 році монарх наказав прийняти до Магдален-коледжу в Оксфорді католицького кандидата на посаду ректора, обминаючи встановлену процедуру виборів. Коли колегія відмовилася виконати цей наказ, король розпорядився позбавити непокірних викладачів посад і вигнати їх з університету. Цей крок викликав обурення не лише в Оксфорді, а й у Кембриджі, де університетська спільнота сприйняла дії Якова як зазіхання на академічну автономію та протестантську традицію освіти.

Кембриджа, несподівано опинився втягнутим у політичну боротьбу й навіть здобув репутацію захисника академічних свобод. Усе це надало публікації «Начал» ще більшого символічного значення: книгу сприймали не лише як наукове, а й як інтелектуальне досягнення англійської нації.

«Математичні начала натуральної філософії» (1687) складаються з трьох книг, написаних сухим, геометричним стилем Евкліда, проте сповнених ідей, що докорінно змінили науку. Ньютон свідомо відмовився від «літературного» викладу, віддавши перевагу строгим аксіомам, означенням, лемам і доведенням. Його метою було не стільки «розповісти», скільки беззаперечно показати, що світ природи підпорядковується єдиним математичним законам.

У першій книзі Ньютон формулює три знамениті закони руху:

Закон інерції: тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, доки на нього не подіє зовнішня сила.

Закон сили: зміна руху пропорційна прикладеній силі й відбувається у напрямку її дії. У сучасній формі це $F = m a$.

Закон дії та протидії: кожній дії завжди протистоїть рівна й протилежна протидія.

Ці закони стали фундаментом класичної механіки, уперше задавши чіткі правила для опису руху будь-яких тіл.

У другій книзі Ньютон переходить до розгляду руху тіл у середовищі, що чинить опір — наприклад, у повітрі чи рідині. Тут він уперше формулює основи гідродинаміки та розглядає рух із законом опору, пропорційним швидкості або квадрату швидкості. Хоча ця частина менш відома широкому загалу, саме вона показує масштабність задуму: світ пояснювався не лише в ідеалізованих умовах, а й у реальних.

Третя книга — вершина всього твору. Вона присвячена «системі світу». Тут Ньютон викладає закон всесвітнього тяжіння: кожна частинка матерії притягує кожную іншу з силою, прямо пропорційною добутку їхніх мас і обернено пропорційною квадрату відстані між ними. На підставі цього закону він строго виводить закони Кеплера для руху планет, пояснює орбіти супутників, причини припливів і відпливів, навіть відхилення траєкторій комет. Уперше земне й небесне було поєднано в єдиній картині — те саме тяжіння визначало падіння яблука й рух Місяця.

Таким чином, «Начала» стали не просто книгою про механіку. Це була декларація нової натурфілософії: світ підпорядковується універсальним математичним законам, які можна пізнати розумом і виразити у строгих формулах. Для Європи XVII століття це означало справжню революцію: від розрізнених спостережень і емпіричних правил

Саме в цей час Ньютон, який був одним із керівників Триніті-коледжу, виступив проти втручання королівських уповноважених у справи університету. Його тверда позиція в захисті самоврядування та статутних прав Кембриджа принесла йому повагу серед колег і сформувала репутацію не лише вченого, а й захисника академічних свобод.

Цей епізод став частиною ширшого процесу, який завершився Славною революцією 1688 року — усуненням Якова II з престолу та утвердженням принципу обмеженої монархії й автономії наукових і навчальних установ у Британії.

наука перейшла до єдиної системи, у якій і небо, і земля підкоряються одній і тій самій раціональній логіці.

Вихід «Математичних начал» став подією не лише науковою, а й культурною. В Англії книга одразу викликала захоплення серед тих, хто зумів оцінити її масштаб. Галлей, який виступив видавцем і спонсором, із захопленням писав, що тепер усі явища природи зведені до «однієї спільної сили». Для Кембриджа й Королівського товариства Ньютон став постаттю національної гордості.



Однак сприйняття книги не було однозначним. Її стиль — сухий, геометричний, без пояснювальних коментарів — робив читання важким навіть для учених. Багато сучасників визнавали, що не здатні простежити всі доведення. Так, відомий астроном Джон Флемстід писав, що читання «Начал» потребує більше терпіння, ніж він має. Проте авторитет Ньютона зростає, і поступово цей твір став обов'язковою точкою відліку для всіх дослідників.

Особливо важливою була зміна, яку «Начала» внесли у відносини між експериментом і математикою. До Ньютона природознавство залишалося значною мірою описовим — воно спиралося на спостереження та узагальнення. Ньютон же показав, що природу можна обчислити: з кількох основних принципів вивести все розмаїття явищ. Це справило глибоке враження на сучасників.

Звісно, були й критики. Французькі науковці, виховані на картезіанській філософії з її уявленнями про вихори та ефіри, довго не визнавали ньютонівську механіку. У перші десятиліття саме Англія та протестантські країни Північної Європи стали головними носіями «ньютонівської віри». Лише на початку XVIII століття, значною мірою завдяки зусиллям Вольтера та інших популяризаторів, ідеї Ньютона завоювали й Францію.

Після виходу «Начал» авторитет Ньютона стрімко зростає. Поступово він відійшов від університетського життя й дедалі тісніше пов'язував свою долю з Лондоном. У 1696 році, завдяки протекції свого впливового друга Чарльза Монтегію, Ньютон отримав призначення на посаду наглядача (а згодом — керівника) Королівського монетного двору. Це призначення здавалося несподіваним для вченого, але виявилось надзвичайно важливим для держави: Англія перебувала в розпалі грошової реформи, пов'язаної з переплавленням і стандартизацією монет.

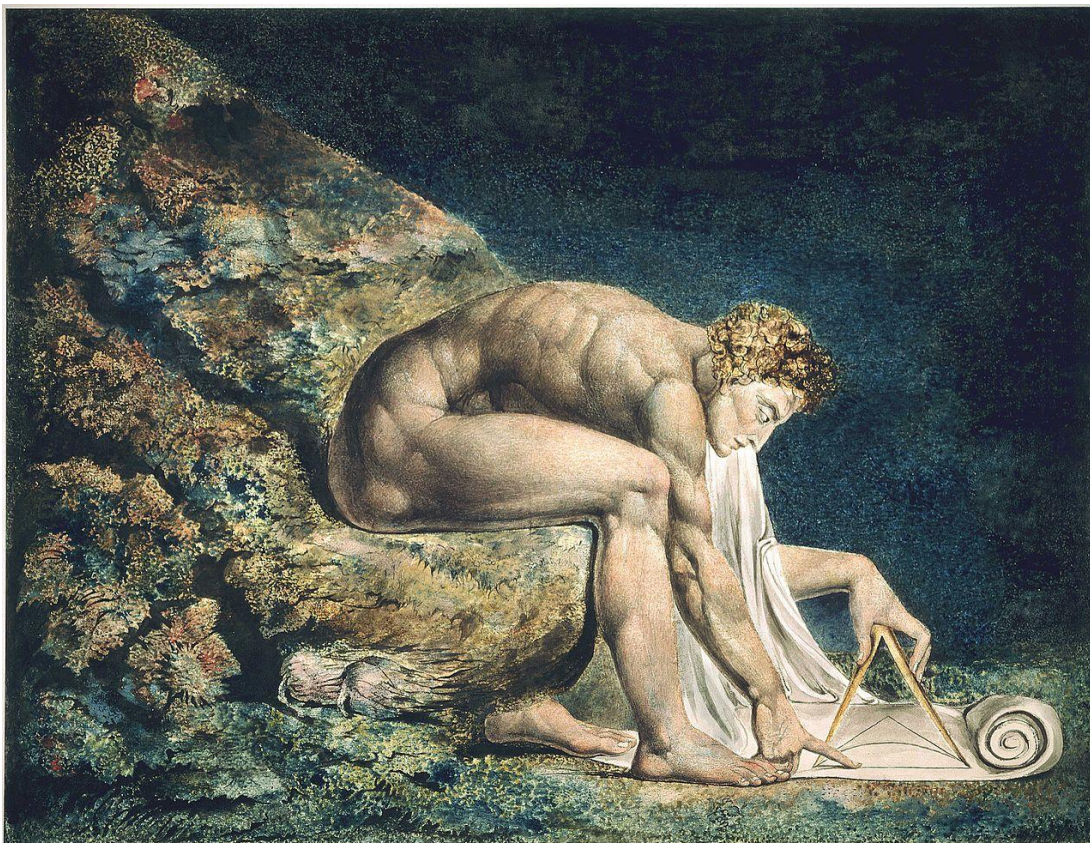
У цій ролі Ньютон виявив не менше строгості й педантизму, ніж у науці. Він навів лад на Монетному дворі, організував ефективний контроль за виробництвом і запровадив суворі заходи проти фальшування грошей. Ба більше, він особисто брав участь у розслідуваннях: відомо, що Ньютон не цурався допитів і навіть судових процесів проти

фальшивомонетників. Завдяки його зусиллям англійська грошова система набула стабільності й довіри, що сприяло розвитку економіки.

Водночас він активно включився в суспільне та наукове життя. У 1703 році Ньютона обрали президентом Лондонського королівського товариства, і він залишався на цій посаді до кінця життя. Своїм авторитетом він забезпечив панування «ньютонівської філософії» в наукових колах Англії й сприяв тому, що його ідеї стали стандартом для нового покоління дослідників.

У ці роки він нарешті опублікував те, що десятиліттями тримав у шухляді: у 1704 році вийшов його твір «Оптика». Ця книга була написана у стилі, зовсім не схожому на сухі «Начала»: замість геометричних побудов — ясний виклад дослідів і спостережень, багатий ілюстраціями та експериментальними деталями. «Оптика» закріпила за Ньютоном славу універсального вченого, чий інтереси охоплювали і математику, і механіку, і фізику світла.

Останні десятиліття життя Ньютона минули в атмосфері пошани й загального визнання. Він став постаттю майже легендарною ще за життя. У Лондоні його сприймали не лише як видатного вченого, а й як символ нової епохи — епохи розуму та наукового методу. У 1705 році королева Анна посвятила його в лицарі — це було безпрецедентно для науковця, адже лицарське звання традиційно надавали військовим або придворним. Відтоді він носив титул сера Ісаака Ньютона.



Уільям Блейк, Ісаак Ньютон, 1795 р.⁵⁰

⁵⁰ Монотипія «Ісаак Ньютон» створена англійським поетом, художником і гравером Вільямом Блейком у 1795 р., а пізніше, близько 1805 р., була перероблена та повторно надрукована. Цей твір



У побуті Ньютон залишався людиною замкненою, схильною до різких суджень і конфліктів. Відомі його тривалі суперечки з Лейбніцем щодо пріоритету у створенні математичного аналізу, що розгорнулися на початку XVIII століття й розділили науковий світ Європи на «ньютоніанців» і «лейбніціанців». Ці тяжби підточували його характер і посилювали підозрілість, однак не применшували авторитету

Ньютона в Англії: там він залишався беззаперечним арбітром наукової істини.

Його здоров'я поступово слабшало. Ньютон страждав від каменів у нирках, біль часто заважав йому працювати, але він зберігав ясність розуму до самої старості. Смерть застала Ньютона 20 березня 1727 року (за юліанським календарем, прийнятим тоді в Англії; за сучасним — 31 березня) у віці 84 років. Його похорон перетворився на національну подію: тіло вченого з почестями було поховане у Вестмінстерському абатстві поруч з англійськими королями та видатними державними діячами.

Готфрід Вільгельм Лейбніц

Готфрід Вільгельм Лейбніц народився 1 липня 1646 року в Лейпцигу, у сім'ї професора Фрідріха Лейбніца та його дружини Катерини Шмук. Батько помер, коли хлопчикові було лише шість років, тож турбота про його виховання повністю лягла на матір. Проте доля залишила йому безцінну спадщину — велику бібліотеку, що стала для майбутнього філософа й математика першим університетом.

Згодом сам Лейбніц згадував: «Коли я підріс, мені почало приносити надзвичайне задоволення читання різного роду історичних оповідей. Німецькі книги, які траплялися мені до рук, я не випускав, поки не дочитував їх до кінця. Латинською я займався спочатку лише у школі й, безперечно, просувався б зі звичайною повільністю, якби не випадок, що вказав мені цілком своєрідний шлях. У домі, де я жив, я натрапив на дві

входить до серії з дванадцяти так званих «великих кольорових відбитків» (Large Colour Prints), серед яких — і образ біблійного правителя Навуходоносора.

На відбитку Ньютон зображений оголеним, сидячим навпочіпки на скелястому виступі, вкритому водоростями, ніби на дні моря. Його увага зосереджена на кресленнях, які він наносить циркулем на сувій пергаменту. Циркуль, яким він користується, нагадує меншу версію інструмента, що його тримає Урізен — символ розуму й закону — у знаменитій блейківській гравюрі «Давній Днів» (The Ancient of Days). Для Блейка цей образ був полемічним висловлюванням. Художник глибоко заперечував ідеали Просвітництва, вбачаючи в раціоналізмі та науці загрозу живому духовному баченню світу. У власному коментарі до гравюри «Лаокоон» він писав: «Мистецтво — це Дерево Життя. Наука — це Дерево Смерті». Особливе відторгнення в нього викликала ньютонівська оптика, що, на думку Блейка, зводила сприйняття світу до «рослинного ока» — суто фізичного бачення, позбавленого духовного виміру. Ньютона Блейк сприймав як символ «одновимірного» раціонального мислення, протиставленого його власному «чотириразовому баченню» — багаторівневному духовному досвідові. Разом із Френсісом Беконом і Джоном Локком Ньютон утворює у Блейка своєрідну «пекельну трійцю» — уособлення матеріалістичної, бездушної науки. Через два століття цей образ надихнув шотландського скульптора Едуардо Паолоцці, який у 1995 р. створив бронзову скульптуру «Ньютон (за Вільямом Блейком)», встановлену на площі перед Британською бібліотекою в Лондоні (див. ілюстрацію нижче).

книги, залишені одним студентом. Одна з них була твором Лівія, інша — Хронологічна скарбниця Кальвіція. Щойно ці книги потрапили мені до рук, я їх проковтнув».



З Кальвіцієм юний Лейбніц упорався легко: у нього була німецька книга з всесвітньої історії, де викладалося приблизно те саме. Натомість читання Лівія виявилося набагато складнішим: він не розумів ані античних реалій, ані вишуканої риторики. Але хлопець знайшов власний спосіб — розглядав гравюри, читав підписи й просто перескакував через незрозумілі місця. Так, повертаючись до книги знову і знову, він поступово почав розуміти дедалі більше — без словника, лише завдяки наполегливості й уяві.

Учитель, помітивши ці заняття, жажнувся: на його думку, дитині не варто було «мучити себе» римськими істориками — краще б він читав *Orbis pictus* Коменського або Короткий катехізис Лютера. Але, на щастя, знайшлася людина, що зуміла розпізнати в хлопчику зародок таланту. Один освічений сусід — дворянин, який багато подорожував і приятелював із сім'єю, — заступився за Лейбніца. Саме він наполіг, щоб хлопчикові дозволили користуватися батьковою бібліотекою, яка доти зберігалася під замком.

Сам Готфрід згадував цей момент як одну з найважливіших подій дитинства: «Я торжествував, ніби знайшов скарб, бо палав нетерпінням побачити давніх авторів, яких знав лише на ім'я — Цицерона й Квінтіліана, Сенеки й Плінія, Геродота, Ксенофонта й Платона. Усе це я почав читати за покликом серця й насолоджувався дивовижним розмаїттям тем. Так я, не маючи ще дванадцяти років, вільно розумів латину і почав розуміти грецьку».

Ці слова підтверджували й сучасники: ще у шкільні роки Лейбніц дивував товаришів і вчителів надзвичайною пам'яттю та легкістю, з якою засвоював найскладніші тексти. У знаменитій Лейпцизькій школі Святого Фоми він особливо товаришував із братами Іттігами — старшими учнями, що вважалися найкращими у класі. До дванадцяти років він був визнаним знавцем латини, а до тринадцяти виявив і несподіваний поетичний хист.

З ранніх літ Лейбніц вражав не лише працьовитістю, а й винятковою самостійністю мислення. Уже у чотирнадцять років він почав замислюватися над тим, як можна було б систематизувати людські знання й класифікувати не лише окремі поняття, а й цілі судження. Учителі, звиклі до традиційних схоластичних схем, ставилися до таких ідей із недовірою, проте для Лейбніца це було лише початком шляху, що привів його до створення власної філософської та математичної системи.



У шкільні роки Лейбніц жадібно вбирав усе нове. Його інтереси далеко виходили за межі звичайної гімназійної програми. Окрім латинської поезії та риторики, він захоплювався богослов'ям і філософією, читав твори Лютера, численні полемічні трактати лютеран, реформатів⁵¹, католиків-єзуїтів і навіть янсеністів. Вихователі часом непокоїлися, що хлопець надто рано занурюється у суперечки, доступні швидше досвідченим богословам, ніж підлітку. Але, за словами самого Лейбніца, «мій дух не міг задовольнитися однобічним змістом» — він не обмежувався читанням у межах однієї традиції, а прагнув до всеохопного знання.

До чотирнадцяти років у нього прокинувся інтерес до логіки. Він намагався осмислити її не як набір правил для міркувань, а як науку про класифікацію самого людського мислення. Лейбніц винаходив власні схеми — «предикаменти суджень», які мали систематизувати складні ідеї так само, як традиційна логіка впорядковувала прості поняття. Учителі, звісно, вважали ці новації «передчасними» для школяра, але саме тут для майбутнього філософа починалася лінія роздумів, що приведе його до ідеї універсальної символічної науки.

Коли 1661 року Лейбніцеві виповнилося лише п'ятнадцять, він вступив до Лейпцизького університету, де колись навчався його батько. Там він вивчав філософію, античну літературу й право, швидко здобувши славу одного з найздібніших студентів свого покоління. Для Готфріда це стало початком нового етапу — від блискучих дитячих спроб до справжньої ученості, яка невдовзі виведе його у світ європейської науки й політики.

Сам факт такого раннього вступу був примітним: більшість студентів починали навчання значно пізніше. Спершу він записався на філософський факультет, де вивчав античних авторів, риторику й логіку. Його наставниками були відомі професори Якоб Томазій і Ергард Вайгель, які залишили глибокий слід у його розвитку.

Особливо важливою стала зустріч із ідеями Томазія. Цей професор умів поєднувати суворість схоластичної традиції з інтересом до нових течій європейської думки. Саме

⁵¹ Реформати — послідовники кальвінізму, одного з головних напрямів Реформації XVI століття, заснованого Жаном Кальвіном у Женеві. На відміну від лютеран, реформати наголошували на суворій дисципліні, ідеї «передвизначення» (попереднього рішення Бога про спасіння чи загибель кожної душі) та верховенстві Писання над церковною традицією. У Західній Європі кальвіністи створили впливові громади — насамперед у Швейцарії, Нідерландах, Шотландії та Франції (де їх називали гугенотами).

він сказав юному Лейбніцеві, що рано чи пізно той «здобуде славетне ім'я у світі науки». Для Лейбніца ці слова стали не лише заохоченням, а й викликом: уже тоді він відчував, що на нього чекає особлива доля.

В університеті Готфрід із головою поринув у заняття філософією та історією, але невдовзі його увага звернулася й до права. Він із дивовижною швидкістю засвоював латинські юридичні тексти, бачачи в них не просто зібрання правил, а прояв глибокого порядку людського суспільства. Уже вісімнадцятирічним він представив дисертацію «Про принцип індивідуумів» (*De principio individui*), у якій намагався осмислити питання про унікальність і тотожність кожної окремої сутності. Цей ранній трактат вразив професорів зрілістю міркувань: перед ними був не просто талановитий студент, а філософ у зародку.

Лейбніц продовжив навчання й в інших університетах Німеччини — у Єні та в Аланії (нині Альтдорф, неподалік від Нюрнберга). У Єні він познайомився з працями математика й філософа Ергарда Вайгеля, який пробудив у ньому інтерес до математики як універсальної мови науки. А в Альтдорфі Лейбніц захистив докторську дисертацію з права, хоча спершу сумнівався, чи варто йому йти цим шляхом: йому здавалося, що юридична практика надто обмежує дух і уяву. Попри це, його праця справила сильне враження, і факультет запропонував йому викладацьку посаду. Але Лейбніц відмовився: він відчував, що його шлях лежить поза академічною рутиною — у пошуку універсальної науки, яка поєднає філософію, математику, право й теологію.

Спочатку він займався юридичною та дипломатичною практикою, служачи різним німецьким князям і курфюрстам. У цих заняттях проявилася дивовижна риса Лейбніца — здатність поєднувати теоретичне знання з практичними завданнями. Для нього і право, і політика були частиною всеосяжного порядку — того самого «великого механізму світу», який він прагнув осягнути.



1672 року доля привела його до Парижа — у самий центр інтелектуального життя Європи. Там він опинився в гущі суперечок філософів і вчених, близько познайомився з декартівською традицією й уперше серйозно взявся за математику. Саме Париж став переломним моментом: тут Лейбніц зустрів Крістіана Гюйгенса — одного з найвидатніших учених XVII століття, який став його наставником у математиці. Під його керівництвом Лейбніц із разючою швидкістю опанував усе, що тоді було відомо про геометрію, алгебру й нову механіку.

Для Лейбніца це було відкриттям нового світу. Якщо раніше його розум живився переважно творами філософів, юристів і теологів, то тепер він побачив, що математика — це мова, здатна описувати не лише абстрактні міркування, а й саму тканину природи. Незабаром він почав розробляти власні ідеї в галузі нескінченно малих величин — ті самі, що згодом приведуть його до створення обчислення, незалежного від ньютонівського.

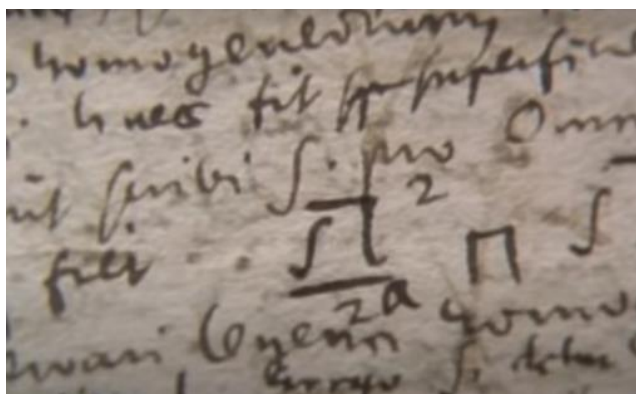
Паризькі роки (1672–1676) стали часом стрімкого інтелектуального змушнення. Лейбніц не просто навчався, а й вів активне дипломатичне життя, спілкувався з найвидатнішими

мислителями Європи, писав трактати з філософії, логіки, метафізики. Проте саме математика дедалі більше захоплювала його. У листах того часу він говорить про своє прагнення «створити універсальний алфавіт людського мислення» і «новий аналіз», який дозволив би міркувати так само точно, як виконуються арифметичні обчислення.

Коли 1676 року він повернувся до Німеччини й вступив на службу до ганноверського герцога, Лейбніц уже був іншою людиною: не лише філософом і юристом, а й математиком, готовим зробити відкриття, що змінять обличчя науки.

Математика Лейбніца стала вершиною його ранніх інтелектуальних пошуків. Уже в Парижі та в наступні роки він захопився ідеєю обчислення нескінченно малих величин, яке давало змогу досліджувати неперервні процеси так само строго, як і скінченні числа. Йому було зрозуміло, що традиційна алгебра й геометрія мають межі: щоб вивчати швидкість зміни, криві, площі під кривими та траєкторії руху, потрібно створити нову мову — мову зміни.

1675 року Лейбніц представив основи свого диференціального числення. Він увів позначення, знайомі нам і сьогодні: «d» для нескінченно малої різниці та знак інтеграла $\int$ для підсумовування нескінченно малих величин. Ці символи дозволяли записувати найскладніші задачі надзвичайно стисло й наочно. Лейбніц бачив у них не просто технічний прийом, а «універсальну мову природи»: за його задумом, за допомогою математики можна було виражати закони механіки, відношення в природі, а також міркувати про логіку та філософію.



Вперше введений знак інтеграла в записах Лейбніца, 29 жовтня 1675 року.

Система Лейбніца швидко довела свою силу. Він розв'язував задачі, які до нього здавалися нездійсненними для обчислення: знаходив дотичні до кривих, обчислював площі й об'єми, досліджував прискорення тіл і закони руху. У його руках математика перестала бути абстракцією — вона стала інструментом пізнання світу.

Та Лейбніц думав не лише про обчислення. Він прагнув створити універсальну символіку, що могла б стати основою для міркувань у будь-якій галузі знань. За його задумом, логіка, філософія й математика мали об'єднатися в одну спільну мову. Він мріяв про *characteristica universalis* — систему символів, за допомогою якої можна було б розв'язувати будь-які суперечки раціонально, подібно до того, як розв'язуються алгебраїчні рівняння.

Важливо підкреслити, що Лейбніц прийшов до своїх відкриттів незалежно від Ньютона, хоча обидва майже одночасно розробили основи аналізу. І якщо Ньютон користувався

переважно методом границь і геометричною інтуїцією, то Лейбніц створив струнку символічну систему, зручну для розрахунків і поширення знань. Саме його позначення й підходи зрештою стали загальноприйнятими в математиці.



Таким чином, зрілі роки Лейбніца поєднували в собі філософа, юриста, дипломата й математика. Його відкриття в галузі аналізу стали не просто інструментом для науковців XVII століття — вони відкрили епоху нового, символічного підходу до науки, заклавши підвалини розвитку математики та фізики XVIII століття і пізніше.

Математика була для Лейбніца не лише інструментом обчислень — вона була вікном у розуміння світу. Він вірив, що все у Всесвіті підпорядковане закономірностям, які можна виразити символами й числами. Звідси постала його знаменита концепція монад — неподільних, самостійних одиниць, з яких складається все суще. Кожна монада відображає Всесвіт зі своєї точки зору, а разом вони утворюють гармонійне ціле.

Саме тут виявляється зв'язок його філософії й математики. У математиці Лейбніц працював із нескінченно малими величинами, інтегралами та похідними — тобто з «мікроелементами» зміни. У філософії він розмірковував про «мікроелементи» реальності — монади. І в одному, і в іншому випадку він прагнув знайти закони, що роблять складні системи зрозумілими та передбачуваними.

Лейбніц бачив у математиці універсальну мову мислення. Він мріяв про те, щоб усі знання — про природу, закони суспільства чи логіку — можна було виразити символами й обчислити, подібно до чисел. Ця ідея — *characteristica universalis* — перегукувалася з його роботою над обчисленням нескінченно малих: так само, як формули аналізу дозволяють розв'язувати задачі механіки, символічна мова філософії, за задумом Лейбніца, мала давати змогу розв'язувати суперечки раціонально, без двозначностей.

Філософія Лейбніца, як і його математика, будувалася на точності та гармонії. Кожна частина системи мала узгоджуватися з іншими, подібно до елементів у рівнянні. Він прагнув знайти універсальний порядок, у якому думка, математика й природа не просто співіснують, а взаємно пояснюють одна одну.



Таким чином, зрілий Лейбніц постає не лише як великий математик XVII століття, що створив диференціальне та інтегральне числення, а й як мислитель, який прагнув поєднати числа, логіку й філософію в єдине ціле. Його праці демонструють, що в науці та філософії можна йти шляхом гармонії й системності, роблячи складне зрозумілим, а абстрактне

— практичним.

Після паризьких років і повернення до Німеччини Лейбніц дедалі більше зосереджувався на службі при ганноверському дворі, водночас продовжуючи наукову діяльність. Його робота поєднувала філософію, математику, дипломатичні місії та державні консультації. Попри щільний графік, Лейбніц не залишав наукових

досліджень: писав трактати з математики, фізики, логіки та філософії, активно листувався з ученими по всій Європі, обговорював відкриття, обмінювався ідеями.

Особливо плідними стали 1680–1690-ті роки. Лейбніц розвивав ідеї аналізу нескінченно малих величин, удосконалював методи обчислення, займався філософською систематизацією знань, створював концепцію універсальної мови мислення. У дипломатії він прагнув зміцнити союз між німецькими державами й шукати мирні розв’язання міжєвропейських конфліктів, виявляючи той самий системний підхід, який застосовував у науці.

З роками Лейбніц поступово відходив від активної державної служби, хоча продовжував консультувати герцога й підтримувати зв’язки з інтелектуальними колами Європи. Останні роки він присвятив систематизації своїх праць, підготовці рукописів і роздумам про філософію, логіку та математику.

Готфрід Вільгельм Лейбніц помер 14 листопада 1716 року в Ганновері у віці сімдесяти років. За життя він не здобув повного визнання, на яке заслуговував: багато його відкриттів було зрозуміло й оцінено лише пізніше — у XVIII столітті, особливо в контексті розвитку аналізу й філософії. Проте спадщина Лейбніца стала фундаментом для математики, логіки, філософії та науки загалом.

Інфінітезимальні методи

Метод вичерпування, розроблений в античній Греції, став одним із найважливіших кроків до розуміння границь і нескінченно малих величин. Найбільше він асоціюється з Архімедом, який застосовував його для знаходження площі і об’ємів — наприклад, для обчислення площі сегмента параболи або об’єму кулі. Архімед «вичерпував» фігуру послідовністю вписаних і описаних багатокутників, доводячи, що різниця між їхніми площами та шуканою величиною стає скінченно малою.

Хоча в середньовічній Європі цей метод значною мірою був забутий, інтерес до нього відродився в епоху Відродження. Велику роль у цьому відіграли перекладачі та коментатори античних текстів. Наприклад, Неофіт Рамузіо і Франческо Мавроліко в XVI столітті ретельно вивчали та адаптували грецьку геометрію. Франческо Коммандіно переклав латинською «Механіку» та «Про тіла, що плавають на воді» Архімеда, доповнивши їх коментарями, де докладно пояснював метод вичерпування. Ці видання стали доступними широкому колу європейських математиків і пробудили інтерес до античних способів роботи з нескінченно малими величинами. Схожими питаннями займався й Сімон Стевін у Нідерландах — хоча він працював у рамках арифметики та фізики, його ідеї неперервності та нескінченного поділу величин вплинули на формування нової науки про нескінченне.

З початку XVII століття з’являються спроби не лише відтворювати античний метод, а й узагальнювати його. Французький математик Жіль Персон де Роберваль та його сучасник Марен Мерсенн відіграли важливу роль у поширенні інтересу до цих питань. Але особливо помітними стали роботи П’єра де Мере, який намагався застосувати античні методи в новому алгебраїчному контексті.

Великий внесок зробив Лука Валеріо — італійський математик, який продовжив традицію Архімеда. У його трактаті *De centro gravitatis solidorum* (1604) він розвинув методи вичерпування, прагнучи до більшої загальності та застосовності. Валеріо фактично запропонував систематичне узагальнення архімедового методу, використовуючи його для різних класів тіл, включно з конічними та сферичними сегментами. Він заклав основи того, що пізніше стане аналітичним інтегруванням.

Одним із перших систематичних узагальнень методу вичерпування стало творіння Жилія де Сен-Венсана (*Opus geometricum ad mesolabium*, 1647). Він застосував розбиття площі під гіперболою на нескінченну кількість вузьких прямокутників, що призвело до перших здогадок про логарифмічні властивості цієї кривої. Де Сен-Венсан, по суті, наблизився до ідеї інтегрального логарифма і навіть обговорював «нескінченну суму нескінченно малих», хоча ще не мав потрібного аналітичного апарату для строгості.

Нарешті, у той же час Андре Таке, учень Сен Венсана, продовжив і розвинув його ідеї, особливо у напрямі інтерпретації площ під кривими через суму нескінченно малих прямокутників. Таке став одним із перших, хто відкрито трактував неперервну величину як складену з нескінченної кількості неподільних елементів — ідея, пізніше розвинена Кавальєрі.

Таким чином, до середини XVII століття з чисто геометричної процедури метод вичерпування перетворився на інтуїтивний інструмент аналізу, готуючи ґрунт для появи методу неподільних, диференціального та інтегрального числення.

З початку XVII століття в європейській математиці відбувається зсув: з'являються задачі, які не вкладаються в рамки класичної геометрії. Потрібно знайти швидкість руху в конкретний момент, визначити довжину кривої, площу під довільною функцією, описати миттєву зміну фізичних величин. Все це потребує нових підходів — і призводить до народження нових методів, у яких центральну роль починають відігравати нескінченно малі та нескінченно великі величини.

Одним із ключових нововведень стало систематичне використання нескінченно малих — величин, які неможливо зробити нульовими, але які щодо скінченних стають «зневажливо малими». Геометрично це виражалось, наприклад, у трактуванні дотичної як границі січної. Криву наближали ламаною лінією, складеною з нескінченної кількості дедалі коротших відрізків. При обчисленні площ під кривими вводилося поняття суми нескінченно малих прямокутників — по суті, перших інтуїтивних інтегралів.

Швидко накопичувалися нові результати: обчислювалися площі та довжини, визначалися швидкості й прискорення, знаходилися екстремуми та точки перегину. Вчені навчились нехтувати нескінченно малими вищих порядків — наприклад, якщо при обчисленні різниці квадратів довжини відрізків з'являвся член виду dx^2 , його спокійно відкидали як «занадто малий». Це здавалося успішною евристикою: незважаючи на відсутність строгого обґрунтування, методи працювали.

На цьому фоні ставлення до нескінченного почало змінюватися. Якщо в античності його сприймали як філософську абстракцію, що викликала побоювання і вимагала особливої обережності (у дусі апорій Зенона або аксіоматичного підходу Евкліда), то тепер нескінченне перестало лякати. Навпаки, воно стало зручним робочим інструментом.

Нескінченність входила в розрахунки так само природно, як числа чи геометричні фігури.

Однак це викликало запеклі суперечки про допустимість нових методів. Багато математиків і філософів з підозрою ставилися до ідеї нескінченно малого як до поняття, що не має чіткого визначення. Традиціоналісти дорікали прихильникам нових методів у тому, що ті жертвують строгістю заради практичної користі. Особливо сильна критика надходила від раціоналістів-картезіанців, які вважали, що істинна наука повинна спиратися лише на ясно і чітко усвідомлювані ідеї.

Серед критиків особливо виділявся Ісаак Барроу, учитель Ньютона. Він, хоча і просунувся в бік аналізу, намагався обґрунтувати його строго геометрично, посиляючись на границі та кінцеві побудови. У ще більшій мірі математичну строгість відстоював Рене Декарт, який відкидав методи неподільних і вважав, що використання нескінченно малих — не більше ніж «бухгалтерська хитрість», позбавлена логічного підґрунтя. Пізніше схожі звинувачення лунали і на адресу Ньютона, і на адресу Лейбніца: їх дорікали в тому, що їхні методи надто нечіткі, засновані на неясних поняттях і не дозволяють розрізнати, де закінчується математика і починається метафізика.

Тим не менше нові підходи мали й впливових прихильників. Так, Галілео Галілей і його учні (зокрема Кавальєрі та Торрічеллі) активно використовували аргументи, пов'язані з неподільними та нескінченно малими, щоб описувати рух, падіння тіл, траєкторії. Пізніше Ісаак Ньютон розвинув ці ідеї у свою теорію флюксій, а Готфрід Лейбніц — у диференціальне та інтегральне числення, стверджуючи, що нескінченно малі — це не фікції, а математичні сутності, піддатливі ясній і корисній символіці.

До середини XVII століття ситуація залишалася неоднозначною: строгості ще не вистачало, і багато прийомів викликали критику з позицій логіки. Однак успішність нових методів у фізиці, астрономії та механіці поступово зміщувала акценти на їхнє прийняття. Спори про нескінченно мале не завершилися й пізніше — вони тривали у XVIII та XIX століттях — але саме в XVII столітті було зроблено перший крок до нової математики, де нескінченність ставала не філософською загадкою, а продуктивним робочим поняттям.

Одним із найважливіших кроків у формуванні нової математики XVII століття стало поступове оформлення поняття функції — ідеї залежності однієї величини від іншої. Хоч сучасного визначення функції як відповідності між елементами двох множин ще не існувало, інтуїція залежності, правила зіставлення, використання формул — усе це активно розвивалося у працях математиків цього періоду.

В античній математиці залежність між величинами зазвичай виражалася геометрично: наприклад, через пропорції в «Началах» Евкліда або через координатні побудови у Аполлонія Перзького. Однак функція як об'єкт, що задається формулою, ще не виділялася. Епоха алгебри та координатної геометрії змінила це.

Важливий зсув відбувся завдяки працям Рене Декарта. У своєму творі *La Géométrie* (1637) він запропонував спосіб опису геометричних кривих за допомогою рівнянь, що пов'язують координати точок кривих. Це означало, що криву можна задавати формулою, а отже, поведінку однієї змінної виражати через іншу. Хоч сам Декарт не

вживав слова «функція», саме його підхід заклав основу аналітичного представлення залежностей — тобто того, що ми тепер називаємо функціями.

У тому ж напрямі працювали П'єр Ферма та Ісаак Барроу: вони все частіше розглядали величини як змінні — спершу лінійно, потім довільно — і прагнули виразити одну через іншу. Для Ферма функція — це передусім вираз, з яким можна працювати алгебраїчно: його метод знаходження дотичних та екстремумів вимагає оперування формулою, а не геометричним об'єктом.

До середини століття стало ясно, що багато проблем (знаходження площ, дотичних, швидкостей) можна розв'язувати, якщо є вираз — формула, що дає значення однієї змінної через іншу. Це стало повсякденною практикою у таких учених, як Джеймс Грегорі, Джон Валліс, Ісаак Ньютон та Готфрід Лейбніц. Вони вважали, що якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то можна обчислювати похідні, інтеграли, знаходити дотичні та площі.

Саме Лейбніц став першим, хто ввів саме слово *function* у його математичному значенні. У переписці 1670–1680-х років він використовував його для позначення величини, що залежить від іншої, зокрема — від положення точки на кривій. Це ще не був термін у строгому сучасному сенсі, але це був крок у бік формалізації.

Таким чином, у XVII столітті поняття функції переживає перехід від неявної залежності та геометричної інтерпретації до аналітичного представлення за допомогою формул. Поступово утверджується ідея, що не сама крива, а вираз, що її задає, є об'єктом дослідження. Саме це відкриває шлях до систематичного числення, до поняття похідної й інтеграла і, зрештою, — до аналізу в його сучасному вигляді.

Серед найважливіших досягнень XVII століття — розвиток уявлень про нескінченні послідовності та нескінченні числові ряди, які стали центральними інструментами в математичному аналізі, що народжувався цього часу. Якщо в античності нескінченне сприймалося як філософська абстракція, то тепер воно стало технічним прийомом, за допомогою якого математики розв'язують цілком конкретні задачі: обчислюють площі, довжини, значення функцій, наближують ірраціональні числа.

Однією з ключових фігур у цьому напрямі став Джеймс Грегорі. Саме він одним із перших систематично використовував нескінченні ряди й послідовності для обчислення значень тригонометричних функцій та наближень до чисел. Грегорі розробив розклади в ряди для арктангенса, синуса і косинуса, а також дав наближені значення числа π із високою точністю. Більше того, він запропонував геометричну інтерпретацію граничного переходу, наближаючи криві ламаними — тим самим передбачаючи ідею границі функції та похідної.

Грегорі також брав участь у розробці інтерполяційних формул — способів відновлення значень функцій за таблицею скінченних значень. Цей напрямок бере свій початок ще у Генрі Бріггса (Henry Briggs, бл. 1561–1630), автора перших таблиць логарифмів, який розробив чисельні методи для наближеного обчислення значень логарифмічних і тригонометричних функцій. Грегорі продовжив цю справу, прагнучи знайти загальне правило для чисельного наближення функції за її значенням у окремих точках. Ці роботи були важливі не лише для аналізу, а й для астрономії та навігації, де точні таблиці були надзвичайно затребувані.

Паралельно з Грегорі в Англії працював Джон Валліс, один із найвпливовіших математиків свого часу. У своїй книзі *Arithmetica Infinitorum* (1656) він ввів у вжиток нескінченні суми та добутки, зокрема знамениту формулу для π через нескінченний добуток

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

Валліс також запропонував методи інтегрування степеневих функцій і фактично використовував розклади в нескінченні ряди, хоча ще не оперував строгими поняттями збіжності та залишкових членів.

Роботи Грегорі та Валліса стали важливими кроками в розвитку аналітичних методів. Вони показали, що складні геометричні та алгебраїчні задачі можна зводити до операцій із нескінченними послідовностями чисел та членів формул. Незважаючи на ще слабку строгість (поняття границі, збіжності, залишкового члена лише формувалися), їхні методи демонстрували надзвичайну ефективність.

Таке оперування нескінченним не залишилося без наслідків. Саме ряд Тейлора, що з'явився в наступному столітті, узагальнить підхід Грегорі та Валліса. Але вже у XVII столітті стало ясно: ряд — це не просто сума, а новий спосіб розуміти функцію, виражати її аналітично і обчислювати її значення.

Хоча ім'я Йоганна Кеплера (1571–1630) передусім пов'язане з небесною механікою та законами руху планет, він також справив значний вплив на розвиток ранніх інтегральних методів. Здовго до появи строгих визначень інтеграла та нескінченно малих, Кеплер застосовував інтуїтивні геометричні міркування, близькі до того, що пізніше стане частиною інфінітезимального аналізу.

Головною його роботою в цій галузі стала книга *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Нова стереометрія винних бочок), видана в 1615 році. Причиною її написання стала практична задача: як точно вимірювати об'єми винних бочок неправильної форми. Замість того, щоб обмежитися простими циліндрами та призматичними тілами, Кеплер почав аналізувати фігури, що виникали внаслідок обертання площинних кривих — зокрема, еліпсів, парабол і гіпербол.

Він уперше систематично використав ідею розбиття об'єму на нескінченно тонкі зрізи — «диски» або «кільця», об'єм яких потім можна скласти. Цей метод, хоча й виражений у геометричних термінах, близький за духом до інтегрування за допомогою нескінченно малих елементів. Кеплер не користувався символічною мовою або позначеннями границь, але його аргументація спиралася на ідею граничного переходу: при нескінченно малій товщині зрізів сума їхніх об'ємів наближалася до об'єму тіла.

Цікаво, що Кеплер працював без строгого апарату доведень, і його методологію сучасники часто сприймали як більш «механічну» або емпіричну, ніж власне математичну. Тим не менше, по суті він передбачив інтегральне числення, причому не в абстрактній формі, а через реальні задачі: вимірювання бочок, тіл обертання, об'ємів куполів і арок.

Книга Кеплера користувалася широкою відомістю, особливо в німецькомовних країнах, і вплинула на формування школи, де пізніше працюватимуть Кавальєрі, Торрічеллі та інші послідовники методу неподільних. Його підхід також укріпив уявлення про те, що об'єкти складної форми можна аналізувати через суму найпростіших елементів, нехай навіть нескінченно малих.

Таким чином, Кеплер став однією з проміжних фігур між геометричною традицією античності та аналітичним мисленням Нового часу. Його методи ще були наївними за формою, але глибокими за змістом: ідея переходу від цілого до нескінченно малих частин і назад стане фундаментом математичного аналізу, який дозріє вже в наступному поколінні.

Одним із головних етапів на шляху до інтегрального числення стала розробка методу неподільних, або, як його називали в XVII столітті, методу «інфінітезимальних геометрій». Центральна фігура цього напрямку — Бонавентура Кавальєрі, учень Галілея та викладач математики в Болоньї.

У трактаті *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635, розширене видання — 1653) Кавальєрі розвинув ідею, згідно з якою фігуру (наприклад, площу або об'єм) можна розглядати як суму нескінченної множини «неподільних» елементів: у випадку площинних фігур — ліній, у випадку тіл — площин. Наприклад, він уявляв паралелограм як сукупність нескінченної кількості паралельних відрізків і стверджував, що площі порівнювані, якщо відповідні перерізи (неподільні) співвідносяться певним чином.

Це був принциповий зсув у мисленні. Кавальєрі відмовився від античної строгості, заснованої на границі та методі виснаження, на користь набагато більш «плідного», але менш строго обґрунтованого підходу. Він вважав допустимим складати нескінченну кількість неподільних без уточнення механізму такої суми. Сам він називав їх *indivisibilia*, а не «нескінченно малими», підкреслюючи, що йдеться про геометричні елементи, а не числові величини.

Хоча в його трактуванні не було точної процедури складання, результати, отримані Кавальєрі, були вражаюче точними. Він обчислював площі під різними кривими, об'єми тіл обертання, давав узагальнення, які пізніше отримають аналітичне обґрунтування. Особливо важливо, що вперше з'явилася методика систематичного обчислення площ і об'ємів для складних фігур, що не зводилася до класичних архімедових прийомів.

Кавальєрі став ініціатором нової школи, яка поєднувала прагнення до узагальнення з готовністю до експерименту в математиці. Його методи викликали різку критику з боку більш «консервативних» математиків, які побоювалися підриву геометричної строгості. Основний докір — відсутність строгих визначень і те, що нескінченні суми можуть призводити до протиріч.

Тим не менше, вплив Кавальєрі був значним. Його учні та послідовники — особливо Еванджеліста Торрічеллі — розвивали метод неподільних у нових напрямках. А такі математики, як Ферма та Паскаль, почали застосовувати його ідеї до власних задач, розширюючи арсенал геометричних та алгебраїчних засобів.

Таким чином, метод неподільних став перехідною формою між геометричною інтуїцією античності та аналітичним апаратом майбутнього аналізу. Він ще не був строго обґрунтований, але давав практичний результат і змінював саме уявлення про допустимі методи в математиці. Завдяки Кавальєрі інфінітезимальні елементи стали частиною повсякденної роботи математика, відкривши дорогу Ньютону та Лейбніцу.

Еванджеліста Торрічеллі, учень Галілея та послідовник Кавальєрі, став одним із перших, хто застосував метод неподільних до справді складних задач і наблизився до ідеї аналітичного інтегрування. Він не лише удосконалив техніку свого вчителя, а й почав використовувати мову алгебри для опису кривих і обчислень, що передбачає майбутні методи математичного аналізу.

Найбільшу відомість Торрічеллі здобув як фізик та винахідник барометра, але його математичні праці, особливо *Opera geometrica* (1644), становлять справжній міст між геометрією Кавальєрі та аналітичним підходом Ньютона. Він розглядав криві як результат руху, трактував їх як неперервні лінії, що складаються з нескінченно малих відрізків, і застосовував метод неподільних для обчислення площ під кривими та об'ємів тіл.

Торрічеллі одним із перших усвідомив, що навіть невласні фігури — наприклад, фігури з нескінченною площею, але скінченним об'ємом — можуть бути предметом строгого обчислення. Так, він досліджував тіло, утворене обертанням гіперболи $y = 1/x$ (при $x \geq 1$) навколо горизонтальної осі. Отримана фігура, пізніше відома як ріг Гавриїла, мала дивовижні властивості: її об'єм скінченний, але поверхня нескінченна. Пізніше цей приклад став відомим у математиці як парадокс маляря: фігуру можна «заповнити» фарбою, але не можна пофарбувати зовні, оскільки площа поверхні нескінченна⁵². Це глибоко неінтуїтивна властивість стало важливою ілюстрацією можливостей (і небезпек) роботи з нескінченностями.



Фігура, породжена гіперболою, стала знаковим прикладом граничних випадків інфінітезимальних методів: вона підкреслювала необхідність обережного поводження з нескінченними сумами і стимулювала подальші дослідження в галузі збіжності та строгості.

Особливість підходу Торрічеллі полягає в чіткій взаємозв'язку між геометрією та фізикою. Його інтерес до динаміки, тиску та швидкості знаходив відображення в математиці: він прагнув виразити фізичні процеси через геометричні та числові відношення, що особливо помітно в його аналізі руху рідини по трубці, заснованому на законах швидкості витікання (пізніше названих «законом Торрічеллі»).

Як і Кавальєрі, Торрічеллі ще не мав поняття границі, але його методи були значно ближчими до аналітичного мислення. Він використовував алгебраїчні вирази для опису

⁵² Розв'язання парадокса маляря: оскільки посудина, побудована описаним способом, звужується донизу до нескінченно малих діаметрів, то при «заливанні» в неї фарби ця фарба просто не «протече» в ті її області, діаметр яких менший за діаметр молекули фарби.

кривих, здійснював обґрунтовані перетворення, а в деяких випадках навіть вдавався до символічних інтегралів, хоча ще без символу інтеграла.

Торрічеллі зазнавав критики — як за використання неподільних, так і за, здавалося б, парадоксальні результати при роботі з нескінченними величинами. Проте його успіхи у розв’язанні конкретних задач і новий рівень алгебраїзації геометрії забезпечили його методам авторитет і широке поширення в Італії та за її межами.

Таким чином, Торрічеллі виявився перехідною фігурою між геометричною та аналітичною традиціями. Його внесок у розвиток методу неподільних, поєднаний із фізичною інтуїцією та алгебраїчною технікою, робить його одним із тих, хто підготував ґрунт для строгого інтегрального числення кінця XVII століття.

П’єр Ферма розробив ряд оригінальних методів для обчислення площ під кривими та розв’язання задач про дотичні й екстремуми — задовго до появи формального диференціального та інтегрального числення. Він виходив із алгебраїчного підходу: досліджував степеневі залежності виду $y = x^n$ і прагнув знайти суму значень функції на множині дискретних точок. Його метод полягав у розбитті інтервалу на рівні частини та обчисленні суми значень функції, що нагадує сучасні інтегральні суми. Незважаючи на відсутність концепції границі, Ферма навчився знаходити площі під степеневими кривими та сумувати відповідні ряди, отримуючи, наприклад, $\int x^n dx \sim x^{n+1}/(n+1)$, хоча він не використовував ні символу інтеграла, ні сучасного розуміння нескінченно малих величин.

Метод Ферма в чомусь близький до методу Кавальєрі, але на відміну від геометричних побудов італійської школи, Ферма віддавав перевагу обчисленням із конкретними алгебраїчними виразами. Він запропонував метод невизначених коефіцієнтів, за допомогою якого розв’язував задачі про квадратури, і навіть сформулював правило для знаходження дотичних до кривих, аналогічне диференціюванню: якщо $y = f(x)$, то дотична наближається до

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

— хоча Ферма не користувався границями і формально не писав граничних переходів. Натомість він порівнював вирази до й після «відкидання» нескінченно малих, що стало важливим прототипом майбутніх методів Ньютона і Лейбніца.

Інший великий француз того часу — Блез Паскаль — зосередився на дискретних задачах та арифметичних сумах, особливо у зв’язку з задачами про циклоїду та теорією ймовірностей. У знаменитому спорі про площу під циклоїдою Паскаль запропонував строгий розв’язок, заснований на розкладанні фігури на елементарні частини, і продемонстрував, як можна сумувати нескінченні ряди, не вдаючись до геометрії.

Циклоїда — крива, описувана точкою на колі, що котиться по прямій — стала символом математичних пошуків XVII століття. На питання про площу під одним арком циклоїди Паскаль дав відповідь, еквівалентну потрібній площі відповідного кола, що вимагало не просто геометричних побудов, а й алгебраїчного опрацювання суми нескінченно малих елементів. Цей приклад — важливий крок на шляху до інтегрального числення, але поки що ще без систематичної теорії.

Обидва математики — Ферма і Паскаль — опинилися серед тих, хто продемонстрував: інфінітезимальні методи, навіть якщо вони не були строго обґрунтовані, можуть давати надійні та точні результати. Їхні роботи підкреслюють, що розвиток аналізу відбувався не стільки від єдиного методу, скільки від множини окремих розв’язків задач, які згодом почали складатися в єдину теорію.

Ферма і Паскаль по-різному підходили до математики: Ферма — через символічні обчислення та оптимізаційні задачі, Паскаль — через дискретну арифметику й ймовірності. Але саме їхнє поєднання підготувало фундамент для майбутньої уніфікації в численні Ньютона та Лейбніца.

Особливий інтерес для історії інфінітезимальних методів становить метод нормалей, запропонований Декартом. На відміну від сучасного підходу, коли дотична визначається як границя січної, Декарт будував перпендикуляр (нормаль) до шуканої дотичної — як більш визначений об’єкт. Його ідея полягала в наступному: якщо знайти нормаль до кривої, що проходить через задану точку, то дотична буде просто перпендикулярною до цієї нормалі. Таким чином, задача про дотичну переводилася на задачу побудови та розв’язання алгебраїчного рівняння, яке включало координати точки та параметри нормалі.

Серед багатьох ідей, випробуваних у XVII столітті для розв’язання нових задач, виділяється метод, розроблений П’єром Ферма для знаходження максимальних і мінімальних значень функцій, а також дотичних до кривих — тобто теоретично важливих задач, що виникали в механіці, оптиці, геометрії та астрономії.

Метод Ферма базувався на простому, але новаторському прийомі: розглядати зміну аргументу на нескінченно малу величину та порівнювати отримані вирази. Нехай, наприклад, задана алгебраїчна залежність $y = f(x)$. Ферма пропонує замінити x на $x + e$, де e — «мале додавання» (невизначено мала величина), і вивчити різницю $f(x + e) - f(x)$. Якщо потрібно знайти екстремум, він припускав, що значення функції повинно перестати зростати або спадати, тобто різниця між значеннями з додатком і без нього повинна звертатися в нуль (або стати «незначною»).

Ферма не оперував границями і не визначав похідні — він не будував загальної теорії зміни. Натомість він усував малі прирости з рівняння (по суті, відкидаючи члени, що містять e у першому та вищих степенях), а потім знаходив умови рівності. Цей прийом, по суті, працював так само, як у пізнішій «нулевій похідній в екстремумі», але без обґрунтування та формалізму.

Наприклад, для знаходження максимуму добутку $x(a - x)$ Ферма вважав $(x + e)(a - x - e) - x(a - x) = 0$, спрощував вираз, відкидав другі та вищі степені e і знаходив умову для x . Цей підхід він називав «методом дотичної», а іноді — «методом аналізу екстремумів».

У задачах про дотичні до кривих Ферма міркував подібним чином: вважав, що дотична проходить через нескінченно близькі точки кривої, і використовував ту саму процедуру порівняння $f(x + e)$ і $f(x)$, щоб знайти нахил січної, що наближається до дотичної.

Хоча сучасному погляду може здатися, що в цих міркуваннях бракує строгості, для XVII століття метод Ферма був потужним інструментом, що давав точні відповіді. Більше

того, його прийоми вплинули як на Ньютона, так і на Лейбніца — обидва прямо посилалися на роботи Ферма у своїх ранніх працях.

Важливо зазначити: на відміну від геометрично орієнтованих попередників, таких як Архімед або Кавальєрі, Ферма мислив алгебраїчно. Він не вдавався до фігурних побудов, а намагався працювати виключно через обчислення з символами.

Диференціальне та інтегральне числення

До середини XVII століття в європейській математиці вже існував багатий арсенал методів роботи з нескінченно малими величинами. Математики вміли наближено обчислювати площі, об'єми, швидкості зміни та дотичні до кривих. Проте, попри ефективність цих прийомів, їм бракувало єдиної теоретичної основи та чіткого поняття похідної. Створення диференціального та інтегрального числення — заслуга двох великих мислителів: Ісаака Ньютона та Готфріда Вільгельма Лейбніца. Вони незалежно один від одного розробили основи аналізу, надавши йому різних форм, підходів і філософії, заклавши фундамент для подальшого розвитку всієї математики Нового часу.

Ісаак Ньютон почав розробляти методи аналізу ще у 1660-х роках, під час Великої чуми, у період вимушеної самоізоляції у Вулсторпі. Він виходив із задач механіки та руху, розглядаючи величини як функції часу. Для опису миттєвих швидкостей зміни він увів поняття флюент (fluents) — величин, що змінюються з часом (наприклад, координата тіла), і флюксій (fluxions) — миттєвих швидкостей зміни цих величин, тобто прообразів похідних.

Основою його підходу було уявлення про рух і зміну як неперервний процес. Він розвинув методи знаходження флюксій (аналогів похідних), обчислював екстремуми, дотичні, використовував степеневі ряди для розкладу функцій і навіть вивів похідні стандартних елементарних функцій.

Найважливіше відкриття Ньютона — зв'язок між диференціюванням і інтегруванням як оберненими процесами, тобто прообраз основної теореми аналізу. Хоча він уникав символічного запису й прагнув викладати ідеї в геометричній формі, його техніка була надзвичайно потужною.

Головні праці Ньютона, пов'язані з аналізом: *De methodis serierum et fluxionum* («Про методи рядів і флюксій», бл. 1671) — тут уперше викладено метод флюксій (опубліковано лише 1736 р.), та *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* («Математичні начала натуральної філософії», 1687) — математична основа механіки, де застосовано аналіз, хоч і замаскований під геометрію.

Ньютон розглядав нескінченно малі як реальні, але «миттєві» зміни величин — він не прагнув строго обґрунтувати їхнє існування, а виходив із фізичної інтуїції, апелюючи до понять швидкості й руху.

Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716) почав працювати над численням нескінченно малих приблизно в той самий час, що й Ньютон. Проте його підхід відрізнявся за стилем і метою: Лейбніц створював універсальну математичну мову для опису процесів зміни. Він розробив аналітичну, символічну форму числення, і саме вона стала основою всього подальшого розвитку аналізу.

Ключовими нововведеннями Лейбніца було введення позначень диференціалів dx , dy , та похідної як їхнього відношення dy / dx , запровадження знака інтеграла $\int$ — стилізованої латинської літери S (від *summa*), розробка правил диференціювання степеневих, показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій, формалізація взаємозв'язку між диференціюванням і інтегруванням.

Найважливіші його публікації — *Nova methodus pro maximis et minimis...* (*Acta Eruditorum*, 1684) — перше опубліковане викладення методу диференціального числення, та *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (1686) — виклад основ інтегрального числення.

Лейбніц розглядав нескінченно малі величини як корисні фікції — подібно до того, як у механіці говорять про «ідеальні точки» чи «абсолютну жорсткість». Це філософськи відрізняє його трактування від ньютонівського.

Після публікацій Лейбніца його методи швидко поширилися на континентальну Європу. Ключову роль у цьому відіграли швейцарські математики, насамперед Йоганн Бернуллі — один із найяскравіших учнів і популяризаторів лейбніцівського аналізу. Він перетворив диференціальне числення на універсальний інструмент розв'язання задач механіки, оптики й геометрії, розв'язував задачі на дотичні, кривизну, максимуми й мінімуми, прискорення, траєкторії руху. 1696 року Йоганн Бернуллі опублікував знамениту задачу про брахістохрону — криву найшвидшого спуску. Це стало однією з перших варіаційних задач, і її розв'язання дало поштовх до розвитку числення варіацій. Він також започаткував систематичне викладання аналізу, уклавши підручники й задачники, поширюючи ідеї Лейбніца в університетах Німеччини, Швейцарії та Голландії.

Школа Лейбніца й Бернуллі виявилася надзвичайно плідною. З неї вийшли Якоб Бернуллі — брат Йоганна, піонер теорії рядів і комбінаторики; Герман і Данієль Бернуллі — які застосували аналіз у гідродинаміці та теорії коливань; Леонард Ейлер, учень Йоганна Бернуллі — постать, що перетворила аналіз на мову всієї науки XVIII століття.

Широта й універсальність символічної форми числення Лейбніца зробили його підхід зручним для широкого застосування, і саме він став домінуючим у Європі.

Диференціальне та інтегральне числення виникло у XVII столітті як блискуче завершення багатовікових пошуків способів опису руху, зміни й неперервності. Ісаак Ньютон надав аналізу фізичну й геометричну інтерпретацію, тоді як Готфрід Лейбніц — абстрактну символіку та алгебраїчну міць.

Суперечка між Ньютоном і Лейбніцем

Одна з найгостріших і найвідоміших суперечок в історії науки — це спір про пріоритет у відкритті диференціального та інтегрального числення між Ісааком Ньютоном і Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем. Цей конфлікт стосувався не лише наукової першості, а й ширших питань: що означає «винайти» математичну ідею, як її документувати й публікувати, і чи можна вважати «відкриття» здійсненим, якщо воно залишилося лише в записниках.

Ньютон почав розробку свого методу флюксій приблизно у 1665–1666 роках, під час вимушеної ізоляції через епідемію чуми. Він описував його як аналіз «плинних величин» (fluent quantities) і їхніх «швидкостей плину» (fluxions). Проте, як він сам згодом визнав у листі до Лейбніца (1676), довго не публікував ці результати: «Я тримав свої методи в таємниці... щоб уникнути суперечок і протиріч, яких я завжди боявся» (лист Ньютон — Лейбніц, 24 жовтня 1676 р.).

Лейбніц же почав працювати над власною версією числення з 1673 року й опублікував її в *Acta Eruditorum* у 1684 році. Його мова — особливо позначення $\int$ і dx — виявилася значно зручнішою, ніж ньютонівські «періоди флюксій». Ньютон також користувався інтегралами, але записував їх у геометричній формі, часто без чіткої символіки.

До кінця XVII століття вчені зберігали взаємну ввічливість. Проте в 1699 році англійський математик Джон Кевелл звинуватив Лейбніца в запозиченні методу числення у Ньютона. У статті для *Philosophical Transactions* він писав: «Містер Лейбніц запозичив свої методи з листів Ньютона, які той надсилав йому за десятиліття до цього».

Лейбніц сприйняв це як звинувачення в плагіаті й подав офіційну скаргу до Лондонського королівського товариства. Відповіддю став звіт, складений у 1712 році спеціальною комісією — *Commercium Epistolicum*, — метою якого було довести, що Ньютон був першим. Проте автором ключових формулювань цього звіту був сам Ньютон. Один із фрагментів документа звучав однозначно: «Ми вважаємо, що містер Лейбніц запозичив метод флюксій у сера Ісаака Ньютона — як із його листів, так і з інших джерел, лише вдягнувши його в іншу термінологію».

Це фактично була інституціоналізована атака. Німецькі математики, серед яких брати Бернуллі, стали на захист Лейбніца. Якоб Бернуллі писав: «Ми з братом переконані, що Лейбніц дійшов своїх відкриттів самостійно. Його методи, як і його символіка, істотно відрізняються від ньютонівських».

Важливим епізодом у розвитку конфлікту став обмін листами між Лейбніцем і Ньютоном у 1676 році, організований через Генрі Олденбурга, секретаря Лондонського королівського товариства. Ньютон був надзвичайно обережним у цих листах, висловлювався туманно й не розкривав повністю своїх методів. Один зі своїх результатів він навіть зашифрував анаграмою, щоб пізніше довести пріоритет. У листі він писав: «Una methodus fluxionum, et serierum infinitarum... Sed scribo sub rosa» — («Один метод флюксій і нескінченних рядів... Але пишу під трояндою», тобто конфіденційно).

Після смерті Лейбніца у 1716 році суперечка поступово стихла, але її наслідки були серйозними. В Англії на десятиліття запанувала ізоляція: ньютонівська термінологія й методи виявилися занадто громіздкими, і британська математика сповільнила свій розвиток. Тим часом на континенті лейбніцівська символіка була прийнята як основа нового математичного аналізу. Як писав історик науки Моріс Клайн: «Англія майже на сто років випала з головного потоку розвитку аналізу через пріоритет Ньютона, який ніхто не заперечував, але й не міг плідно використати».

Сучасні історики майже однастайні: обидва вчені незалежно прийшли до відкриття числення. Ньютон зробив це раніше, але Лейбніц першим оформив відкриття у

придатній для широкого застосування формі. Як зазначав математик Карл Бойєр: «Якщо Ньютон був батьком числення, то Лейбніц був його вихователем».

Ця суперечка стала поворотним моментом в історії науки, виявивши значення не лише первинного відкриття, а й його публікації, мови наукового спілкування та ролі спільноти у визнанні наукових досягнень.

Жиль де Роберваль

Жиль Персон де Роберваль (1602–1675) народився в селі Роберваль поблизу Бове, звідки й походить його відоме ім'я (при народженні він носив прізвище Персон або Персоньє). Як і Рене Декарт, Роберваль брав участь в облозі Ла-Рошелі 1627 року — одному з ключових епізодів французьких релігійних воєн.



Фрагмент картини Шарля Лебрена з портретом Жиль Персона де Роберваля (1602–1675) на церемонії відкриття Французької академії наук, 1666 р.

У тому ж році він переїхав до Парижа й невдовзі розпочав викладацьку діяльність. 1631 року Роберваль був призначений професором філософії в коледжі Жерве (Collège Gervais), а з 1634 року обійняв кафедру математики в Колеж де Франс — одному з найпрестижніших навчальних закладів Франції. Ця кафедра мала незвичну умову: її володар був зобов'язаний регулярно пропонувати математичні задачі, і якщо хтось розв'язував їх краще, мав поступитися місцем. Попри це, Роберваль утримував посаду до самої смерті, незважаючи на конкуренцію.

Він був активним учасником кола Мерсенна. Водночас стосунки з Декартом у Роберваль були напруженими: він критикував аналітичні методи Декарта, зокрема їх застосування до геометрії, і вороже поставився до його зауважень щодо методів, розроблених самим Робервалем і П'єром Ферма.

Роберваль належить до тих учених, які напередодні створення математичного аналізу займалися задачами, що сьогодні розв'язуються за допомогою понять границь, нескінченно малих і інтегрування.

Одним із головних напрямів його досліджень було визначення площ і об'ємів складних фігур, зокрема під кривими, а також об'ємів тіл обертання. Він розробив метод неділимих, який застосовував для квадратур (обчислення площ) і кубатур (обчислення об'ємів). Незалежно від нього аналогічний підхід опублікував італієць Бонавентура Кавальєрі, через що Роберваль значною мірою втратив визнання пріоритету. Проте саме Роберваль уперше в 1634–1636 роках обчислив площу під циклоїдою — кривою, яку описує точка кола, що котиться по прямій, — а також об'єми тіл, утворених обертанням цієї кривої.

У зв'язку із задачею про циклоїду Роберваль наприкінці 1630-х років опублікував перший в історії надрукований графік тригонометричної функції — синусоїди. Це стало важливим кроком у розвитку візуального представлення функцій.

Одним із найбільших його математичних досягнень був кінематичний метод побудови дотичної до кривої. Роберваль розглядав криву як результат руху точки, положення якої задається як сума двох або більше простих рухів. Цей метод, опублікований 1640 року, став потужним інструментом для знаходження дотичних — найважливішої задачі майбутнього диференціального числення. Він застосовувався Робервалем до широкого класу кривих, проте не мав універсального алгоритму, тож виявився менш ефективним, ніж аналітичні методи, розвинені пізніше.

Крім того, він увів «робервалеві лінії» (robervallian lines) — криві, за допомогою яких можна отримати скінченні площі, еквівалентні ділянкам між певними кривими та їх асимптотами. Ці криві досліджував і Торрічеллі, назвавши їх на честь Роберваля.

Цікавим геометричним нововведенням стала строфоїда, яку вперше дослідив Роберваль (він називав її «птероїдою» — від грец. πτερόν, «крило»). Її побудову та властивості він аналізував у межах своїх кінематичних підходів.

Роберваль також зробив внесок у геометричну статику. Його «Трактат із механіки», на жаль, не зберігся, проте частини були включені до збірки Марена Мерсенна «Всеосяжна гармонія» (Harmonie universelle, 1636). У цій роботі Роберваль узагальнив механіку

Стевіна, чітко сформулювавши два принципи: закон рівності моментів сил і закон паралелограма сил, який він першим трактував як універсальний закон статички.

Він також винайшов точні терези Роберваля, побудовані на шарнірному паралелограмі. Цікаво, що за рівних тягарів терези залишаються врівноваженими незалежно від положення точок підвісу — властивість, яку Роберваль



виклав у вигляді парадоксу без доведення. Лише 1804 року Л. Пуансо дав строге пояснення цього ефекту за допомогою геометричної статки.

Окрім математики та механіки, Роберваль цікавився астрономією й космологією. Він підтримував геліоцентричну систему Коперника та висловлював ідеї про всесвітнє тяжіння між тілами задовго до Ньютона.

Попри важливість його відкриттів, Роберваль часто тримав свої методи в таємниці, використовуючи їх лише в наукових диспутах або змаганнях. Така схильність до приховування, а також пізні чи відсутні публікації призвели до того, що багато його ідей було приписано іншим, хто активно друкувався.

Йоганн Худде

Йоганн ван Ваверен Худде (1628–1704) — постать, що втілює типовий для Нідерландів XVII століття синтез ученого, державного діяча й громадянина, небайдужого до долі суспільства. Народився він у Роттердамі й спочатку вивчав право в Лейденському університеті. Проте невдовзі під впливом Франса ван Схоотена — одного з головних популяризаторів математики Декарта — Худде перейшов до математики й став одним із провідних представників «лейденської школи» алгебри.

Згодом Худде проявив себе не лише як учений, а й як активний політик і просвітник. Із 1672 року протягом понад тридцяти років він був бургомістром Амстердама й одночасно керівником Ост-Індської компанії. У цей період він дбав про благоустрій міста: за його розпорядженням міські канали почали очищати під час припливів, а стічні води — відводити за межі міста. Саме він запровадив гігієнічні норми для питної води та ініціював встановлення так званих «каміння Худде» — маркерів рівня води, які згодом стали основою єдиної системи відліку висот у Нідерландах і Європі (NAP).



Єдиний збережений донині «камінь Худде» (фото [Hans Erren](#)).

Худде також запам'ятався як переконаний противник забобонів. До кола його близьких знайомих входив філософ Бальтазар Беккер, який прославився сміливим трактатом «Зачарований світ», у якому критикував інститут судів над відьмами. Худде активно

підтримував Беккера в цій боротьбі й виступав проти переслідування «відьом» та втручання церкви в справи науки.



Портрет роботи Міхела ван Мюсхела

Інженерні досягнення Худде, особливо в галузі водного господарства, мали тривалий вплив. Його заходи з покращення санітарії та гідротехнічної інфраструктури зробили Амстердам чистішим і безпечнішим містом. Саме завдяки його ініціативі були систематизовані дані про рівень води — надзвичайно важливе завдання в країні, значна частина якої лежить нижче рівня моря.

Як учений, Худде підтримував тісні зв'язки з провідними інтелектуалами свого часу. Він листувався з Крістіаном Гюйгенсом, Йоганном Бернуллі, Ісааком Ньютоном і Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем. Усі вони високо цінували його ідеї, особливо ті, що стосувалися теорії рівнянь і ранніх методів аналізу. Ньютон і Лейбніц не раз посилалися на так звані правила Худде у власних розробках методів диференціювання та знаходження екстремумів функцій.

Особливо важливо, що Худде одним із перших почав розглядати символічну алгебру як систему, що допускає від'ємні значення коефіцієнтів рівнянь — крок, із якого почалося повноцінне освоєння від'ємних чисел у європейській математиці.

Математична зрілість Худде була відома ще під час навчання у Франса ван Схоотена. Саме ван Схоотен 1659 року видав латинський переклад «Геометрії» Декарта, доповнивши його роботами своїх учнів, зокрема двома роботами молодого Худде: *De reductione aequationum* (липень 1657) і *De maximis et minimis* (січень 1658).

У першому трактаті («Про зведення рівнянь») Худде запропонував метод розкладу многочлена на множники та вперше в історії чітко сформулював правило, яке дозволяє знаходити кратні корені рівняння як спільні корені самого многочлена й його похідної — це стало першим правилом Худде. У другому трактаті (Про максимуми й мінімуми)

він розвинув ідею Ферма, запропонувавши спосіб знаходження локальних екстремумів для алгебраїчних виразів — друге правило Худде.

Обидва ці методи стали важливим кроком на шляху до створення диференціального числення. Разом із Рене-Франсуа де Слюзом Худде розробив алгоритми побудови дотичних до кривих, заданих алгебраїчними рівняннями, — прообраз майбутніх методів аналізу.

Пізніше, за свідченням Лейбніца, який відвідав Худде 1676 року, той багато працював над задачею відновлення рівняння кривої за її точками. Худде твердив, що може за точками обличчя визначити його алгебраїчне рівняння — свідчення як упевненості в методах аналітичної геометрії, так і ранньої інтуїції в напрямку математичної апроксимації.

Третій із відомих листів Худде до ван Схоотена (1659) був присвячений методу дотичних і був опублікований лише 1713 року в *Journal litteraire*. За словами Лейбніца, Худде ще 1656 року знайшов розклад функції $\ln(1 + x)$ у нескінченний ряд — задовго до Джеймса Грегорі, Ніколаса Меркатора й Ньютона — і навіть отримав деякі формули інтерполяції, передбачаючи ідеї чисельного аналізу.

Окрім суто математичних інтересів, Худде цікавився теорією ймовірностей і статистикою. Разом із Яном де Віттом він 1671 року склав одні з перших таблиць смертності й використав їх для розрахунку довічних рент. Цей крок поклав початок актуарній математиці та застосуванню ймовірнісних методів в економіці.

Крістофер Рен

Крістофер Рен (1632–1723) — одна з найяскравіших постатей англійської науки й культури XVII століття. Народився він у заможній та освіченій родині: його батько був священнослужителем і деканом Віндзорського собору, що дало юному Крістоферу

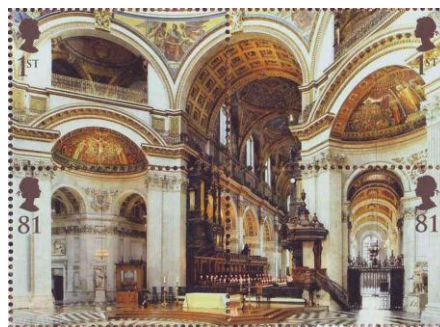


змогу отримати блискучу освіту. Він навчався в Оксфорді, де швидко проявив здібності до математики, механіки та природничих наук. Уже в юності брав участь у наукових диспутах і експериментах, ставши одним з учасників гуртка, з якого у 1662 році постало Королівське товариство. Згодом, у 1680–1682 роках, Рен обіймав посаду президента цього товариства.

Попри головну славу як архітектора, Рен починав саме як науковець. Його рання кар'єра була пов'язана з викладанням астрономії та математичних дисциплін — спершу в Грешем-коледжі, а потім в Оксфорді. До кола його спілкування входили провідні англійські вчені того часу, серед яких Роберт Бойль, Роберт Гук і Джон Уїлкінс.

Величезну роль у долі Рена відіграв Велика лондонська пожежа 1666 року, яка знищила більшу частину середньовічного міста. Відбудова Лондона вимагала не лише інженерного опрацювання, а й масштабного архітектурного переосмислення. Рен активно долучився до планування нової міської забудови й став головним архітектором проєкту відновлення. Його вплив на вигляд Лондона був колосальним.

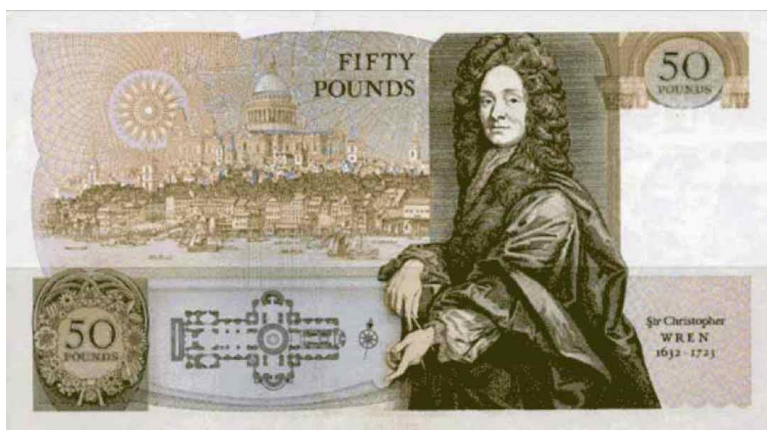
Хоча Рен не мав формальної архітектурної освіти, його математичні та інженерні знання, а також інтерес до перспективи й геометрії дали йому змогу швидко стати одним із провідних архітекторів своєї епохи. Під його керівництвом було зведено понад п'ятдесят церков, зокрема головний символ оновленого Лондона — собор Святого Павла.



Собор Святого Павла (1675–1710) — шедевр англійського класицизму, що поєднує римські та барокові елементи. Особливої уваги заслуговує його купол, натхненний куполом собору Святого Петра в Римі, але конструктивно складніший — він має тришарову структуру. Архітектура Рена відзначається гармонією, раціональністю та витонченістю, що безпосередньо відображає його наукове мислення.

Окрім церков, Рен проєктував будівлі університетів, лікарень (зокрема Челсі-хоспітал) та громадські споруди. Його архітектура — втілення ідеалів раціоналізму й порядку, характерних для доби Просвітництва.

Наукова діяльність Рена охоплювала механіку, оптику, астрономію та математику. Він активно брав участь у досліджах із вимірювання тиску, дослідженнях із балістики, оптики та акустики.



Одним із його внесків у математику було дослідження циклоїди — кривої, яку описує точка на ободі котячогося кола. Рен знайшов спосіб спрямлення циклоїди, тобто визначив довжину її дуги, використовуючи геометричні й аналітичні методи.

Також Рен розв'язав геометричну задачу, запропоновану Йоганном Кеплером: розділити півколо прямою лінією, що проходить через задану точку на його діаметрі, так, щоб площі двох частин півкола перебували у визначеному співвідношенні.

Крім того, Рен описав одну з ключових властивостей однопорожнинного гіперболоїда: це поверхня, яку можна утворити з двох родин прямих ліній. Це спостереження стало важливим для подальшого розвитку геометрії, а також знайшло застосування в архітектурі та інженерії — зокрема у спорудженні веж і металевих конструкцій у XIX–XX століттях.

Георг Мор

Георг Мор (лат. Georg Mohr, 1640–1697) був данським математиком, чиє життя минуло в тіні відоміших сучасників, однак його внесок в історію математики виявився несподівано значним. Він народився в Копенгагені в родині аптекаря. Освіту здобув у Нідерландах, де в середині XVII століття існувала потужна математична школа й діяла мережа університетів, пов'язана з іменами Декарта, Схоотена та Гюйгенса.

Мор жив у добу активних наукових контактів: він подорожував Німеччиною, Францією та Італією, знайомився з працями європейських математиків і сам публікував свої роботи латинською та данською мовами. Його книги не мали широкого розповсюдження й невдовзі після виходу стали бібліографічною рідкістю. Можливо, саме тому багато його ідей довгий час залишалися невідомими широкій математичній спільноті.

Мор помер 1697 року в Копенгагені, так і не дочекавшись заслуженого визнання. Лише в XIX–XX століттях його ім'я поступово почали повертати в історію науки.

Головне відкриття Георга Мора пов'язане з геометричними побудовами. 1672 року він опублікував трактат данською мовою під назвою *Euclides Danicus* («Датський Евклід»). У цій книзі він виклав дивовижний результат: усі побудови, які традиційно виконуються за допомогою циркуля та лінійки, можна здійснити лише за допомогою циркуля — без лінійки.

Це твердження увійшло в історію як теорема Мора — Маскероні, оскільки через 125 років, 1797 року, італійський математик Лоренцо Маскероні незалежно відкрив і опублікував той самий результат. До виявлення книги Мора саме Маскероні вважався першовідкривачем. Лише в XIX столітті дослідники довели, що пріоритет належить Георгу Морю.

Ця теорема займає особливе місце в історії математики, адже демонструє приховану надлишковість традиційного інструментарію евклідової геометрії. У XVII столітті відкриття Мора залишилося майже непоміченим, але згодом стало одним із найвишуканіших результатів у теорії геометричних побудов і надихнуло розвиток так званої «теорії конструктивних методів» у математиці.

Окрім *Euclides Danicus*, Мор написав кілька трактатів із математики й механіки, зокрема про рух і перспективу, але саме його робота про циркульні побудови принесла йому безсмертя в історії.

Щоб зрозуміти значення праці Георга Мора, важливо згадати дух епохи. XVII століття було часом наукової революції, коли математика поступово виходила за межі книжної традиції Евкліда й ставала універсальною мовою науки. Галілей застосовував геометрію та алгебру для опису руху тіл, Кеплер — для небесної механіки, Декарт створював аналітичну геометрію, а Ньютон і Лейбніц невдовзі введуть аналіз.

На цьому тлі праця Мора виглядає як повернення до «чистої» класичної геометрії. Його книга показує, що математика того часу існувала не лише в руслі прикладних задач механіки та астрономії, а й як самостійне мистецтво мислення, у якому цінували витонченість і економію засобів. Те, що Мор довів можливість обходитися одним інструментом замість двох, відображає характерний для XVII століття ідеал «простоти й достатності» — прагнення знаходити мінімальні підвалини знання.

Секі Такакадзу

Хоча Секі Такакадзу, відомий також під іменем Секі Кова (бл. 1642–1708), не був європейським ученим, говорити про математику XVII століття, не згадавши його, означає втратити важливу частину загальної картини. Його відкриття — зроблені незалежно від Європи — за рівнем можна порівняти з працями Ньютона та Лейбніца і показують, що великі ідеї часто виникають одночасно в різних культурах.



Майбутній учений народився в родині самурая Утіяма Сітібея Еймея, який служив дому Токугава. Точна дата його народження невідома і коливається в межах 1635–1643 років, а місце — або Едо (сучасне Токіо), або місто Фуджіока. Пізніше Такакадзу був усиновлений родиною Секі, від якої й отримав прізвище. Він служив васалом (хатамото) при сьогуні й займався, зокрема, складанням карт і календарними розрахунками.

Як і багато японських математиків доби Едо, Секі починав із вивчення китайських трактатів, але незабаром пішов значно далі, заклавши основи оригінальної японської математичної традиції, що пізніше дістала назву васан.

Секі Такакадзу не даремно називають «Ньютоном Японії». Він створив власну алгебраїчну символіку, що дозволяла записувати й розв'язувати многочлени дуже високих степенів (відомий приклад — рівняння 1458-го степеня). Його головна робота «Хацубі санпо» (1674) пропонувала розв'язання задач, які вимагали глибоких алгебраїчних знань і введення багатьох змінних, фактично підводячи японську математику до поняття систем рівнянь та їх усунення (елімінації).

Особливо показові тут паралелі з Європою. 1683 року Секі розробив основи теорії елімінації й увів поняття визначника — практично одночасно з Лейбніцем. Якщо в

Європі ця теорія оживе лише в середині XVIII століття (у Крамера, Безу, Лапласа), то в Японії вона продовжила розвиватися в школі Секі й стала однією з провідних тем.

До його досягнень, що випередили Європу, належить і відкриття числових послідовностей, аналогічних числам Бернуллі. Ці результати дійшли до нас через праці його учнів і дістали широке застосування в задачах аналізу. Секі також розробив методи обчислення числа π з вражаючою для свого часу точністю — до 10-го знака після коми, використовуючи процедуру, яку в XX столітті заново «відкрив» Александр Ейткен (так званий дельта-квадратний процес).

Для XVII століття прагнення до дедалі точніших значень π було важливим завданням — як у Європі, так і в Японії. Секі підійшов до цього по-своєму: він використовував послідовності наближень, поступово поліпшуючи точність, і в результаті отримав $\pi \approx 3,1415926535$, що правильне до 10-го знака після коми. Для порівняння: у Європі приблизно в цей самий час Людольф ван Цейлен витратив десятиліття, щоб довести точність до 35 знаків (цей результат навіть викарбувано на його надгробку). Таким чином, японська та європейська традиції йшли різними шляхами, але мали спільну мету — обчислити число, що пов'язує коло й діаметр, із максимально можливою точністю.



Системи рівнянь із кількома невідомими були серйозним викликом як для Європи, так і для Японії. 1683 року Секі описав метод виключення змінних, який по суті збігається з поняттям результанта й привів до введення визначників. Він зумів записати формули навіть для матриць розміром до 5×5 .

Цікаво, що Лейбніц у Європі майже в той самий час писав про тривимірні випадки, але не пішов далі. Більше того, у Європі до повноцінних формул (Крамер, Лаплас) повернуться лише через 70 років. Тобто в галузі алгебри Секі та його школа фактично випередили європейських колег.

Японська математика XVII століття жила не лише в книгах, а й у своєрідних інтелектуальних «поєдинках». Математики кидали одне одному виклики, публікуючи збірки задач із навмисно складними прикладами. Так, 1671 року Савагуті Кадзуйосі видав працю з п'ятнадцятьма задачами, що вимагали нових методів багатозмінної алгебри. Три роки по тому Секі випустив свою «Хацубі санпо», де подав розв'язання всіх п'ятнадцяти задач. Це був свого роду інтелектуальний поєдинок, і саме завдяки таким «математичним дуелям» нові методи швидко поширювалися й перевірялися на міцність.

Для європейського слухача така картина може нагадати наукові диспути в університетах Європи XVI–XVII століть, де також було прийнято змагатися, розв'язуючи задачі й захищаючи тези.

Секі був сучасником Ньютона й Лейбніца, але працював цілком незалежно, не маючи доступу до європейських книжок — Японія тоді перебувала в стані культурної ізоляції (сакоку). Проте його відкриття перегукуються з ключовими досягненнями Європи: його визначники — з ідеями Лейбніца й пізніше Крамера, його обчислення π — з працями європейських «обчислювачів» на кшталт Людольфа ван Цейлена, його робота з рядами

та числами Бернуллі — з дослідженнями Якоба Бернуллі, а його спроби «наближеного аналізу» — з першими кроками математичного аналізу в Європі.

Ці паралелі показують універсальність математичного мислення й підтверджують, що становлення математики як науки XVII століття було справді світовим явищем.

Хоча праці Секі та його учнів залишалися в межах Японії й безпосередньо не вплинули на Європу, сьогодні історики математики розглядають їх як важливу частину спільної історії. Роботи Секі допомагають інакше поглянути на розвиток європейської математики XVII століття: порівнюючи паралельні відкриття, ми бачимо, що ідеї алгебри, аналізу та обчислювальних методів були плодом загальносвітового інтелектуального процесу. У цьому сенсі можна сказати, що дослідження Секі Такакадзу мали величезний вплив на становлення європейської математичної думки — не безпосередньо, а у культурно-історичному значенні, розширюючи горизонти розуміння науки як універсального феномена.

Еренфрід Вальтер фон Чірнауз

Еренфрід Вальтер фон Чірнауз був одним із тих яскравих представників європейської науки XVII століття, хто однаково блискуче проявив себе як у математиці, так і в природознавстві. Він народився 1651 року у Верхній Лужиці у східній Німеччині, походив із дворянської родини та здобув ґрунтовну освіту в Лейпцизькому університеті. Однак справжнє формування його як науковця відбулося під час подорожей Францією, Голландією та Італією, де він познайомився з провідними математиками та філософами свого часу.



До Парижа Чірнауз прибув 1675 року і завдяки рекомендації Генріха Ольденбурга потрапив у наукові кола, де познайомився з Лейбніцем. Саме тоді він уперше повідомив про своє алгебраїчне дослідження, яке кілька років по тому, 1683 року, було опубліковане в журналі *Acta Eruditorum* під назвою *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data equatione* («Метод видалення всіх проміжних членів із заданого алгебраїчного рівняння»). У цій праці він запропонував цікавий прийом: використовуючи допоміжне рівняння ступеня на одиницю менше, він перетворював вихідне рівняння так, що залишалися лише два члени — старший і вільний. Таким чином, здавалося можливим розв'язувати алгебраїчні рівняння будь-якого ступеня чисто алгебраїчним

способом. На прикладі рівнянь третього та четвертого ступеня метод дійсно давав результат, проте вже Лейбніц висловив сумнів, що цей шлях може привести до розв'язання рівнянь п'ятого ступеня і вище. Подальші дослідження показали, що скептицизм був виправданий: задача загального розв'язання рівняння п'ятого ступеня в алгебраїчних формулах виявилася принципово нерозв'язною. Тим не менш, робота

Чірнагауза стала важливим етапом в історії алгебри, відобразивши характерний для XVII століття пошук універсальних методів.

Не обмежуючись лише алгеброю, Чірнагауз займався також геометричними дослідженнями. 1682 року він розробив теорію кауста (так званих катакаустик) — кривих, що виникають як огинаючі відбитих променів світла. Йому вдалося показати, що такі криві можна обчислити (вони «ректифіковані»), що стало лише другим у історії прикладом знаходження огинаючої рухомої лінії. Одна з катакаустик параболи досі носить назву кубічна крива Чірнагауза.

Свою математичну репутацію він підтвердив і 1696 року, коли Йоганн Бернуллі опублікував у *Acta Eruditorum* знаменитий приклад про брахістохрону — лінію найшвидшого спуску. Чірнагауз опинився одним із п'яти вчених, які змогли надіслати розв'язок; разом із його роботою Бернуллі опублікував також розв'язки Ньютона, Лейбніца та Якоба Бернуллі.

Разом із тим інтереси Чірнагауза виходили далеко за межі математики. Він активно займався оптикою, експериментував із лінзами та дзеркалами, досліджував властивості світла та тепла. Пізніше він став відомим як один із піонерів європейської порцелянової промисловості: його досліди з вогнетривкими матеріалами та склом у підсумку призвели до створення першої німецької мануфактури порцеляни в Мейсені. Ця практична сторона його діяльності добре ілюструє дух XVII століття, коли теоретичні дослідження нерідко поєднувалися з прикладними задачами і сприяли розвитку нових технологій.

Мішель Ролль

Мішель Ролль (1652–1719) народився в Амбраці (Окситанія, Франція) в родині шевця й не здобув систематичної освіти в юності. Попри це, він рано проявив математичні здібності та завдяки наполегливості й самоосвіті зумів пробитися до академічних кіл Парижа. У 1685 році Ролля було обрано членом Французької академії наук, де він працював до кінця життя.



Основні наукові інтереси Ролля були пов'язані з алгеброю та її застосуваннями. Його найвідоміша праця — *Traité d'algèbre* («Трактат з алгебри», 1690), що мала помітний вплив на розвиток математичного аналізу та алгебраїчних методів у Європі.

У цьому трактаті міститься перший опублікований у Європі опис методу, який ми сьогодні називаємо методом Гауса або «методом виключення» для розв'язання систем лінійних рівнянь. Ролль називав його «методом підстановки». Хоча елементи цього підходу зустрічалися й раніше, а Ісаак Ньютон викладав подібний метод у своїх лекціях, робота Ролля передувала публікації робіт Ньютона (1707) майже на два десятиліття. Проте його виклад залишився майже непоміченим, і в підручниках XVIII–XIX століть алгоритм закріпився саме у «ньютонівській» версії.

Найбільшу славу Роллю принесло твердження, що згодом стало відомим як теорема Ролля. Ще у 1690 році він використовував цей результат, а в 1691 році представив його строге (за мірками свого часу) доведення. Суть теореми полягає в тому, що якщо многочлен має два рівні значення на кінцях певного інтервалу, то всередині інтервалу знайдеться точка, де його похідна дорівнює нулю. Ролль формулював це твердження в алгебраїчних термінах, оскільки відкрито виступав проти диференціального числення та «нескінченно малих». Лише пізніше, у XVIII столітті, результат був переосмислений як фундаментальна теорема математичного аналізу, необхідна для доведення теореми Лагранжа про середнє значення та існування розкладу в ряд Тейлора. Цікаво, що назва «теорема Ролля» закріпилася лише у XIX столітті й частково випадково: кілька збережених примірників його публікації дозволили історикам віддати пріоритет саме йому.

Особливе місце в науковій діяльності Ролля посідають його суперечки щодо числення нескінченно малих. Він був одним із перших критиків нового аналізу Лейбніца й Ньютона. У низці доповідей, поданих до Паризької академії наук, Ролль стверджував, що методи числення нескінченно малих призводять до помилок. Зокрема, він наводив приклад алгебраїчної кривої, для якої, на його думку, аналіз «втрачає» деякі локальні мінімуми. Проте П'єр Вариньйон показав, що Ролль неправильно інтерпретував поведінку кривої: це були особливі точки з вертикальними дотичними, а не справжні мінімуми. Втім, сама критика Ролля мала позитивне значення — вона спонукала прихильників нового аналізу уточнювати визначення й методи, роблячи їх більш строгими.

Згодом Ролль пом'якшив свої погляди й визнав цінність нового числення, хоча протягом життя залишався ближчим до алгебраїчних міркувань, ніж до аналізу в дусі Лейбніца та Ньютона.

П'єр Вариньйон

П'єр Вариньйон народився 1654 року в Нормандії, у місті Кан. Його юність нічим не передвіщала майбутньої наукової кар'єри: він готувався до духовного звання, навчався в єзуїтському коледжі й отримував освіту, в якій головне місце займали риторика, філософія та богослов'я. Проте вже у зрілому віці Вариньйон несподівано захопився математикою та механікою. Приводом стало знайомство з працями Декарта, Паскаля й Крістіана Гюйгенса — авторів, які задали тон науковим пошукам у Франції другої половини XVII століття.

У 1688 році Вариньйона запросили викладати математику в Колеж де Мазарен у Парижі. Через кілька років він посів кафедру у престижному Колеж де Франс, а згодом був обраний членом Французької академії наук. На цій посаді він опинився в самому центрі наукового життя свого часу, підтримуючи листування та обмін ідеями з провідними математиками Європи. Вариньйон помер 1722 року, залишивши багату наукову спадщину, пов'язану насамперед із механікою та її математичним оформленням.



Наукові праці Вариньйона присвячені головним чином статиці та застосуванню аналізу до механіки. Саме він надав остаточної ясності і строгості знаменитому правилу паралелограма, яке дозволяє знаходити рівнодійну двох сил. У його трактатах це правило вперше постає не лише як практична схема для інженерів, а й як строге математичне твердження, вбудоване в систему нової науки про рух і рівновагу.

Особливо показовим є його метод знаходження центру мас складних фігур. В античній і середньовічній традиціях подібні задачі розв'язувалися переважно геометричними засобами й вимагали значних хитрощів.

Вариньйон запропонував новий підхід: розкласти фігуру на нескінченно малі елементи та застосувати диференціальне числення для обчислення загального положення центру мас. По суті, він показав, як мова аналізу дозволяє розв'язувати задачі, що раніше були доступні лише в найпростіших випадках. Такі міркування стали прообразом методики, яку згодом викладатимуть як основу інженерної справи.

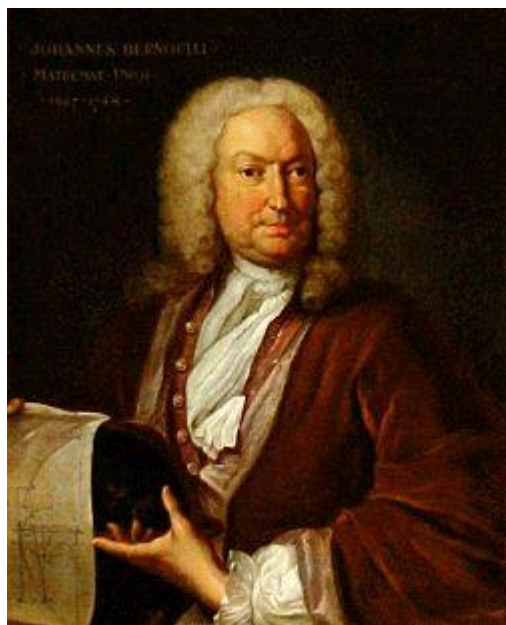
Велике значення мало прагнення Вариньйона переписати механіку мовою новітнього диференціального числення. Ледь з'явившись у Франції завдяки працям Лейбніца та поширившись через книгу маркіза де Лопіталь «Аналітичний трактат з диференціального числення», воно ще сприймалося як інструмент, що потребує обережності. Вариньйон став одним із перших, хто застосовував його до конкретних задач фізики та інженерії: обчислення моментів сил, опису рівноваги складних систем, пояснення руху рідин. Завдяки цьому він зробив вагомий внесок у формування французької школи механіки, яка у XVIII столітті стане провідною в Європі.

Особливо яскраво його роль проявлялася на засіданнях Французької академії наук. Там Вариньйон брав участь в обговоренні практичних проектів — від укріплення мостів до вдосконалення гідравлічних машин. Сучасники зазначали, що він мав рідкісний дар пояснювати найабстрактніші міркування простими й зрозумілими словами. Його колеги — серед яких були Лопіталь і Кассіні — цінували в ньому саме це: здатність перекладати мову математики на мову інженерів і механіків. Часто саме Вариньйон на засіданнях Академії брав на себе роль посередника між «чистими» математиками та практиками, демонструючи, що новий аналіз може служити на користь державі й суспільству.

Лопіталь, який високо цінував його знання й ясність розуму, писав, що Вариньйон «має дивовижну здатність робити зрозумілим усе, що іншим здається темним». У некролозі, прочитаному в Академії після його смерті, підкреслювалося, що Вариньйон був «не стільки автором нових відкриттів, скільки людиною, яка змогла зміцнити й поширити науку своїм умінням застосовувати її на практиці». Ці свідчення сучасників особливо важливі: вони показують, що Вариньйона сприймали як фігуру зв'язу — не стільки творця теорії, скільки її архітектора й популяризатора в науковому середовищі.

Йоганн Бернуллі

Коли ми говоримо про математику XVII століття, неможливо оминати родину Бернуллі — справжню «династію» вчених, чиї імена трапляються майже в кожному розділі історії аналізу. Серед них особливо виділяється Йоганн Бернуллі (1667–1748) — людина, якій вдалося поєднати талант дослідника, популяризатора і вчителя.



Він народився в Базелі в сім'ї торговця прянощами. Як це часто бувало в ті часи, батько хотів бачити сина в «практичній» професії й направив його вивчати медицину. Але, як і його старший брат Якоб, Йоганн невдовзі відчув, що його справжня пристрасть — математика. Хоча медичну освіту він завершив, його наукова доля була вже вирішена: математика остаточно витіснила медицину.

На межі XVII–XVIII століть Європа переживала справжній переворот у науці. Нові методи диференціального та інтегрального числення, відкриті Ньютоном і Лейбніцем, вимагали подальшої розробки й поширення. Саме Йоганн Бернуллі став одним із тих, хто взяв на себе цю

місію. Причому він не лише користувався новими методами, а й активно популяризував їх серед колег та учнів. Його листування з Лейбніцем відіграло важливу роль у закріпленні лейбніцевої символіки, яка зрештою стала загальноприйнятною.

Бернуллі багато працював із диференціальними рівняннями, застосовуючи їх до найрізноманітніших задач — від механіки до фізики світла. Він досліджував коливання, рух тіл, властивості рідин, намагаючись мовою аналізу описати явища природи. Звісно, закон збереження енергії чи закон Бернуллі в гідродинаміці пов'язують з його сином Даніелем, але саме старше покоління родини створило підґрунтя для таких досліджень.



Відносини Йоганна Бернуллі з його найближчими родичами — братом Якобом і сином Даніелем — були сповнені не лише наукового обміну, а й гострої конкуренції. Поки Йоганн навчався в Базелі, брати ще працювали разом, однак невдовзі їхня співпраця переросла в суперництво. Йоганн болісно реагував на успіхи Якоба й прагнув перевершити його в математиці. У результаті вони часто займалися одними й тими ж задачами, але не як союзники, а радше як суперники, які хотіли першими дійти до результату.

Найвідоміший конфлікт між братами пов'язаний із задачею про брахістохрону, яку сам Йоганн запропонував у 1696 році. Він кинув виклик ученим Європи: знайти форму

кривої, якою частинка під дією сили тяжіння досягне мети за найкоротший час. До розв'язання долучилися Ньютон, Лейбніц і, звісно, Якоб. Розв'язок виявився однаковим у обох братів — це циклоїда, траєкторія точки на колесі, що котиться. Але якщо Якоб навів правильне й повне математичне обґрунтування, то Йоганн допустив помилки і, по суті, привласнив міркування брата, видавши їх за свої. Ця історія залишила глибокий слід у їхніх стосунках і зробила суперництво особливо запеклим.



Після смерті Якоба Йоганн зберіг ту саму схильність до ревності, але вже щодо власного сина Данієля, який виявився не менш обдарованим математиком. У 1738 році Данієль опублікував фундаментальну працю *Hydrodynamica*, де виклав основи сучасної гідродинаміки. Батько не захотів поступитися першістю і через кілька років видав власну книгу *Hydraulica*, навмисно зазначивши в передмові, що вона нібито була написана на шість років раніше за працю сина. Цей учинок Йоганна історики розглядають як свідчення його честолюбства і складного характеру: він прагнув за будь-яку ціну залишатися в центрі наукової сцени, навіть якщо це означало конфлікт із найближчими людьми.



Однак не всі риси Йоганнового характеру були такими конфліктними. Його педагогічна діяльність показала, що він умів спрямовувати свою енергію й амбіції у творче русло. У Базелі та Гронінгені він виховав ціле покоління учнів, найвідомішим серед яких став молодий Леонард Ейлер. Саме під впливом Йоганна Ейлер отримав перші серйозні навички роботи з новими методами аналізу, диференціальними рівняннями та варіаційними задачами.

Йоганн був суворим і вимогливим наставником, але водночас надихав учнів своєю пристрастю до математики. Він показував, як потужна, «жива» мова математики дозволяє описувати закони природи й розв'язувати практичні задачі — від гідродинаміки до механіки. Через таких учнів, як Ейлер, ідеї Йоганна Бернуллі отримали новий, ще ширший розвиток. Так його спадщина вийшла далеко за межі родини та епохи: попри особисті конфлікти, він зумів передати знання й творчий підхід наступним поколінням, забезпечивши неперервність математичної традиції в Європі.

Гійом Франсуа Лопіталь

Гійом Франсуа Антуан, маркіз де Лопіталь (1661–1704), походив зі старовинного французького дворянського роду. Народився в Парижі. За родинною традицією він спочатку готувався до військової кар'єри й певний час служив у кавалерії. Проте вроджена короткозорість і слабе здоров'я зробили військову службу важкою, і Лопіталь звернувся до наук, передусім до математики, яка захопила його на все життя.

Він навчався у провідних французьких математиків свого часу, зокрема у Жана Реньо, і підтримував зв'язки з науковим колом, яке збиралося у Ніколя Малебранша та братів Бернуллі. Особливо значущим стало його знайомство з Йоганном Бернуллі: саме

завдяки листуванню та бесідам із ним Лопіталь опанував основи тоді ще нової галузі — диференціального та інтегрального числення.



Головний внесок Лопіталю в історію математики пов'язаний із його книгою «Аналітичне числення нескінченно малих» (*Analyse des infiniment petits*, 1696). Це був перший опублікований підручник із диференціального числення. До появи цієї праці нові методи Ньютона й Лейбніца поширювалися лише через рукописи й приватні лекції, а тому були доступні лише вузькому колу фахівців. Книга Лопіталю стала переломним моментом: вона зробила новий аналіз систематичним, зрозумілим і доступним широкій аудиторії освічених європейців.

У цьому трактаті були викладені основні правила диференціювання та їх застосування до знаходження дотичних до кривих, максимумів і мінімумів функцій, побудови кривих і розв'язання інших задач. Серед

іншого там зустрічається знамените правило, яке сьогодні називають «правилом Лопіталю» — спосіб знаходження границь відношень функцій, коли і чисельник, і знаменник прямують до нуля або до нескінченності.

Окрім підручника, Лопіталь займався питаннями геометрії, механіки та оптики, цікавився задачами про криві, умови рівноваги й швидкості зміни величин.

Суперечка Лопіталю та Йоганна Бернуллі

Історія створення першого в Європі підручника з диференціального числення — «Аналізу нескінченно малих для розуміння кривих ліній» (*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 1696) — виявилася не менш драматичною, ніж суперечка Ньютона й Лейбніца. Автором на титульній сторінці значився Гійом Франсуа Антуан де Лопіталь (1661–1704), французький маркіз і член Паризької академії наук. Проте за цим ім'ям стояв внесок іншого великого математика — Йоганна Бернуллі (1667–1748), одного з головних популяризаторів і розвивачів лейбніцівського числення.

На початку 1690-х років Лопіталь, захоплений новітньою математикою Лейбніца, почав відвідувати лекції Йоганна Бернуллі, який тоді перебував у Парижі. Вражений ясністю викладу та глибиною розуміння, Лопіталь запропонував Бернуллі приватну угоду: за 300 ліврів на рік він отримає ексклюзивний доступ до відкриттів і листів Бернуллі та право використовувати їх на власний розсуд, не розкриваючи авторства. Бернуллі погодився.

У листі 1694 року Лопіталь прямо писав: «Я прошу Вас дозволити мені скористатися Вашими результатами у моїх записах і, можливо, у майбутній публікації; звісно, я не забуду, хто є справжнім автором».

Бернуллі, який тоді перебував у скрутному фінансовому становищі, відповів згодою. Однак у 1696 році, коли вийшла книга Лопіталю — добре написаний, структурований і

проілюстрований підручник із нового числення, — ім'я Бернуллі в ній не згадувалося зовсім.

Книга одразу здобула широку популярність. Вона була написана французькою, а не латиною, тож стала доступною значно ширшій аудиторії. Деякі сучасники, однак, помічали, що стиль книги не зовсім відповідає образу Лопіталя. Як висловився один із рецензентів: «Цей текст надто добрий, щоб його написав маркіз».

Сам Лопіталь за життя повадився коректно. У листах він неодноразово визнавав значення Бернуллі. В одному з них писав: «Я багато чим зобов'язаний пану Бернуллі, від якого отримав безцінні пояснення й методи. Без його допомоги я не наважився б видати цей твір».

Проте в самій книзі цих слів не було. І після смерті Лопіталя у 1704 році Бернуллі вирішив відновити справедливість. Він почав активно заявляти про свою участь у створенні Аналізу нескінченно малих. У листі до Лейбніца 1705 року Бернуллі писав: «Я був скромним, поки маркіз був живий. Але тепер, коли його немає, я не можу миритися з тим, що мої праці приписані іншому. Я був автором майже всього змісту цієї книги».

Ці твердження сприймалися неоднозначно. Дехто звинувачував Бернуллі у порушенні джентльменської угоди. Інші ставилися з розумінням: він справді мав підстави вважати себе співавтором.

Остаточна ясність настала лише у 1921 році, коли в Базелі були знайдені рукописи лекцій Бернуллі 1691–1692 років. Вони виявилися разюче схожими на текст книги Лопіталя. Дослідник Пауль Танк опублікував порівняльний аналіз, у якому буквально по абзацах показав відповідність. Практично весь матеріал, зокрема й знамените правило Лопіталя про границі виду $0/0$, уже містився в записах Бернуллі.

З формальної точки зору Лопіталь угоди не порушив. Він заплатив Бернуллі, попередив, що може використовувати його матеріали, і навіть опосередковано висловлював вдячність. Але з позицій наукової етики XX–XXI століть таке замовчування авторства вважається неприпустимим. Як справедливо зазначив історик математики К. Бойер: «Якби Бернуллі отримав співавторство у підручнику, це стало б першим прикладом справжньої співпраці між ученим і популяризатором».

Підсумки XVII століття

XVII століття стало для математики часом справжньої революції — як у теоретичному, так і в прикладному сенсі. Якщо до цього математика значною мірою залишалася на рівні античної та середньовічної спадщини, то тепер вона стрімко виходить на якісно новий рівень. Цей перехід не можна звести лише до накопичення нових знань: ідеться про глибокі зміни в самій природі математичного мислення, у розумінні її методів, цілей і зв'язків з іншими галузями культури та науки.

Головним досягненням XVII століття стало створення математичного аналізу — потужної мови та методу, що дозволили описувати неперервні процеси в природі. Ісаак Ньютон і Готфрід Вільгельм Лейбніц незалежно один від одного розробили основи диференціального та інтегрального числення. Це стало не просто новим інструментом:

аналіз відкрив шлях до формалізації руху, зміни, нескінченно малих і нескінченно великих величин — того, що раніше вислизало від строгого математичного опису.

Водночас математика переживає алгебраїчну революцію. Формалізація символічної алгебри, започаткована ще наприкінці XVI століття (у Вієта), отримала потужний розвиток. Рене Декарт поєднав алгебру й геометрію, створивши аналітичну геометрію, що назавжди змінила способи математичного опису простору. Відтоді алгебра стає універсальною мовою математики.

Відбувається й інституційне становлення математики як науки. З'являються перші наукові академії (Французька академія наук, Лондонське королівське товариство), математика стає частиною державних і військових інтересів — її застосовують у навігації, артилерії, будівництві й астрономії. Починається систематична публікація результатів, формується наукова спільнота, розвивається листування між ученими.

Математика тісно переплітається з філософією. Декарт, Спіноза, Лейбніц — філософи, які водночас були глибокими математиками й прагнули вибудувати універсальну картину світу на основі математичної раціональності. Недарма саме в цей період розвивається механістична картина світу, у якій закони природи — це математичні рівняння, а світ — «велика машина», керована розумом і логікою.

Цей час також знаменує початок європейського наукового домінування. Хоча XVII століття не обійшлося без запозичень із арабських і давньогрецьких джерел, саме в Європі формується нова парадигма науки й знання, у центрі якої — математизація природи. Наука відокремлюється від схоластики, отримує підтримку світської культури та державної влади, і саме в математиці цей зсув видно найвиразніше.

Найважливішою особливістю XVII століття є надзвичайно тісний зв'язок між культурою й математикою. Математика проникає в архітектуру та мистецтво (зокрема через перспективу й пропорції), а естетика й філософія, своєю чергою, впливають на математичні побудови. Декарт, наприклад, сприймає математичну ясність як ідеал мислення взагалі. Навіть у релігійних і метафізичних питаннях (як у Паскаля чи Лейбніца) математика стає не просто аналогією, а самою структурою мислення. Такий глибокий синтез — рідкість в історії. Можливо, лише XX століття, з його тісними зв'язками між математикою, логікою, мистецтвом і технологіями, може зрівнятися із XVII за ступенем взаємопроникнення дисциплін.

Отже, XVII століття — це доба народження сучасної математики. Усі ключові напрями, що розвиватимуться в наступні століття, так чи інакше беруть початок саме тут. Математика стає не просто абстрактним заняттям, а універсальною мовою науки, моделлю раціональності й найважливішим інструментом пізнання світу.

Замість епілогу

Історія математики — це історія людського прагнення до порядку, симетрії та розуміння світу. Вона починається задовго до появи письма: із зарубок на кістках, вузликів шнурів і перших спроб рахунку. У первісних суспільствах математичні уявлення були невіддільні від практики — землеробства, полювання, торгівлі, будівництва — і вплетені в міфологію, ритуал і повсякденне життя.

Поступово, в різних регіонах світу, знання починають накопичуватися, систематизуватися й передаватися. У Месопотамії, Єгипті, Індії, Китаї, у грецькому світі та в майя математика розвивалася у тісному зв'язку з культурою, релігією, філософією. З'являються абстрактні поняття, перші аксіоматичні побудови, розвиваються геометрія, арифметика, зародки алгебри й астрономії.

В античності, а особливо в елліністичний період, математика стає об'єктом теоретичного мислення. Евклід, Архімед, Птолемей, Діофант закладають основи, до яких повертатимуться ще багато поколінь. Пізніше арабські вчені, успадкувавши й розвинувши античну науку, створюють мову алгебри та запроваджують систематичний підхід до обчислень і доведень. Європейське Середньовіччя, прийнявши естафету, повільно, але впевнено готує ґрунт для майбутнього стрибка.

І ось у XVII столітті — столітті Декарта, Ферма, Паскаля, Ньютона й Лейбніца — відбувається щось якісно нове. Наука й культура починають взаємно проникати одна в одну так тісно, як ніколи раніше. Виникає ідея універсальної мови природи, і цією мовою стає математика. Стає можливою точна формулювання законів природи, математичне моделювання руху, світла, імовірності, нескінченно малих змін.

Саме тут ми завершуємо наш курс. Не тому, що історія математики закінчена — навпаки, її розвиток у XVIII–XXI століттях був грандіозним: від аналізу й топології до квантової теорії та машинного навчання. Але саме XVII століття — це кульмінація тієї лінії, яку ми простежували: від міфопоетичної інтуїції числа до раціонального апарата, що пояснює всесвіт.

Пізніша математика стає дедалі абстрактнішою, професійнішою; вона потребує іншої глибини підготовки й виходить за межі культурного тла, зрозумілого неспеціалісту. Цей курс же ж прагнув показати, як математика виникала й розвивалася всередині культури, як вона була відповіддю на виклики часу, як упліталася у філософські, релігійні та художні пошуки людства.

Варто розуміти, що оповідь про математику в минулому — це не завжди точна реконструкція подій. Особливо коли йдеться про давнину, ми часто не можемо строго відокремити реальність від культурного міфу — і це не вада, а особливість. Адже саме міфи, а не сухі факти, формують колективну уяву й спрямовують розвиток культури — зокрема й математичної. Історія про єгипетських землемірів із мотузкою, поділеною на 3, 4 і 5 вузлів, була вигадана лише у XIX столітті Кантором, але досі використовується як наочний образ зв'язку геометрії й практики. Знаменитий запис Ферма про доведення «прекрасної теореми», яке, мовляв, не вмістилося на полях книги, — теж, найімовірніше, апокриф. Але саме цей образ надихав покоління математиків сильніше, ніж будь-яке строге доведення.

Невідомо, чи все було саме так, як розповідається у цьому курсі. Але його метою було показати, як про це думали, як це відчували, у що вірили — і як ці почуття та образи перетворювалися на реальну інтелектуальну практику. Математика — це не лише логіка, це ще й культура мислення.

Історія математики — це не лише історія формул, а й історія образів, оповідей та інтуїцій. Це історія того, як людство вчилася думати.

Використані джерела

- Alberti M., *Planet Mathematics: A Numerical Journey Around the World*, R BA Coleccionables, 2017.
- Archimedes, <https://math.nyu.edu/Archimedes/>.
- Ascher M., *Ethnomathematics*, Pacific Grove: Brooks/Cole, 1991.
- Banu Musa brothers at McTutor, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banu_Musa/
- Bardi J.S., *The Calculus Wars: Newton, Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time*, Thunder's Mouth Press, 2006.
- Berggren, J.L., *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986.
- Bertoloni Meli D., *Equivalence and Priority: Newton versus Leibniz: Including Leibniz's Unpublished Manuscript on the Principia*, Oxford University Press, 1993.
- Boyer C.B., *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover Publications, 1959.
- Bressoud D., Was Calculus Invented in India?, *The College Mathematics Journal*, 20026 **33** (1), 2–13.
- Brockliss L., *A History of the University in Europe. Vol. 2, Universities in early modern Europe (1500-1800)*, Cambridge, 1996.
- Brukner Havelková P., Dulíková V., Bejdová Š, Vacková J., Velemínský P., Bárta M., Ancient Egyptian scribes and specific skeletal occupational risk markers (Abusir, Old Kingdom), *Scientific Reports*, 2024, **14**, Article number: 13317.
- Cai T., *A Brief History of Mathematics. A Promenade through the Civilizations of Our World*, Birkhäuser, 2023.
- Cajori F., *A History of Mathematical Notations*, Cosimo, Inc., 2007.
- Capra F., *The Science of Leonardo*, US: Doubleday, 2007.
- Child J.M. (ed.), *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Dover Publications, 2005 (reprint of original 1920 edition).
- Closs M., *A Survey of Mathematics Development in the New World*, Ottawa, Canada: University of Ottawa, 1977.
- Colish M.L., *Medieval Foundations of the Western Intellectual Tradition (400–1400)*, Yale University Press, 1999.
- Conant L.L., *The Number Concept*, New York: Macmillan & Co, 1896.
- Culin S., *Games of the North American Indians*, Volume 1, *Games of Chance*, Lincoln: University of Nebraska Press, 1992.
- Dahan-Dalmedico A., Peiffer J., *Une Histoire des Mathématiques: Routes et Dédales*, POINTS, 1986.
- Dauben, J.W., *Chinese Mathematics*, in Katz V.J. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*, Princeton University Press, 2007.
- Daffa', A.A., *The Muslim Contribution to Mathematics*, Croom Helm, 1977.
- D'Errico F. et al, Early evidence of San material culture represented by organic artifacts from Border Cave, South Africa, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2012, **109**(33): 13214-13219.
- Eastwood B.S., *Dictionary of Scientific Biography*, New York 1970-1990.
- Everett D., *Don't Sleep, There Are Snakes: Life and Language in the Amazonian Jungle*, Vintage Departures, 2009.
- Gandz S., *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik: Abteilung B*, Studien, 1930.
- Gangooly P., *Sūrya-Siddhānta: A Text-book of Hindu Astronomy*, Motilal Banarsidass Publ., 1989.
- Gerbert, *Isagoge Geometriae*, Manuscript on Vellum, Collection of Schoenberg, ms. no. ljs194.

- Gorroochurn P., Thirteen correct solutions to the “Problem of Points” and their histories, *The Mathematical Intelligencer*, 2014, **36**, 56-64.
- Grant E., *God and Reason in the Middle Ages*, Cambridge University Press, 2010.
- Graves D., *Scientists of Faith: Forty-Eight Biographies of Historic Scientists and their Christian Faith*, Kregel Publications, 1996.
- Green J., Kushim the Sumerian and the first Accounting Mistake in History, <https://www.historicmysteries.com/archaeology/kushim-accounting-mistake/28873/>, 2022.
- Gordon P., Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia, *Science*, 2004, **306**, 496-499.
- Hall A.R., *Philosophers at War: The Quarrel between Newton and Leibniz*, Cambridge University Press, 1980.
- Hald A., *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750*, Wiley, New Jersey, 1990.
- Howard Whitley E., *An Introduction to the History of Mathematics*, Philadelphia: Saunders, (1990).
- Huff T.E., *The Rise of Early Modern Science: Islam, China and the West*, Cambridge University Press, 2003.
- Ifrah G., *From one to zero. A universal history of numbers* transl. by Lowell Bair. New York: Viking Penguin Inc. XVI, 1985.
- Ivanova N.M., *A Chronicle of Mathematical Milestones: The Mathematical Calendar*, Cambridge Scholars Publishing, 2023.
- Katz V., *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley; Subsequent edition, 1998.
- Kienast H J., *The Aqueduct of Eupalinos on Samos*. Athens: Ministry of Culture Archaeological Receipts Fund, 2005.
- Landon C.R., *American Indian Mathematics Traditions and Contributions*, Portland Public Schools American Indian Baseline Essays, 1993.
- Lewis C.S., *The Discarded Image: An Introduction to Medieval and Renaissance Literature (Canto Classics)*, Reprint Edition, Cambridge University Press, 2012.
- Lindberg D., *The Beginnings of Western Science. The European Scientific Tradition in Philosophical, Religious, and Institutional Context, Prehistory to A.D. 1450*, Chicago University Press, 2008.
- Manders K., Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes, *Historia Mathematica*, 2006, **33**(2), 184-209.
- Mansfield D.F., Wildberger N.J., Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry, *Historia Mathematica*, 2017, **44**(4), 395-419.
- Mikami Y., *The development of mathematics in China and Japan*, Leipzig, 1913.
- Morgan J., *Life and Adventure of William Buckley*, Hobart, Tasmania, 1952.
- Mozans H. J., *Woman in Science*, MIT Press, 1974.
- Needham J., *Science and Civilization in China: Volume 3, in Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*, Caves Books Ltd, 1986.
- Neugebauer O., *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover Publication, 1969.
- Neugebauer O., *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, 3 vols., Springer, 1975.
- O'Connor J.J., Robertson E.F., Etymology of some common mathematical terms, *MacTutor History of Mathematics Archive*, University of St Andrews.
- Olmstead A.T., Babylonian Astronomy: Historical Sketch, *The American Journal of Semitic Languages and Literatures*, 1938, **55**(2), 113-129.
- Ossendrijver M., Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph, *Science*, 2016, **351**(6272), 482-484.

- Pannekoek A., *A History of Astronomy*, Dover Publications, 2011.
- Parr R., Geometry of Native American Art,
<https://www.nku.edu/~longa/classes/mat305/resources/www.math.tamu.edu/~dallen/masters/american/parr.pdf>
- Pickover C.A., *The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics*, Union Square & Co. Milestones, 2012.
- Plofker K., *Mathematics in India*, Princeton University Press, 2009.
- Proclus Diadochus, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, B.G. Teubner, 1873.
- Rauff J.V., Native American Dice Games and Discrete Probability, *Journal of Mathematics and Culture*, 2009, 4(1), 50-62.
- Rajagopal C.T., Rangachari M.S., On Medieval Kerala Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, 1986, 35, 91–99.
- Rossi C., *Architecture and mathematics in Ancient Egypt*, Cambridge UP, 2004.
- Roshed R., *The Development of Arabic Mathematics: between Arithmetic and Algebra*, Springer, 1994.
- Rutman P., *How Mathematics Happened: The First 50,000 Years*, Prometheus, 2007.
- Sayili A., *Abdülhamit İbn Türk'ün Katışık Denklemlerde Mantiki Zaruretler Adlı Yazısı ve Zamanın Cebri. (Logical necessities in mixed equations by 'Abd al Hamīd ibn Turk and the algebra of his time.)*, Türk Tarih Kurumu Basımevi, 1962. Rev. by Jean Itard in *Revue Hist. Sci. Applic.*, 1965, 18:123-124.
- Sarton G., *The Study of the History of Mathematics*, Cambridge, 1936.
- Schmandt-Besserat D., *Before Writing*, Vol.1. *From Counting to Cuneform*; Vol.2. *A Catalogue of Near Eastern Tokens*, Austin: University of Texas Press, 1992.
- Seidenberg A., The origin of mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, 1978, 18(4), 301–342.
- Sigler L., *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer, 2003.
- Singh S., *The Black Chamber*, https://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/kamasutra.html .
- Shastri A.M., *India as Seen in the Brhatsamhitā of Varāhamihira*. Motilal Banarsidass, 1969.
- Shank M.H., *The Scientific Enterprise in Antiquity and the Middle Ages*, Chicago University Press, 2000.
- Smith D.E. and Mikami Y., *A History of Japanese Mathematics*, Chicago: Open Court Publishing, 1914.
- Sonar T., *The History of the Priority Dispute between Newton and Leibniz: Mathematics in History and Culture*, Springer Nature, 2018.
- Stearns P. N., *The Encyclopedia of World History: Ancient, Medieval, and Modern, Chronologically Arranged*, Houghton Mifflin Harcourt, 2001.
- Struik D., *A Concise History of Mathematics: Fourth Revised Edition*, Dover Books on Mathematics, 1987.
- The Kama Sutra of Vatsyayana* (Translated From The Sanscrit In Seven Parts With Preface, Introduction and Concluding Remarks). Translated by Burton, Richard; Indrajit, Bhagavanlal; Bhide, Shivaram Parashuram. The Project Gutenberg. January 18, 2009. Retrieved 3 December 2015.
- Thureau-Dangin F., *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal*, Paris, 1932.
- van der Waerden H., *Science Awakening*, Springer, 1974.
- Van Brumellen G., Decimal fractional numeration and the decimal point in 15th-century Italy, *Historia Mathematica*, 2024, 66, 1-13.
- Wilson R.J., *Stamping through Mathematics*, Springer, 2001.

Μπλίκας Μ.Θ., Γυναίκες Μαθηματικοί της Κλασικής Αρχαιότητας, Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2021.

Σπανδάγος Ε., Σπανδάγου Ρ., Τραυλού Δ., *Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας*, ΑΙΘΡΑ, 2000.

Σπανδάγος Ε., *Οι Φυσικοί Επιστήμονες της Αρχαίας Ελλάδος*, ΑΙΘΡΑ, 2009.

Вайман А.А., *Шумеро-вавилонская математика III-I тысячелетий до н.э.*, под ред. Струве В.В., Москва, Издательство восточной литературы, 1961.

Рифтин А.П., *Старовавилонские документы в собраниях СССР*, М.-Л., 1937.

Юшкевич А.П., *История математики. 1. С древнейших времен до начала Нового времени*, М. Наука, 1970; **2. Математика XVII столетия**, М. Наука, 1970; **3. Математика XVIII столетия**, Москва, Наука, 1972.

Наукове видання

Історія математики в культурній спадщині Європи

Том III: Математика Європи
від Середньовіччя до XVII століття

Наталія Іванова

<https://www.imath.kiev.ua/~ivanova/>

Київ, Інститут математики НАН України

01024 Київ 4, вул. Терещенківська, 3