

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Історія математики в культурній спадщині Європи

Том II: Східна традиція

Наталія Іванова

Київ
2026

УДК 51(091), 51(092)

Затверджено до друку
Вченою радою Інституту математики НАН України
(протокол № 16 від 16 грудня 2025 р.)

Історія математики в культурній спадщині Європи Том II: Східна традиція. Київ: Інститут математики НАН України, 2026. 128 с.

Матеріал другого тому охоплює розвиток математики в Китаї, Індії та країнах ісламського світу — культурних просторах, що відіграли визначальну роль у збереженні, переосмисленні та розширенні античної спадщини. Увагу зосереджено на формуванні числових систем, алгебраїчних методів, тригонометрії, астрономічних обчислень і математичного аналізу задач. Показано, як у східних традиціях поєднувалися практичні потреби з високим рівнем абстракції, а також як саме через ці культури математичні знання були передані до Європи, заклавши підґрунтя для подальшого розвитку європейської науки. Книга адресована дослідникам історії науки й математики, викладачам і студентам відповідних спеціальностей, а також широкому колу читачів, зацікавлених історією математики та європейської культури.

Рецензенти:

Ірина ЄГОРЧЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, Інститут математики НАН України
Ярослав ПРИТУЛА, канд. фіз.-мат. наук, Львівський національний університет
імені Івана Франка

DOI <https://doi.org/10.3842/imath.2026.book01.2>

ISBN 978-617-14-0506-6 (загальний, електронне видання)

ISBN 978-617-14-0508-0 (Т. 2, електронне видання)

© Наталія Іванова

Математика Китаю	6
Короткий історичний огляд	8
Нумерація та арифметика	9
Початок.....	11
Період династії Чжоу (1046–256 до н.е.)	14
Період Воюючих царств (475–221 до н.е.)	15
Об'єднання Китаю та розвиток математики за династії Хань	17
Математика у дев'яти книгах	17
Період Трьох царств (220–280 н.е.) та наступні династії	19
Епохи Суй (581–618) і Тан (618–907 н. е.): розквіт прикладної математики	21
Династія Сун: узагальнення й розширення знань (960–1279 н. е.)	24
Підсумкові зауваження	27
Математика Індії	29
Короткий історичний огляд	31
Математика в міфології.....	32
Математика в доісторичний період.....	33
Нумерація	34
Арифметичні дії та дроби	35
Ведійський період.....	36
Математика джайнізму	40
Манускрипт Бакхшалі.....	42
Класичний період	43
Ар'ябхата.....	45
Варахаміхіра	47
Бхаскара I.....	49
Брахмагупта	51
Вірасена.....	53
Махавіра.....	54
Шрідхара.....	55
Манжула.....	56
Ар'ябхата II	57
Шріпаті	58

Бхаскара II: завершення класичної індійської математичної традиції	59
Індійська математика в пізньому Середньовіччі та ранньому Новому часі (XIV–XVII століття)	61
Школа Керали	62
Поза школами.....	64
Значення і визнання	65
Математика Ісламського світу	67
Наукові центри ісламського світу в середні віки	69
Хабаш аль-Хасіб.....	71
Аль-Хорезмі та народження алгебри.....	72
Розвиток алгебри	74
Тригонометрія	75
Аналіз.....	77
Криптографія.....	79
Брати Бану Муса.....	81
Аль-Джаухарі.....	83
Абд аль-Хамід ібн Тюрк	84
Сінд ібн Алі.....	85
Аль-Кінді.....	86
Сабіт ібн Курра	88
Абу Каміль	90
Аль-Баттані.....	92
Аль-Фарабі	93
Ан-Найрізі	96
Аль-Хазін.....	98
Абу-ль-Хасан аль-Уклідісі.....	99
Абу-ль-Вафа аль-Бузджані	99
Аль-Кухі	101
Ібн Юнус (аль-Місрі)	102
Аль-Караджі	103
Ібн аль-Хайсам	104
Аль-Біруні.....	105
Омар Хайям.....	108
Ібн Яхья аль-Магрибі аль-Самавал	112
Шараф ад-Дін ат-Тусі.....	113
Насір ад-Дін ат-Тусі	114
Можливий вплив на Миколая Коперника	117

Джемшид аль-Каші	118
Аль-Каласаді	119
Занепад ісламської математики.....	121
Вплив арабської математики на європейську культуру і проблема євроцентризму	122
Використані джерела	124

Математика Китаю



Картина невідомого автора, 1554 р.

Зв'язок між культурою та математикою в давньому Китаї був надзвичайно глибоким. Математичні знання розвивалися не лише для розв'язання практичних завдань, таких як астрономія, землеробство, будівництво й торгівля, але й знаходили відображення у філософських ученнях, релігійних практиках та художньому сприйнятті світу. Давньокитайська культура, з її акцентом на гармонію, баланс і розуміння природних циклів, справила значний вплив на математичні відкриття, а самі математичні ідеї проникали в культурні концепції та ритуали.

Давньокитайські філософські вчення, такі як даосизм і конфуціанство, сильно вплинули на сприйняття математики. Конфуціанство, з його акцентом на порядок і ритуали, підтримувало ідеї про необхідність точних обчислень та упорядкованого управління державою. У даосизмі гармонія й баланс світу, виражені через поняття Інь та Ян, часто ілюструвалися математичними симетріями й числовими співвідношеннями. Космологічні та філософські концепції, такі як Інь і Ян (дві протилежні, але взаємодоповнювальні сили), пов'язані з ідеєю дуалізму та бінарних систем, що можна вважати аналогом двійкової системи в математиці. Важливі символи давньокитайської культури, такі як вісім триграм із «Книги змін» (І-Цзин), також пов'язані з числами та утворюють систему математичних символів для розуміння світу.

Давньокитайська математика тісно пов'язана з астрономією та створенням календарів. Китайські астрономи використовували математичні методи для передбачення сонячних і місячних затемнень, руху планет та визначення початку сільськогосподарських циклів. Математичні розрахунки в астрономії допомагали синхронізувати релігійні ритуали з природними циклами. Місячно-сонячний китайський календар, основа якого була

розроблена на підставі спостережень за фазами Місяця та рухом Сонця, вимагав точних математичних обчислень. Цей календар визначав час свят, сіви та збору врожаю, що робило математику невід'ємною частиною соціального й культурного життя.

Давньокитайська практика фен-шуй, заснована на вченні про гармонію з природою, використовувала математику для планування будівель, розташування об'єктів і вибору сприятливих напрямків. Важливим був принцип збалансованості й симетрії, що знайшло відображення у використанні числових пропорцій в архітектурі та дизайні.

У традиційному китайському мистецтві, наприклад у живописі та каліграфії, широко використовувалися симетрія й числові пропорції. Це підкреслювало важливість гармонії й естетичного балансу, які виражалися через числові співвідношення.

У давньокитайській культурі числа мали сакральне значення й використовувалися в релігійних ритуалах і ворожіннях. Число п'ять, наприклад, символізувало п'ять елементів (дерево, вогонь, земля, метал і вода), що були важливою частиною китайської космології. Число дев'ять асоціювалося з небом і вищими силами, тому відігравало значну роль в імператорських церемоніях і будівництві палаців.

Одна з найдавніших книг Китаю, І-Цзин, використовувала числа та їхні комбінації для опису змін у світі. Комбінації триграм (що складаються з шести ліній) створювали 64 можливі стани, які становили своєрідну систему, близьку до бінарної логіки. Такий математичний підхід до розуміння змін у світі тісно переплітався з філософією та ритуальною практикою.

У давньому Китаї математика відігравала важливу роль в управлінні державою. Наприклад, для розрахунку податків, ведення земельних описів і керування іригаційними системами були потрібні точні обчислення. Математика також застосовувалася для стандартизації мір і ваг, що було необхідним для торгівлі та збирання податків. Для підготовки чиновників у Китаї існували суворі іспити, у яких також враховувалися математичні знання. Це свідчить про те, що математична грамотність була важливою частиною культурного й соціального життя.

Математика використовувалася для розв'язання конкретних прикладних завдань у землеробстві, будівництві та інженерії. Наприклад, трактат «Математика в дев'яти книгах», датований II століттям до н.е., містив математичні методи для обчислення площ земель, об'ємів споруд, а також розв'язання задач на пропорції та дроби.

Важливі завдання, такі як розподіл води в іригаційних системах чи обчислення площ для посівів, вимагали знань у галузі геометрії та арифметики.

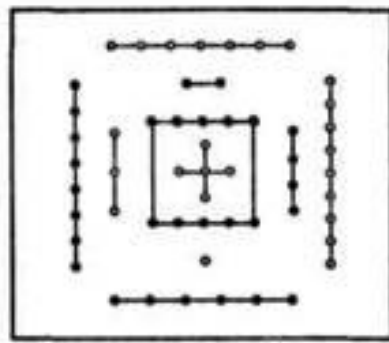
Давньокитайські математики використовували десяткову систему числення, що стало важливим кроком у розвитку абстрактного мислення й обчислень. Китайці також ввели поняття від'ємних чисел, що було унікальним внеском у світову математику.

У давньому Китаї існувала теорема, аналогічна до теореми Піфагора, яку застосовували в задачах геометрії та будівництва.

Короткий історичний огляд

Китай – одна з найдавніших цивілізацій світу. За даними археологів, давні *Homo erectus* заселили територію сучасного Китаю між 2,24 млн – 250 тис. років тому (поблизу Пекіна були знайдені рештки так званого синантропа, які датуються 550–300 тис. років тому). *Homo sapiens* заселили Китайську рівнину приблизно 70 000 років тому.

Китайська державність зародилася близько III тисячоліття до н. е. з появою перших династій, таких як Ся та Шан. До цього часу належить цікава легенда, згідно з якою одного разу легендарний Фу Сі¹, винахідник сіті, полювання, рибальства та вузликового письма, прогулюючись, побачив загадкову істоту, що виплила з річки Хуанхе. Вона мала тіло дракона й голову коня, а її тіло було вкрите таємничими знаками. Ці знаки являли собою символи й узорі, які пізніше отримали назву Хе Ту – «Карта річки».



Хе Ту – це схематична карта, що складається з точок, розташованих у певному порядку. Вважалося, що ці точки та їх розташування символізують космічні закони й структуру всесвіту. Фу Сі, побачивши ці космічні символи, осягнув глибинні закони світобудови та передав ці знання людям, щоб вони могли жити в гармонії з природою. На основі цих узорів він створив систему восьми триграм, кожна з яких являла собою комбінацію трьох ліній — або переривчастих (інь), або суцільних (ян). Ці триграми символізують основні сили природи: небо, землю, воду, вогонь, вітер, гори, озера й грім. Серед знань, які Фу Сі передав людям із «Карти річки», була також десяткова система числення.

Першою історично підтвердженою державою бронзової доби в Китаї вважається царство Шан-Інь, що виникло наприкінці XVII ст. до н. е. у середній течії річки Хуанхе. Уже в цю епоху в інців існував місячний календар і використовувалося письмо (попередник сучасного ієрогліфічного китайського письма), яке дійшло до нас головним чином у вигляді ворожильних написів на спеціально оброблених лопатках баранів і панцирах черепах. Усього було знайдено понад 150 тис. таких написів. Зокрема, на ворожильних кістках XIV ст. до н. е., знайдених у провінції Хенань, збереглися позначення чисел. На уламках посуду XIII–XII ст. до н. е. знаходять зображення правильних п'яти-, семи-, восьми- й дев'ятикутників. Китайський історик I ст. до н. е. Сима Цянь (бл. 145 до н. е. – бл. 90 до н. е.) написав у «Записах великого історика, Анналах династії Ся»: «[Ся Юй] обстежив дев'ять гір, тримаючи в лівій руці водяний

¹ Саме Фу Сі вважається автором вузликових символів-чисел, що утворюють найдавніший магічний квадрат на панцирі черепахи Ло Шу, яка з'явилася імператору Юю (див. обговорення про магічні квадрати).

рівень і меловий шнур, а в правій – компас і теслярський кутник...». Це можна вважати одним із найдавніших історичних свідчень застосування геометрії.

Династію Шан змінила династія Чжоу (близько 1046–256 рр. до н. е.), за часів якої почали формуватися ключові культурні й філософські ідеї, включно з конфуціанством і даосизмом; з'являються китайська математика й астрономія. До цього ж періоду належать перші точні календарі й підручники з математики. Імовірно, саме на основі праць цього часу було створено знаменитий трактат «Математика в дев'яти книгах», який часто називають китайськими «Началами» за аналогією з роботою Евкліда.

Ключовий момент в історії Китаю – об'єднання країни першим імператором Цінь Ши Хуан-ді у 221 році до н. е. Він створив централізовану державу, стандартизував письмо, валюту й міри, а також розпочав будівництво Великого муру. Ши Хуан-ді також відомий своїм наказом спалити всі книги (213 р. до н. е.), щоб знищити твори, які суперечили його владі, і обмежити вплив учених-конфуціанців. Саме через це до нас не дійшли давньокитайські тексти, датовані раніше кінця I тисячоліття до нашої ери.

Після падіння династії Цінь династія Хань (206 до н. е. – 220 н. е.) зміцнила централізовану владу й стала важливим періодом розвитку культури та науки. Китайці винайшли папір, а конфуціанство стало основною державною ідеологією. Давні книги почали відновлювати. У II ст. до н. е. створено найдавніші з відомих нам творів – математико-астрономічний «Трактат про вимірювальний шест» і «Математика в дев'яти книгах».

У наступні століття, приблизно до XI ст., Китай пережив зміну династій (Тан і Сун) і культурне процвітання. Періоди Тан (618–907) і Сун (960–1279) були часом розквіту поезії, мистецтва, торгівлі та технологій, таких як друкарський верстат і порох.

Зародження та розвиток традиційної китайської математики відбувалися протягом тисячоліть. Вона виникала у відповідь на потреби практичного життя — такі як землеробство, будівництво, астрономія та податкове адміністрування. Її розвиток можна приблизно поділити на такі етапи:

Ранні зачатки (до 1000 року до н. е.)

Епоха Чжоу та зародження письмових методів (1046–256 до н. е.)

Період Воюючих царств і перші математичні трактати (475–221 до н. е.)

Об'єднання Китаю та розвиток математики за династії Хань (206 до н. е. – 220 н. е.)

Період Трьох царств та науковий розвиток (220–280 н. е.)

Епоха Суй і Тан: розквіт прикладної математики (581–907 н. е.)

Династія Сун: узагальнення та розширення знань (960–1279 н. е.)

Розгляньмо ці етапи докладніше.

Нумерація та арифметика

Хоча ворожилні кістки епохи Шан були розшифровані лише частково, очевидно, що вони містять точні обчислення та розрахунки в десятковій системі числення. Ця система

позначень складалася з вертикальних і горизонтальних лічильних паличок, які представляли парні та непарні цифри, із порожнім місцем там, де мав бути нуль. Запис чисел ґрунтувався на мультиплікативному принципі. Розряди записувалися від більшого до меншого — зліва направо або зверху вниз. Якщо якийсь розряд був відсутній, замість нього залишали пропуск. Остаточна форма китайських ієрогліфічних цифр усталилася до III ст. до н. е.

0	〇	零			
1	一	壹	10	十	拾
2	二	貳	20	廿/廿	貳拾
3	三	叁	30	卅	叁拾
4	四	肆	40	卌	肆拾
5	五	伍			
6	六	陸	10^2	百	佰
7	七	柒	10^3	千	仟
8	八	捌	10^4	万	萬
9	九	玖	10^8	亿	億

Для арифметичних розрахунків широко використовували лічильні палички та лічильну дошку. Тонкі дерев'яні або бамбукові палички викладали на дошці у певній конфігурації, щоб позначати числа. На дошці креслили горизонтальні лінії, які розділяли зони, кожна з яких відповідала певному розряду (одиниці, десятки, сотні тощо). Число 1 позначалося однією паличкою, число 2 — двома і так далі до числа 5. Для чисел від 6 до 9 палички розміщували хрест-навхрест. Паличками, розташованими вертикально, позначали одиниці, а горизонтально — десятки, щоб розрізняти різні розряди.

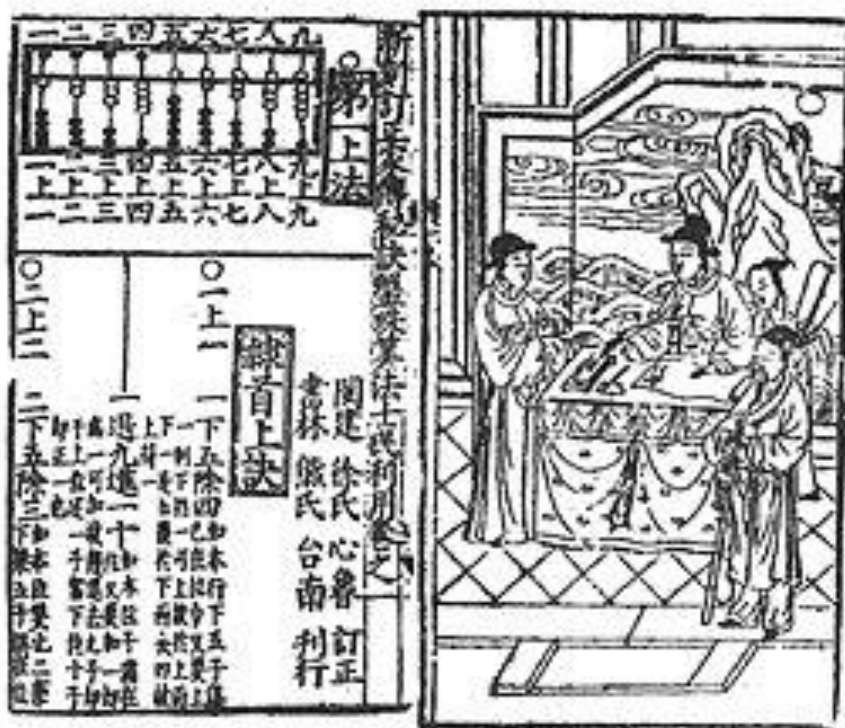


Лічильна дошка на прилавку на картині «Вздовж річки під час свята Цінмін»

Для додавання й віднімання палички у відповідних розрядах просто додавали або прибирали, виконуючи перенесення в наступний розряд, якщо сума або різниця перевищувала 9 чи ставала меншою за 0. Множення було складнішим і вимагало кількох

етапів. Наприклад, множачи одне число на інше, спочатку розкладали одне з них у ряд і повторювали його певну кількість разів, як при множенні частинами. Ділення виконувалося шляхом багаторазового віднімання, доки не отримували остачу, що також вимагало окремого використання розрядів.

Таким чином, робота на лічильній дошці не потребувала мультиплікативного принципу запису ієрогліфів, а була суто позиційною. Згодом на основі лічильної дошки виник суаньпань — китайська абака, що стала популярним інструментом для обчислень у Китаї, а пізніше й в інших країнах Азії. Точний час створення суаньпаня невідомий, але вважається, що його почали використовувати в період династії Сун (960–1279). Суаньпань має раму з розділеними вертикальними прутами, на яких рухаються кісточки. У традиційному варіанті суаньпаня кожен прут поділений на дві частини: верхню — із двома кісточками, та нижню — з п'ятьма. Верхня частина позначає «п'ятірки», а нижня — «одиниці».



Суаньпань, 1573 рік, епоха династії Мін

Суаньпань став популярним завдяки своїй простоті та швидкості роботи: досвідчені користувачі могли виконувати обчислення швидше, ніж це було можливо вручну або навіть із використанням паперових розрахунків. Суаньпань залишається в користуванні й сьогодні, особливо серед старшого покоління, і символізує вікові традиції китайської математики.

Початок

За часів династії Ся (ймовірно, 2070–1600 рр. до н.е.) та ранньої Шан (1600–1046 рр. до н.е.) почали формуватися перші системи лічби, тісно пов'язані з потребами обліку

товарів, підрахунку худоби та вимірювання земельних ділянок. Археологічні знахідки свідчать, що для цього могли використовуватися вузлики на мотузках (так зване «вузликове письмо») та лічильні палички, що створювало найпростішу числову систему.

Уперше числа почали зображати у письмовій формі на гадальних кістках і черепаших панцирах (період пізньої Шан). Ці написи містять числові позначення та символи, які дають змогу судити про базові обчислення. Наприклад, число 10 позначалося хрестом, що спрощувало підрахунок.

Рання китайська система лічби була десятковою і використовувала базові розряди для позначення одиниць, десятків, сотень тощо. Китайці, ймовірно, уже розуміли поняття розрядності чисел, про що свідчать знайдені знаки для великих чисел, таких як 100 і 1000. Ці символи застосовувалися в написах на гадальних кістках, що використовувалися у ритуальних цілях.

Тодішні числові символи були досить простими: одиниці позначалися рисками, десятки — хрестами, а більші числа утворювалися поєднанням цих знаків. Така система дозволяла швидко записувати й читати числа, а також виконувати прості арифметичні дії. Лічильні палички вже могли використовуватися для додавання та віднімання, що робить їх одним із найдавніших обчислювальних інструментів.



Гончарні вироби неолітичних культур Яншао, Пейліган, Баньпо, Хемуду прикрашені візерунками з кіл та інших правильних фігур (фото з [сайту Вікіпедія](#)).

У той час були створені циркуль і кутник — без них було б неможливо креслити кола й квадрати. У гробниці імператора Хань У-ді є фрески із зображенням Фу-сі, який тримає в руці кутник (гуй), та його дружини Нюй-ва, що тримає циркуль (цзюй).

Згодом «Гуйцзюй» у китайській культурі почало означати не просто інструменти для креслення кола й квадрата, а стало поняттям, що символізує дотримання моральних норм.



Давні китайці мали базові астрономічні знання, які використовували для створення перших календарів. Для вимірювання часу й відстеження сільськогосподарських циклів їм потрібно було вести точні розрахунки руху небесних тіл. Китайський календар був місячно-сонячним, тому обчислення включали складні цикли з урахуванням фаз Місяця та сонячного року.

У процесі спостереження за небесними тілами виникали методи передбачення сонячних і місячних затемнень, що також вимагало певних математичних знань. Імовірно, уже в цей період існували примітивні методи розрахунку, які згодом були розвинені та включені до пізніших китайських трактатів з астрономії та математики.



У період пізньої Шан і ранньої Чжоу (починаючи з 1046 р. до н.е.) математика також використовувалася для розв'язання задач, пов'язаних із розподілом земель, розрахунком податків і будівництвом. Це потребувало вимірювання площ полів, підрахунку врожаю та інших прикладних обчислень. Ймовірно, уже тоді застосовувалися прості геометричні розрахунки для визначення площі та об'єму.

Землеміри використовували базові принципи для розмітки земельних ділянок за допомогою мотузок і кілочків. Ці навички були важливі для точного оподаткування й визначення частки врожаю, що, своєю чергою, стимулювало розвиток методів вимірювання.

Хоча перші письмові математичні трактати з'явилися пізніше, до 1000 р. до н.е. вже активно формувалася усна передача знань. Учителі та чиновники, ймовірно, передавали базові правила лічби й вимірювання усно або за допомогою практичних настанов. Це заклало підвалини для систематизованих праць, що виникли в наступні періоди.

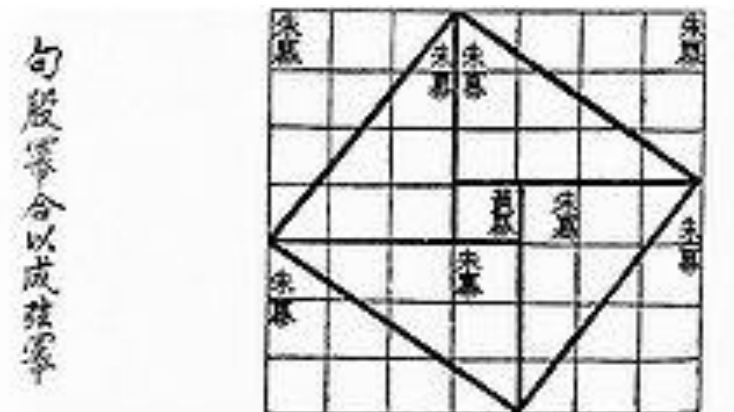
Період династії Чжоу (1046–256 до н.е.)

З приходом династії Чжоу математичні знання та техніки поступово починають набувати форми письмових джерел. У цей час створювалися основні тексти із землемірства, астрономії та календарів, що сприяло розвитку математики. Зокрема, багато дослідників вважають² період Чжоу часом появи трактату «Чжоу бі суань цзін» («Трактат про вимірювальну жердину»), у якому викладено принципи, пов'язані з астрономічними спостереженнями та геометричними обчисленнями.

Текст цього (одного з найдавніших у світі математичних творів) складається з двох цзюанів (сувоїв) і являє собою кілька діалогів: діалог про математику між правителем Чжоу-гуном і вченим Шао Гао, а також діалог на астрономічні теми між ученим Чень-цзи та його учнем Жун Фаном. У ньому міститься 246 математичних задач і розв'язків, пов'язаних із використанням вимірювальної жердини та геометрії для спостережень за небесними тілами й визначення їхнього положення.

Жердину (зазвичай довжиною один чжан — близько 3,3 метра) встановлювали вертикально, а її тінь вимірювали на горизонтальній поверхні. Довжину тіні використовували для обчислення кутів, а також для визначення висоти об'єктів чи відстані до небесних тіл. Цей метод ґрунтувався на принципі подібності трикутників. Наприклад, пропонувалося визначити висоту дерева, якщо відома довжина його тіні та висота вимірювальної жердини. В іншій задачі йшлося про обчислення кута між небесним тілом і горизонтом, спостерігаючи за довжиною тіні жердини.

Деякі задачі з використанням жердини присвячені визначенню довжини гіпотенузи або катета прямокутного трикутника— це вважається раннім прикладом застосування теореми Піфагора. Хоча сама теорема не була сформульована у сучасній формі, подібний принцип активно використовувався китайцями для розрахунків.



Доведення теореми Піфагора, що міститься у «Чжоу бі суань цзін».

Хоча в трактаті ще немає тригонометрії в сучасному розумінні, використовуються подібні методи для обчислення співвідношень між довжинами сторін трикутників.

² Судячи з назви, цей трактат однозначно належить до періоду династії Чжоу. Хоча точний час його створення невідомий, у першій частині другого тому згадується період Весен і Осеней Лю, що відноситься до III століття до н.е. Отже, можна припустити, що принаймні цей уривок було написано після періоду Воюючих царств, що дає підстави вважати, що свого остаточного вигляду трактат набув за часів династії Хань (II ст. до н.е. – III ст. н.е.).

Наприклад, в одній задачі визначається відстань до об'єкта за відомою висотою жердини та довжиною її тіні.

В астрономічних розрахунках основна увага приділялася вимірюванню висоти Сонця та зір над горизонтом. Такі обчислення допомагали уточнювати календар, передбачати затемнення та визначати сезонні цикли. Текст також відображає давні уявлення про форму неба і землі: у ньому говориться про кругле небо та квадратну землю, що було типовим для китайської космології того часу.

«Чжоу бі суань цзін» — це не просто математичний текст, а й космологічний трактат, у якому математика, геометрія й астрономія тісно переплітаються з давніми уявленнями про світ. Він відображає прагматичний підхід китайців до математики та її прикладного використання, а також демонструє високий рівень знань у сфері вимірювань і обчислень.

У період приблизно 800–500 рр. до н.е. формуються основні філософські школи — конфуціанство й даосизм, що вплинуло на ставлення до науки й знання. Конфуціанство заохочувало систематизацію та передачу знань, що сприяло розвитку математики для адміністративних і управлінських потреб, а даосизм наголошував на природному порядку речей, стимулюючи спостереження й розрахунки в астрономії та календарях.

Період Весен і Осеней (770–476 до н.е.) характеризується численними військовими конфліктами та зміцненням державних структур, що вимагало складніших обчислень для земельних і військових потреб. Лічильні палички стали головним інструментом розрахунків, і почали формуватися систематичні методи, які згодом увійдуть до більш розвинених математичних праць.

Відомості про китайську математику до 100 року до н.е. залишаються дуже неповними, хоча у 1984 році було виявлено книгу «Суань шу шу» («Книга про арифметику»), датовану приблизно 180 роком до н.е.. Вона була написана на бамбукових смужках і знайдена поблизу Цзянліна у провінції Хубей.

Наступними важливими математичними працями, про які збереглися відомості, є трактат «Суаньшу» («Рецепти обчислень») у шістнадцяти главах, створений Ду Чжуном, та двадцятишестиглавний трактат «Сю Шан суаньшу» («Рецепти обчислень Сю Шана»), автором якого був Сю Шан. Однак жоден із цих текстів не дійшов до нашого часу, і їхній зміст відомий лише частково.

Період Воюючих царств (475–221 до н.е.)

Епоху розквіту філософії та інтелектуальних суперечок у Китаї, що охоплює час Весен і Осеней (770–476 рр. до н.е.) та період Воюючих царств (475–221 рр. до н.е.), зазвичай називають епохою «Ста шкіл думки». У цей час виникло безліч філософських напрямів, кожен із яких пропонував власні ідеї та шляхи розв'язання соціальних, політичних і моральних проблем.

Розквіт філософської думки збігся з децентралізацією влади в Китаї. Ослаблення династії Чжоу та поділ країни на численні держави призвели до політичної нестабільності й соціальних потрясінь. У цих умовах мислителі шукали нові ідеї, здатні відновити порядок, справедливість і добробут. Філософи змагалися між собою, пропонуючи правителям власні системи управління. Так поступово склалося унікальне

інтелектуальне середовище, у якому формувалися основи китайської філософії, політики й навіть науки. Серед найвпливовіших напрямів цього часу — конфуціанство, даосизм, моїзм, легізм, школа імен, школа натуралістів тощо.

Цікаво, що розквіт «Ста шкіл думки» в Китаї та «золотий вік» філософії в Давніх Афінах відбувалися майже одночасно — приблизно у V–IV століттях до н.е. Така паралель свідчить про подібні процеси розвитку мислення й культури в різних частинах світу.

Серед творів цього періоду трактат «Моцзин» займає особливе місце як один із головних пам'яток моїстської школи. У ньому простежується прагнення до логіки та раціонального мислення. Автори формулюють певні закони формальної логіки, підкріплюючи їх абстрактними математичними поняттями — зокрема, ідеєю нескінченності. Логіки школи Мін розвинули це уявлення ще глибше. У класичному даоському тексті «Чжуан-цзи» міститься думка представника школи Мін Хуей Ши: «Найбільша річ не має нічого поза собою — її називають Єдиним із великого. Найменша річ не має нічого всередині себе — її називають Єдиним із малого». «Найбільша річ» у цьому вислові символізує нескінченний Всесвіт, а «Єдине з малого» можна тлумачити як аналог атомів Демокріта.

Хуей Ши відомий також низкою парадоксів, пов'язаних із математичними поняттями:

«Кутник теслі не є квадратом, а циркуль не може накреслити коло»;

«Тінь летючого птаха ніколи не рухається»;

«Якою б швидкою не була стріла, бувають миті, коли вона не рухається і не стоїть на місці»;

«Візьми палицю довжиною в один фут і відріж від неї половину щодня — навіть через десять тисяч поколінь залишиться щось».

Такі вислови нагадують парадокси Зенона, створені в Греції приблизно століттям раніше.

Більш практично спрямовані філософські твори — у традиціях конфуціанства, даосизму та легізму — менше цікавилися математикою чи абстрактними питаннями. Вони зосереджувалися на проблемах управління державою, соціальної етики, гармонії між тілом і розумом. Це відрізняло їх від раціоналістичної традиції давньогрецької філософії.

Після того як Цінь Ши Хуан-ді, перший імператор династії Цінь, об'єднав Китай, він рішуче поклав край розбіжностям між філософськими школами. У межах своєї політики він наказав спалити чимало історичних і філософських книг і придушив незалежні інтелектуальні традиції.

За часів імператора У-ді з династії Хань (близько 140 р. до н.е.) конфуціанство стало панівною ідеологією та поступово монополізувало духовне життя країни. Через це логічні та математичні дослідження шкіл Мін і моїстів не отримали подальшого розвитку. Однак тривалий період політичної стабільності та розширення контактів із зовнішнім світом сприяли економічному піднесенню, а воно, у свою чергу, стимулювало розвиток прикладної математики й обчислювальних методів, які набули великого практичного значення й досягли помітних успіхів.

Об'єднання Китаю та розвиток математики за династії Хань

За часів династії Хань (206 р. до н.е. – 220 р. н.е.) математичні знання було систематизовано, і їхня роль у суспільстві помітно зросла. Саме тоді з'явився трактат «Математика у дев'яти книгах», який отримав офіційний статус навчального посібника. У ньому містилися практичні методи розв'язання задач, пов'язаних із торгівлею, поділом землі, оподаткуванням і будівництвом. Цей твір став своєрідною енциклопедією прикладної математики, охоплюючи задачі з дробами, квадратними коренями та обчисленнями площ.



Важливою подією для розвитку науки й освіти стало винайдення паперу³. 11 березня 105 року н.е. Цай Лунь уперше виготовив папір із волокон бамбука. До того в Китаї користувалися папером із конопель або навіть із шовку — такий матеріал був грубим або надто дорогим. Новий спосіб виробництва зробив папір доступним, що значно полегшило поширення знань.

У цей період при імператорському дворі з'явилися фахівці з математики, а держава запровадила єдину систему мір і ваги, що спростило розрахунки в торгівлі, будівництві та управлінні. Математика доби Хань мала переважно практичне спрямування й стала незамінним інструментом в адміністративній системі великої імперії.

Математика у дев'яти книгах

«Математика у дев'яти книгах» — один із найвідоміших математичних трактатів стародавнього Китаю. Це фундаментальний текст, що справив величезний вплив на розвиток китайської та світової математики впродовж наступних 1500 років. Багато подальших відкриттів були зроблені завдяки коментарям до цього твору. Його створено приблизно у II столітті до н.е., а редагували до III століття н.е., головним чином у період династій Хань і Східна Хань. Авторство приписують колективу вчених, а остаточну редакцію виконав математик Лю Хуей у III столітті н.е.

³ Історик Чарльз Патрік Фіцджеральд у праці «Історія Китаю» зауважував, що «винахід паперу в Китаї на такому ранньому етапі був радше нещастям, ніж досягненням, адже друкарство з'явилося лише через вісім століть і не набуло широкого поширення аж до X–XI століть». «У результаті, – писав Фіцджеральд, – китайці протягом тривалого часу використовували папір лише для переписування текстів. Але папір не такий довговічний, як пергамент, бамбукові дощечки чи шовк. Через це втрати зразків давньої літератури після знищення книг за династії Цінь набули колосальних масштабів, адже папір — матеріал надто нетривкий».

У трактаті зібрано 246 задач у догматичній формі: формулювання, відповідь і короткий опис способу розв'язання. Трактат поділений на 9 розділів, кожен із яких присвячено певній темі й містить задачі з розв'язками:

I. Вимірювання полів: арифметика дробів і задачі з обчислення площ прямокутників, трикутників, трапецій та інших геометричних фігур.

Найдивовижніше в правилах роботи з дробами те, що вони не здаються нам дивними чи незвичними — настільки добре була розвинена китайська система обчислень із дробами. Дроби записувалися як два числа: чисельник угорі, знаменник унизу, що цілком відповідає сучасному запису звичайних дробів. Окремого символу для дробової риски не існувало, але положення чисел чітко вказувало на їхню роль. Для скорочення дробів за допомогою алгоритму Евкліда знаходили найбільший спільний дільник їх знаменників, а для зведення дробів до спільного знаменника брали за спільний знаменник добуток двох знаменників (а не найменше спільне кратне, як тепер). Множення виконували так само, як у сучасній математиці: чисельники перемножували між собою, знаменники — між собою. Ділення одного дробу на інший зводилося до множення на обернений дріб.

Тут також наведено приклад використання методу числових наближень для знаходження квадратного кореня. Це ранній аналог методу Ньютона, що полягає в послідовному уточненні результату шляхом процедури, подібної до ділення «в стовпчик». Наприклад, щоб знайти квадратний корінь із 539, потрібно знайти найближче ціле число, квадрат якого менший за 539 ($23^2 = 529$). Залишок: $539 - 529 = 10$. Уточнюємо наближення за правилом: Нове наближення = Попереднє наближення + Залишок / ($2 \times$ Попереднє наближення) = $23 + 10 / (2 \times 23) \approx 23,217$.

Ця ідея стала основою для подальшого розвитку методів числових обчислень у китайській математиці, а згодом — для передавання знань до ісламського світу та Європи.

II. Співвідношення між різними видами зернових культур: фінансові розрахунки, пов'язані з торгівлею та обміном, пропорції, дроби, основи арифметики.

III. Поділ за ступенями: розв'язання задач на ділення пропорційно до заданих величин.

IV. Шао-гуан (менші надлишки): знаходження сторони прямокутника за його площею та іншою стороною, сторони квадрата — за площею, ребра куба — за об'ємом, діаметрів кіл і сфер.

V. Оцінка робіт: вимірювання об'ємів стін, каналів, гребель тощо, оцінка кількості робітників, потрібних для виконання робіт.

VI. Пропорційне вимірювання: розв'язання задач із використанням методів пропорцій, розрахунки транспортувань, задачі «справедливого» оподаткування та постачання.

VII. Надлишок і нестача: методи розв'язання систем двох лінійних рівнянь із двома невідомими за допомогою методу двох помилкових припущень. Метод працює так: математик робить два припущення про можливі значення невідомої величини (довільні числа). Кожне підставляється в рівняння чи умову задачі, і обчислюється різниця (помилка) між фактичним результатом і потрібним. Використовуючи пропорційне

співвідношення між помилками та припущеннями, знаходять істинне значення невідомої. Метод базується на припущенні лінійної залежності між помилками й обраними значеннями, що робить його придатним для задач, які зводяться до лінійних рівнянь.

VIII. Фань-чжен: розв'язання систем n лінійних рівнянь методом розкладання. У трактаті ці задачі записували у вигляді таблиці чисел (аналог матриці), що відображала коефіцієнти рівнянь. Розв'язок здійснювався через перетворення стовпців матриці, що нагадує метод визначників Крамера, який використовують у сучасній лінійній алгебрі.

Метод фань-чжен неминуче призводив до необхідності використання від'ємних чисел, адже операції над системами рівнянь породжували від'ємні результати при відніманні. Це була дуже нетривіальна ідея: числа інтуїтивно сприймаються як міри кількості, а від'ємні значення важко уявити. Поняття «від'ємної довжини» або «від'ємної кількості» потребує абстракції, що виходить за межі повсякденного досвіду. Давньогрецька математика, наприклад, уникала від'ємних чисел: у Діофанта від'ємні результати вважалися «безглуздими», і такі розв'язки просто відкидалися. Для роботи з від'ємними числами були потрібні чітко сформульовані правила. Китайські математики вперше встановили, що додавання додатного й від'ємного числа еквівалентне їх взаємному відніманню, а множення двох від'ємних чисел дає додатний результат. Згодом китайські вчені дійшли висновку, що від'ємні числа можуть позначати борг або нестачу. Це був революційний крок, який вимагав високого рівня абстракції й істотно збагатив математичну теорію.

IX. Гоу-гу: геометричні задачі, зокрема теорема Піфагора, обчислення діагоналей, гіпотенуз і інших геометричних співвідношень. Квадратні рівняння розв'язували методом доповнення до повного квадрата. Як і давньогрецькі математики, китайські автори повністю розв'язали задачу опису «піфагорових трійок».

«Математика у дев'яти книгах» стала підручником із математики в Китаї та Східній Азії на багато століть. Її методи застосовувалися в державних потребах, інженерних проектах і повсякденному житті. Трактат вплинув на математичні традиції сусідніх регіонів, зокрема Кореї та Японії. Багато методів із трактату, зокрема системи лінійних рівнянь, стали відомі в Європі через арабський світ.

Період Трьох царств (220–280 н.е.) та наступні династії

Період Трьох царств — це час політичної роздробленості в Китаї, коли імперія була поділена на три головні держави: Вей, Шу та У. Попри нестабільність, цей період став



важливим для науки й культури, зокрема для розвитку математики. В умовах поділу країни акцент змістився на прикладні задачі. Математика активно застосовувалася для потреб армії, розрахунків податків, управління іригаційними системами та будівництва оборонних споруд.

Однією з ключових постатей цього періоду був математик Лю Хуей, чії праці справили величезний вплив на китайську математичну традицію. У 263 році він прокоментував «Математику у дев'яти книгах», суттєво уточнивши та

розширивши її зміст. Він запропонував спрощені методи обчислень, увів точні математичні доведення, застосував геометрію для обґрунтування формул обчислення площ і об'ємів, розвинув методи знаходження площі кола, а також отримав значення числа $\pi \approx 3,14159$ за допомогою многокутника з 3072 сторонами, вписаного в коло. Це свідчить про розуміння ним ітераційних процесів і самої концепції границі.



Близько через 50 років значний прорив у астрономії здійснив Юй Сі, який відкрив прецесію рівнодень. Однак у математиці після досягнень Лю Хуея прогрес на деякий час сповільнився.

Найвідомішим математичним твором того часу є трактат «Сунь Цзи суань цзин» китайського математика й астронома Сунь Цзи⁴, написаний приблизно між III і V століттями. Окрім опису арифметичних методів і дослідження діофантових рівнянь, трактат також торкається астрономії й спроби створення календаря. «Перлиною» цієї праці є розв'язання задачі:

Є деяка кількість предметів, невідома скільки саме.

Якщо рахувати їх трійками — залишок 2;

якщо рахувати п'ятірками — залишок 3;

якщо рахувати сімками — залишок 2.

Питається: скільки предметів?

Ймовірно, алгоритм розв'язання системи порівнянь використовувався китайськими генералами для підрахунку війська за допомогою послідовності однотипних команд:

«У колону по 7 — стати!»

Після виконання наказу підраховували кількість солдатів у останньому ряду. Потім проводили аналогічні підрахунки після команд:

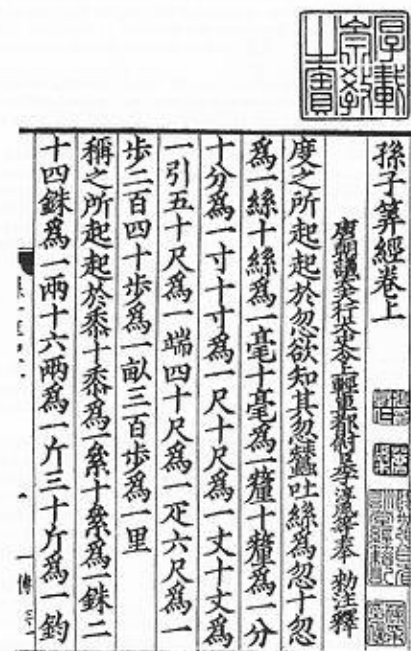
«У колону по 11 — стати!»

«У колону по 13 — стати!»

«У колону по 17 — стати!»

Згідно з алгоритмом Сунь Цзи, за чотирма залишками можна однозначно відновити кількість солдатів, якщо вона не перевищує $17017 = 7 \times 11 \times 13 \times 17$. Розв'язання Сунь Цзи згодом було узагальнене й нині відоме нам під назвою Китайська теорема про лишки.

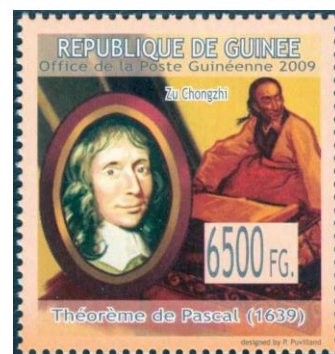
Цей текст став першим у серії математичних трактатів, створених упродовж наступних 200 років. Наступною важливою працею був трактат «Сяохоу Ян суань цзин» автора



⁴ Сунь Цзи не служив при дворі, тому відомостей про його життя не збереглося. В одному з розділів трактату він згадує буддійську сутру, що дає підстави припускати, ніби він був монахом.

Сяохоу Яна (бл. 400 – бл. 470), у якому числа записувалися в десятковій системі з додатними та від’ємними степенями десяти. Далі Чжан Цюцзянь (бл. 430 – бл. 490) створив «Чжан Цюцзянь суань цзин», де викладено формулу суми арифметичної прогресії.

Одним із найважливіших досягнень того часу стало створення Цзу Чунчжи (429–501) та його сина Цзу Гена (бл. 450 – бл. 520) календаря Да-Мін («Календар Великого Світла»), заснованого на 391-річному циклі. Цзу Ген також написав трактат «Чжуй шу» («Метод інтерполяції»), у якому довів, що $3.1415926 < \pi < 3.1415927$, і запропонував дріб $355/113$ як точне наближення, а $22/7$ — для менш точних обчислень. Разом із сином він вивів формулу об’єму кулі, використовуючи принцип Кавальєрі.



Епохи Суй (581–618) і Тан (618–907 н. е.): розквіт прикладної математики

Епохи Суй і Тан позначають час розквіту китайської цивілізації. У цей період математика розвивалася особливо активно завдяки об'єднанню імперії, політичній стабільності, зростанню економіки та розвитку зв'язків з іншими культурами через Шовковий шлях. Власне, значна частина китайської математики цього часу виникла з потреби проводити розрахунки для складання календаря та передбачення положень небесних тіл. Китайське слово «чоурень» означало і «математиків», і «астрономів», що підкреслює тісний зв'язок між цими двома галузями знання.

Існуючі математичні тексти, зокрема класичні праці на кшталт «Математики в дев'яти книгах», активно вивчалися, коментувалися та доповнювалися новими розв'язками. За правління династії Тан була заснована спеціальна державна академія — Імператорський університет, де математика входила до обов'язкової програми. Основним навчальним посібником слугувала саме «Математика в дев'яти книгах», що закріпило її авторитет у суспільстві. Інтерес до математики підтримувався розвитком астрономії та буддійських текстів, у яких часто згадувалися величезні числа й складні обчислення. Астрономічні та календарні розрахунки вимагали вдосконалення математичних методів. Шовковий шлях забезпечував контакт із Індією, Персією та іншими регіонами, сприяючи обміну математичними ідеями. Зокрема, саме в епоху Тан китайські вчені почали знайомитися з поняттям нуля, що значно спростило обчислення. Ця ідея потрапила до Китаю з Індії через буддійських монахів.

Календарні та астрономічні обчислення в Китаї сприяли розвитку інтерполяційних методів, які дозволяли наближено визначати значення функцій, заданих таблицями, у проміжках між табличними даними. Близько 600 року астроном і математик Лю Чжо застосував для цих цілей квадратний тричлен $y=ax^2+bx+c$, коефіцієнти якого виражалися через різниці першого й другого порядку при рівновіддалених значеннях аргументу.

Ключовими постатями епохи Тан були придворні математики Ван Сяотун, Лі Чуньфен і монах І Сін.

Зародження алгебри в Китаї пов'язують із Ван Сяотуном (близько 580 – 640), який у 625 році написав і представив першому імператору династії Тан, Лі Юаню, трактат «Наступний давнині лічильний канон». Ван Сяотун сподівався отримати посаду викладача математики, але натомість був призначений заступником директора Астрономічного бюро. Попри його видатні математичні здібності, як астроном він не досяг великого успіху.

Одним із найсуперечливіших його кроків була участь у реформі календаря, де він наполягав на поверненні до спрощених моделей. Ван Сяотун пропонував відмовитися від урахування нерегулярності руху Сонця й прецесії рівнодень — важливих чинників, які ще у V столітті ввів у календарні розрахунки великий учений Цзу Чунчжі. Такий підхід міг знизити точність календаря й поставити під загрозу досягнення астрономічних знань.

Втім, Ван Сяотун залишив значний слід у математиці. Від його трактату збереглася лише невелика частина, що містить 20 задач із відповідями та загальними правилами їх розв'язання. Ці задачі вражають різноманіттям і витонченістю. Перша задача, наприклад, описує собаку, яка переслідує зайця. Проте Ван Сяотун наголошує, що за цим простим сценарієм приховані обчислення, пов'язані з рухом небесних тіл.

Наступні тринадцять задач присвячено визначенню розмірів різних споруд — висоти, ширини, довжини та навіть «похилого відрізка». Серед об'єктів — вежі, дамби, комори та інші конструкції, часто складних форм: конуси, трапецієподібні споруди або усічені піраміди.

Останні шість задач зосереджені на геометрії прямокутних трикутників. У задачі № 15 потрібно знайти всі три сторони трикутника, тоді як задачі з № 16 по № 20 зводяться до обчислення однієї сторони за заданими співвідношеннями між двома іншими.

Більшість цих задач вимагають розв'язування рівнянь вищих степенів (переважно кубічних). Це була надзвичайно передова математична теорія для свого часу. Не маючи в розпорядженні символічної алгебри, Ван Сяотун вручну пояснював походження коефіцієнтів рівнянь, додаючи детальні коментарі до кожної задачі. У підсумку він представив 28 різних форм кубічних рівнянь і методи їх розв'язання. В епоху, коли ще не існувало загальноприйнятих алгебраїчних символів або універсального способу складання рівнянь із невідомими, створення й аналіз рівнянь вищих степенів становили надзвичайно складне завдання.



«Наступний давнині лічильний канон» здобув визнання завдяки зусиллям іншого видатного вченого того часу — Лі Чуньфена. У 627 році Лі Чуньфен обійняв посаду керівника Астрономічного бюро. Він був не лише талановитим астрономом, автором удосконаленого календаря⁵, але й видатним систематизатором математичних знань і коментатором.

Саме Лі Чуньфен відіграв ключову роль у збереженні та популяризації праці Ван Сяотуна. У 656 році він став головним редактором збірки математичних трактатів «Суань цзінь ши шу» («Десять книг лічильного канону»), яка використовувалася для кваліфікаційних іспитів і була опублікована у 1084 році. До цієї збірки увійшли найважливіші твори, серед них — і «Наступний давнині лічильний канон».

Сам Лі Чуньфен зробив значний внесок у розвиток математики. Він працював над обчисленням кутової швидкості видимого руху Сонця та розвивав метод скінченних різниць, який застосовувався в календарних розрахунках. Ці досягнення стали важливим етапом у вдосконаленні китайської астрономічної науки.

Роботу над створенням календаря продовжив буддійський монах І Сін (при народженні — Чжан Суї), який став головним астрономом при дворі імператора Сюаньцзуна. Розроблений ним календар «Да Янь лі» був запроваджений у 729 році й використовувався в Китаї протягом кількох століть. Цей календар вирізнявся високою точністю: він враховував нерегулярність руху Сонця, прецесію рівнодень і складні співвідношення між місячними та сонячними циклами.

Разом зі своїм помічником Лян Лінцзанем І Сін також удосконалив армілярну сферу — астрономічний сферичний прилад, який демонстрував рух зоряного неба та планет.

Під впливом індійських праць із тригонометрії І Сін уклав досить детальну та точну таблицю тангенсів.

У 724–725 роках, за дорученням імператорського двору, І Сін провів геодезичні вимірювання, що мали кілька цілей: отримати нові дані для передбачення сонячних затемнень, здійснити реформу календаря й визначити довжину дуги меридіана. Для останнього він використав метод, подібний до того, який застосував Ератосфен у III столітті до н. е. Його експеримент ґрунтувався на спостереженні різниці висоти Сонця опівдні між різними географічними широтами.

І Сін організував спостережні пункти на території Китаю вздовж меридіана, щоб виміряти кутову різницю висоти Сонця. Для цього використовувалися спеціальні



⁵ У ньому передбачалося, що сонячний рік триває 365,2448 дня, тоді як 12 місячних місяців по 29,5306 дня разом становлять 354,3672 дня.

прилади, зокрема гномони — вертикальні стовпи, тіні від яких допомагали визначати кут падіння сонячних променів.

У кожному пункті опівдні в день літнього сонцестояння вимірювали довжину тіні гномона. Потім обчислювали кут, під яким сонячні промені падали на Землю. Порівнюючи дані з двох пунктів, І Сін зміг визначити різницю в широті між ними. Він розрахував, що довжина дуги меридіана в 1 градус (тобто різниця в широті) становить близько 123 км, що досить близько до сучасного значення (≈ 111 км).

Багато методів, розроблених у цей період, збереглися в китайських математичних традиціях і вплинули на розвиток математики в ісламському світі та Європі.

Династія Сун: узагальнення й розширення знань (960–1279 н. е.)

Епоха династії Сун була одним із золотих періодів в історії китайської математики. У цей час з'явилися вдосконалені рахівниці — суаньпань, що значно спростили обчислення. Цей період характеризується розвитком практичної математики, прогресом в алгебрі, геометрії та теорії чисел, а також створенням видатних математичних праць.

З X по XII століття темпи розвитку дещо сповільнилися, і математичні тексти цього часу майже не збереглися. Говорячи про розвиток геометрії в епоху Сун, не можна не згадати працю «Дослідження математичних принципів» автора Лю І, який, імовірно, жив у XI столітті. Основною темою книги є застосування теореми Піфагора, відомої в Китаї як «теорема Гоу-гу», для розв'язання прикладних задач, пов'язаних із землемірством, архітектурою та будівництвом. Лю І використовував графічні пояснення, щоб продемонструвати правильність своїх висновків. Ці ілюстрації допомагали читачам краще зрозуміти геометричні принципи.

У XIII столітті розпочався новий розквіт китайської математики, причому найбільшого розвитку в цей період набула алгебра. Зокрема, у «Математичному трактаті в дев'яти розділах»⁶, написаному Цінь Цзюшао у 1247 році, було розроблено так званий «Метод Лінлуна» (або «метод гармонійно змінюваної еволюції») для чисельного розв'язання алгебраїчних рівнянь — за 570 років до методу Горнера!

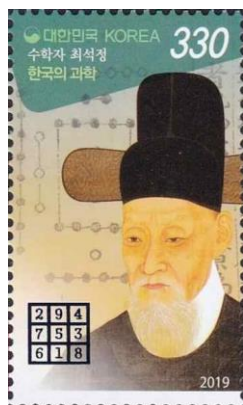
Цінь Цзюшао був людиною, що прагнула наукової досконалості, однак його політична кар'єра була суперечливою. Він служив чиновником, але його діяльність іноді супроводжувалася звинуваченнями в корупції та жорсткому характері. Незважаючи на це, його математичні досягнення дістали широке визнання.

У своєму «Математичному трактаті в дев'яти розділах» він узагальнив задачу Сунь-цзи (китайську теорему про лишки) і тим самим відіграв ключову роль у розвитку та популяризації методу розв'язання систем порівнянь із використанням лишків. Його числовий «Метод Лінлуна» дозволяв будувати наближені розв'язки рівнянь вищих степенів (до 10-го степеня).

Цей метод, надзвичайно схожий із методом Руффіні–Горнера, вважається попередником сучасних чисельних алгоритмів, таких як метод Ньютона. Цінь Цзюшао також

⁶ Трактат став відомим на Заході у XIX столітті, коли британський протестантський місіонер Александр Уайлі опублікував його у своїй статті «Jottings on the Sciences of Chinese Mathematics».

застосовував ітераційні процедури для знаходження коренів рівнянь, що свідчить про його глибоке розуміння числових методів.

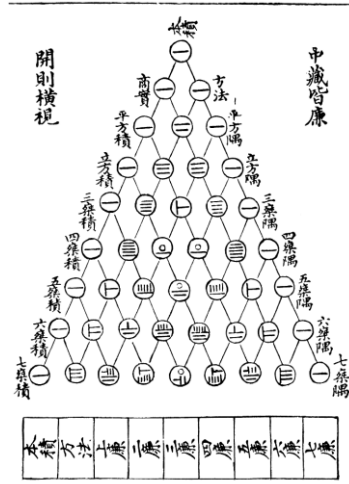


Епоха Сун примітна не лише досягненнями в галузі науки та культури, а й появою прагнення до популяризації математики. Одним із найвизначніших популяризаторів цієї епохи був Ян Хуей (XIII ст.) — видатний сунський математик, який зробив значний внесок у комбінаторику та геометрію. Його твори створювалися з урахуванням потреб широкої аудиторії: вони були написані так, щоб бути зрозумілими не лише вченим, а й практикам. Ян Хуей критикував математиків, які «змінюють назви своїх методів від задачі до задачі».

Його праці супроводжувалися ілюстраціями, таблицями та докладними поясненнями, що робило їх доступними для розуміння.

Ян Хуей прагнув зробити математику корисною для розв'язання повсякденних завдань. Він поєднував теорію з практичними проблемами — будівництвом, землемірством, бухгалтерією — тим самим розширюючи сферу її застосування.

圖方算七法古

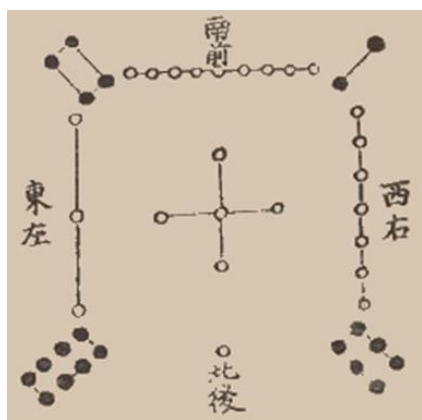


Одним із його головних досягнень стало систематичне описання властивостей числового трикутника, який згодом у Європі став відомий як трикутник Паскаля. У Китаї ця структура має назву трикутника Ян Хуей.

Ян Хуей також займався складанням так званих магічних квадратів — таблиць, у яких натуральні числа від 1 до n^2 розміщуються так, що сума чисел у кожному рядку, стовпці й на діагоналях однакова. Подібні квадрати мали велике символічне значення в китайській культурі.

За легендою, у Давньому Китаї стався великий потоп. Великий Юй (засновник династії Ся, приблизно 2032–2025 рр. до н.е.) вирішив принести жертву богу однієї з річок, що вийшла з берегів — річці Ло, — аби вгамувати її гнів. Бог води, чарівна черепаха, вийшла з води, щоб прийняти жертву. Імператора вразив візерунок із крапок на панцирі черепахи.

Він помітив, що якщо додавати числа по три — вертикально, горизонтально чи по діагоналі, — сума завжди одна й та сама. Імператор повірив, що в узорі панцира боги відкрили йому частину великого плану світу, подібно до того, як чотири лапи черепахи є колонами, на яких спочиває світ.



(За іншою версією легенди, Юй боровся з повенями за допомогою Жовтого дракона та Чорної черепахи. Дракон прокладав канали своїм хвостом, а черепаха перевозила чарівну речовину «сіцзян», за допомогою якої Юй створював гори й рівнини, що сформували нинішню географію Китаю. Черепаха, посланниця божества Жовтої ріки, несла на своєму пластроні ієрогліфи з назвами всіх гір і річок. Коли створення певного об'єкта завершувалось, Юй за допомогою тієї ж черепахи залишав на ньому відповідний напис.

Об'єднавши ці міфи, китайці створили традиційне уявлення про світ як черепаху, чий опуклий карапакс (верхній щит панцира) символізує кругле небо, а плоский пластрон (нижній щит панцира) — квадратну землю.



Монета “100 тенге щастя” з квадратом Ло Шу

У своїй праці 1275 року Ян Хуей показав, що сума чисел у рядках і стовпцях магічного квадрата дорівнює $n(n^2+1)/2$.⁷

Останнім великим математиком цього періоду був Чжу Шицзе (бл. 1260 – 1320) — автор трактатів «Вступ до математичних досліджень» (1299) і «Справжні відображення чотирьох невідомих» (1303). Він розвинув метод небесного невідомого (попередник

⁷ Магічними квадратами згодом займалися багато математиків країн ісламу, Візантії та середньовічної Західної Європи. Найвідомішим у західному світі є квадрат, зображений на гравюрі А. Дюрера «Меланхолія» (1514 р.).

роботи з многочленами) та дослідив суми числових послідовностей. Його праці стали вершиною давньокитайської математики.



Сторінки з «Справжніх відображень чотирьох невідомих»

Одним із ключових чинників розвитку науки доби Сун стало винайдення книгодрукування, яке докорінно змінило спосіб збереження та поширення знань. Уже в VIII столітті в Китаї використовували ксилографію — друк із дерев'яних дощок із вирізаними знаками. Проте справжню революцію здійснив Бі Шен у XI столітті, винайшовши рухомі керамічні літери. Це значно спростило й прискорило виготовлення книг, зробивши їх доступнішими.

Завдяки друкарству багато математичних трактатів, які раніше існували лише у вигляді рукописних сувоїв, отримали друге життя. Серед них — класичні твори «Математика у дев'яти книгах» та «Математичний трактат у дев'яти розділах» Цінґ Цзюшао. Опубліковані тексти стали доступними не лише науковцям, а й чиновникам, яким потрібні були точні методи обчислень для оподаткування, будівництва й астрономії. Поширення математичних знань дало потужний імпульс розвитку інженерії, торгівлі та державного управління.

З XIV століття починається занепад китайської математики. «Математика у дев'яти главах» залишалася зразком навчання, однак нові праці, що спиралися на неї, не розвивали методи поліноміальної алгебри. Глибокі дослідження XIII століття перестали розуміти, і поступово математика дедалі більше ототожнювалась із нумерологією, особливо за династії Мін.

Підсумкові зауваження

Протягом тривалого часу розвиток китайської культури та математики відбувався незалежно від інших цивілізацій. Географічні особливості країни створювали природні межі (гори та моря), які її ізолювали. З іншого боку, коли Китай завойовували іноземні загарбники, вони здебільшого асимілювалися в китайську культуру, а не нав'язували власну. В результаті простежити розвиток математики всередині цієї культури є надзвичайно складним завданням, яке ускладнюється ще й стилем викладу основних математичних праць того часу.

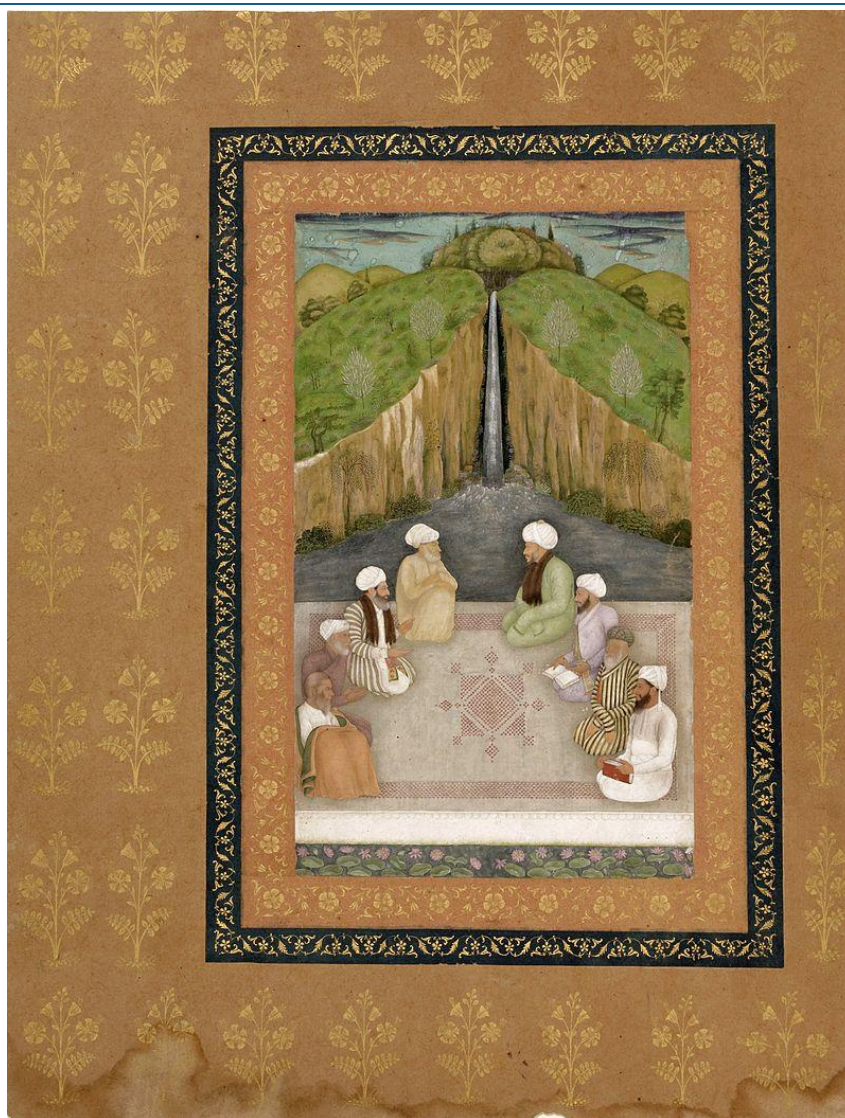


Вісімнадцять учених, невідомий художник династії Мін

Синолог Сен-Жюльєн зазначав, що він «охочіше перекладе десяток сторінок китайських класиків, ніж кілька рядків про їхню астрономію». Багато відомих синологів взагалі ніколи не перекладали роботи, пов'язані з природничими науками, бо вони написані дуже складним стилем із великою кількістю спеціальної термінології та складних конструкцій. Тому, попри численні письмові джерела, наші знання про математику давнього Китаю залишаються досить обмеженими.

Перше, що впадає в око при вивченні античної китайської математики, — це її відмінність від грецької. На відміну від греків, китайські математики не розвивали математику на основі аксіоматичного підходу. Китайське розуміння математичного доведення радикально відрізнялося від грецького, проте це жодним чином не зменшує його цінності.

Китайська математика, подібно до китайської мови, була надзвичайно лаконічною. Вона мала виразно прикладний характер і розвивалася під впливом практичних задач, пов'язаних із календарем, торгівлею, земельними вимірами, архітектурою, веденням державних архівів та оподаткуванням. Уже до IV століття до н. е. у Китаї використовували позиційну десяткову систему.



Бесіда мудреців, близько 1670 року, Музей Ага Хана, Женева

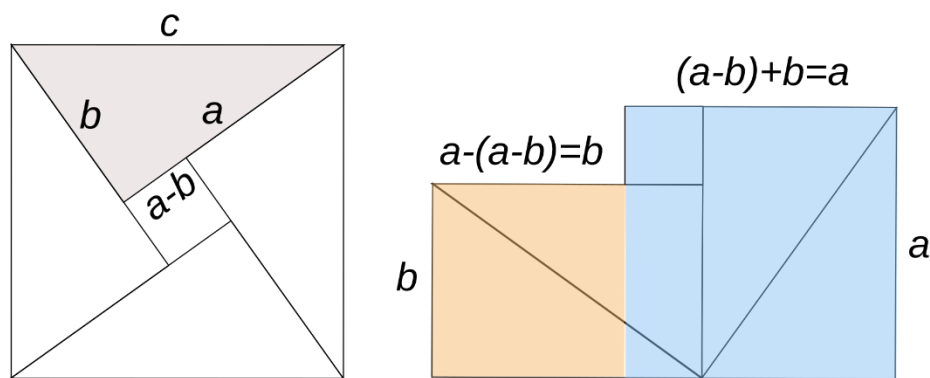
Про математику Давньої та середньовічної Індії ми знаємо значно менше, ніж про математику Єгипту, Вавилону чи Греції. Причина не у відсутності наукової думки — навпаки, індійська математична традиція була глибокою й багатою. Але на відміну від єгиптян, які писали на довговічних папірусах, і вавилонян, що залишили свої обчислення на глиняних табличках, індійські вчені користувалися нетривкими матеріалами: корою дерев, смужками бамбука та пальмовим листям. Ці носії погано зберігалися в жаркому й вологому кліматі Індійського субконтиненту, тому багато праць дійшли до нас лише в пізніших списках, цитатах або арабських перекладах.

Джерела наших знань про індійську математику різноманітні, але фрагментарні. Найдавніші відомості містяться в коментарях до ведичних текстів, особливо в «Шульба-сутрах» (VII–V ст. до н. е.), де викладено геометричні правила, необхідні для спорудження ритуальних вівтарів. Ці тексти містять перші формулювання, схожі на теорему Піфагора, і дають уявлення про прикладну математику того часу. Згодом з'являються сиддханти — трактати з астрономії та математики, у яких відчутний вплив

грецької науки. Деякі з них, як-от «Пуліса-сиддханта» або «Ромака-сиддханта», безпосередньо пов'язані з елліністичною традицією, що потрапила до Індії, можливо, разом із ученими, які втекли після знищення Александрійської бібліотеки.

Багато математичних праць писали у віршах — щоб полегшити запам'ятовування. Формули та правила подавалися в лаконічній поетичній формі, а зміст розкривався у докладних коментарях. Наприклад, «Трішатика» Шрідхари (IX–X ст.) містила рівно триста віршів, кожен із яких — крок алгоритму або розв'язання задачі. Особливо відомий Бхаскара II, найбільший математик XII століття, автор «Сиддханта-широмані» («Вінець учення»), що включала як астрономічні, так і чисто математичні розділи: «Лілаваті» — з арифметики, «Біджаганіта» — з алгебри. Назва «Лілаваті», можливо, пов'язана з ім'ям доньки автора, якій він присвятив свої задачі.

На відміну від сстрогих логічних побудов грецької математики, індійські доведення часто були наочними й короткими. У текстах можна зустріти підпис під кресленням: «Дивись!» — і жодного формального обґрунтування. Проте ці візуальні доведення були цілком переконливими й дозволяли легко зрозуміти суть теореми. Так, Бхаскара II для доведення теореми Піфагора пропонував читачеві подивитися на відповідний малюнок і «побачити» рівність:



Індійська математична думка зробила величезний внесок у світову науку. Саме в Індії були винайдені ті самі цифри, які зараз називаються арабськими. Араби, своєю чергою, називали їх індійськими — і небезпідставно. Індійці оперували нулем як числом, користувалися позиційною десятковою системою та розробили складну алгебраїчну символіку, яка за рівнем перевищувала символіку Діофанта. Уже в V столітті індійські астрономи ввели у розрахунки синуси замість хорд, що стало значним кроком у спрощенні тригонометрії. Від їхнього терміна джива («тетива лука») через арабські переклади й латинську мову виникло сучасне слово синус.

Задовго до європейських математиків, у XVI столітті, індійці отримали ряди для синуса, косинуса й арктангенса — на століття раніше за аналогічні відкриття в Європі. Проте, попри окремі геніальні знахідки, індійська математика розвивалася інакше, ніж європейська. Індійські математики розв'язували конкретні, часом дуже складні задачі, але рідко прагнули створити узагальнені теорії. Наприклад, вони не розробили системного методу розв'язання лінійних рівнянь, як у Китаї, проте успішно розв'язували окремі задачі, подібні до тих, що пізніше привели до китайської теореми про остачі.

Таким чином, індійська математика — це світ яскравих образів, стислих формул, поетичних задач і винахідливих розв'язків. Попри втрати, спричинені крихкістю письмової традиції, збереглося достатньо, щоб визнати її однією з найважливіших складових історії світової науки.

Короткий історичний огляд

Щоб краще зрозуміти багатство й особливості індійської математичної традиції, корисно розглянути її розвиток за історичними етапами. Попри фрагментарність джерел, дослідники виокремлюють кілька періодів, кожен із яких пов'язаний із певними досягненнями, іменами та типами математичних текстів. Ці періоди відображають не лише внутрішню еволюцію індійської науки, а й культурні впливи — від ведійських релігійних практик до греко-римської астрономії та ісламської наукової думки. Розгляньмо їх послідовно.

Долина Інду (прибл. 2600–1900 рр. до н. е.). Найдавніші сліди «практичної» математики в Індії сягають цивілізації Долини Інду — розвиненого міського суспільства з упорядкованими системами мір і геометричним мисленням. Було знайдено лінійки з поділками, стандартні цеглини з пропорціями сторін 4:2:1, а також гирі з дробовими значеннями — усе це свідчить про високий рівень метрологічної культури.

Ведійський період (прибл. 1500–500 рр. до н. е.). Після приходу аріїв і поширення ведійської культури формуються основи релігійно-ритуального світогляду, у межах якого розвивається геометрія, потрібна для побудови жертвних вівтарів. Ці знання зафіксовані в текстах, відомих як Шульба-сутри (VII–V ст. до н. е.). Це ранні свідчення використання геометрії, порівнянні з тими, що знаходять в Єгипті або в ранній грецькій традиції.

Поява буддизму та джайнізму (VI–V ст. до н. е.). Це епоха соціальних і релігійних перетворень, коли математика поступово виходить за межі ритуальних завдань. Поширення писемності сприяє переходу від усної передачі знань до письмової. У цей період Індія входить до сфери впливу Перської імперії, а згодом — Александра Македонського, що відкриває шлях культурним контактам з елліністичним світом.

Епоха Маур'їв та Ашоки (III ст. до н. е.). Об'єднання Індії та офіційне визнання буддизму за царювання Ашоки сприяють формуванню державної й культурної інфраструктури, зокрема пов'язаної з освітою. Хоча безпосередні математичні праці цього періоду невідомі, саме створена Ашокою інфраструктура забезпечила умови для їх появи в майбутньому.

Період Гуптів (IV–VI ст. н. е.): «Золотий вік» індійської науки. Це найяскравіший розквіт класичної індійської математики. З'являються перші сиддханти — астрономо-математичні трактати, засновані як на місцевих, так і на елліністичних традиціях. У цей час працюють Аріабхата (V ст.), який розробив методи тригонометрії та арифметики, зокрема роботу з нулем; Варахаміхіра (VI ст.), який систематизував астрономічні та математичні знання; Брахмагупта (VII ст.), що вперше формалізував правила для нуля й від'ємних чисел, а також заклав основи алгебри.

Середньовіччя (VII–XII ст.): Передача знань і вплив ісламського світу. Із VII століття праці індійських учених перекладаються арабською мовою й стають відомими в країнах ісламу. Через арабський світ ідеї індійської математики потрапляють до Європи. Математика розвивається санскритом: створюються поетичні трактати з коментарями. Приклад — «Сиддханта-широмані» Бхаскари II (XII ст.), у якій розглядаються арифметика, алгебра, геометрія та астрономія.

Пізнє Середньовіччя та Південна Індія (XIII–XVI ст.). Після мусульманських завоювань центр наукової активності переміщується на південь Індії. Тут виникає Керальська школа математики й астрономії (XV ст.), де Мадхава з Сангамаграми та його послідовники розробляють нескінченні ряди для синуса, косинуса й арктангенса — за два століття до аналогічних відкриттів у Європі.

Епоха Великих Моголів і Джай Сінгха (XVI–XVIII ст.). Імперія Великих Моголів забезпечує відносну стабільність, але санскритська наукова традиція поступово поступається місцем перській мові. Останнім великим науковим проєктом стають обсерваторії й таблиці, створені Саваєм Джай Сінгхом (XVIII ст.). Це завершує багатовікову епоху самобутньої індійської математичної традиції до початку колоніального періоду.

Математика в міфології

Міфологія Давньої Індії, пронизана глибокою філософією та символізмом, зберігає в собі не лише релігійні й етичні ідеї, а й зародки математичного мислення. У цій культурі числа — не просто абстрактні величини, а носії сенсу, елементи світопорядку та форма вираження божественної гармонії. В індійській міфологічній традиції математика стає невід’ємною частиною космології, ритуалу й сакральної мови.

Один із центральних міфологічних сюжетів — концепція юг (циклів часу), що відображає уявлення про час як нескінченне колообертання. Ведична система ділить космос на чотири епохи — Кріта-юга, Трета-юга, Двапара-юга і Калі-юга, кожна з яких має чітко визначену тривалість:

Кріта-юга — 1 728 000 років,

Трета-юга — 1 296 000 років,

Двапара-юга — 864 000 років,

Калі-юга — 432 000 років.

Співвідношення між цими числами (4:3:2:1) підкреслює циклічність і впорядкованість часу. Ця числова структура не випадкова — вона втілює ідею поступового занепаду моралі та космічного порядку, описуючи не лише міфологічний час, а й «моральну геометрію» історії.

Багато чисел в індуїзмі мають символічну силу. Тріада (3) богів Трімурті — Брахма, Вішну і Шіва — уособлює творення, збереження та знищення, тобто основні процеси Всесвіту. Число 108, священне в багатьох традиціях, асоціюється з повнотою й цілісністю: у буддійських та індуїстських чотках (мала) саме 108 намистин — число, в

якому, за уявленнями, поєднуються Сонце, Місяць і Земля у своїх відносних відстанях і діаметрах.

Це число також зустрічається у Ведах і ритуалах, що свідчить про те, як абстрактна ідея числової досконалості увійшла в релігійну практику. Деякі дослідники припускають, що воно пов'язане з наближеним значенням числа π , відображаючи раннє астрономо-математичне мислення.

Математичні ідеї присутні й у ведичних ритуалах жертвоприношення (яг'я). Побудова вівтарів (веді) підпорядковувалася строгим геометричним правилам, описаним у текстах Шульба-сутр (прибл. VIII–V ст. до н. е.). У цих текстах подано правила побудови квадратів, кіл і трикутників, іноді з використанням раціональних наближень до $\sqrt{2}$, а також формулювання, подібні до теореми Піфагора.

Таким чином, геометрія тут — не абстрактна наука, а інструмент ритуальної дії, що поєднує небесний і земний порядки. Вівтар стає моделлю Всесвіту, і кожна його сторона має числове значення та міфологічну відповідність. Індійська традиція не розділяє строго раціональне й міфологічне мислення: навпаки, міф є оболонкою знання, формою, через яку абстракція стає переживаною.

Математика в доісторичний період

Історія індійської математики починається задовго до появи письмових трактатів і філософських шкіл. Одними з найдавніших свідчень математичних знань на території Індії є археологічні знахідки у містах найдавнішої цивілізації долини Інду — Хараппі, Мохенджо-Даро, Лотхалі та Дхолавірі. Ця цивілізація існувала у III–II тисячоліттях до н. е., паралельно з культурами Стародавнього Єгипту та Месопотамії.

Однак, на відміну від них, досі не вдалося прочитати письмові джерела цивілізації Інду: її ієрогліфи залишаються нерозшифрованими. Тому все, що відомо про математику цього періоду, базується на матеріальних знахідках.

Археологічні дані свідчать про високий рівень практичної математики. Наприклад, цеглини, з яких зводилися споруди, мали чітко витримані пропорції 4:2:1 — співвідношення, що забезпечувало стійкість конструкцій.

Крім того, знайдено свідчення стандартизованої системи мір. Під час розкопок було виявлено гирі різної маси, виготовлені у формі кубів, циліндрів та інших геометричних тіл. Одиниці ваги були кратні одна одній у системі, заснованій на співвідношеннях $1/20$, $1/10$, $1/5$, $1/2$, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 і 500. Одна одиниця ваги становила приблизно 28 грамів — майже стільки ж, як англійська або грецька унція.

Цікаві й знахідки, пов'язані з вимірюванням довжини. У Мохенджо-Даро виявлено вимірювальний інструмент — своєрідну лінійку, поділену на десять рівних частин. Одиниця довжини становила близько 3,4 см (або 1,32 дюйма), і цеглини, знайдені на місці, часто мали розміри, кратні цій величині. Це свідчить про прагнення до стандартизації та точності — надзвичайне досягнення для свого часу.

Нарешті, у Лотхалі та Дхолавірі знайдено порожнисті циліндричні предмети з мушель молюсків. Дослідження показали, що вони, ймовірно, використовувалися для

вимірювання кутів і зорієнтування за зірками, тобто мали навігаційне призначення — ще одне непряме свідчення застосування геометричних знань.

Паралельно з цією високорозвиненою культурою існували й інші етнічні та мовні спільноти, передусім дравідійські народи. Їхні мови й культура, імовірно, домінували на субконтиненті до приходу арійських племен. Вважають, що писемність, уживана у цивілізації Інду, також належала до дравідійської традиції. На жаль, як і у випадку з китайськими гадальними написами на кістках, ці письмена поки що не піддаються розшифруванню, і не можна з певністю судити про рівень абстрактних математичних знань того часу.

Нумерація

Один із найважливіших внесків Індії у світову науку — створення десяткової позиційної системи числення та цифр, які сьогодні називаються «арабськими», хоча самі араби називали їх індійськими (аракам аль-хінд). Саме ця система з дев'ятьма знаками й нулем стала основою сучасного запису чисел і арифметики.

Лічба цілих чисел в Індії з глибокої давнини мала десятковий характер. Це частково пов'язано з мовою: санскрит — індоевропейська мова, споріднена з латинською та давньогрецькою. Уже самі числівники — ека (1), дві (2), трі (3) — нагадують європейські відповідники. В усній традиції рахунку застосовувалися як адитивний, так і субстрактивний принципи: число 19 можна було висловити як навадаша («дев'ять-десять») або як екауна-вімшаті («без одного двадцять»). Примітно, що в санскриті існували власні назви чисел аж до 10^{50} — це свідчить про розвинену числову уяву та філософський інтерес до безмірно великих величин.

На ранньому етапі в Індії використовувалися різні цифрові системи. Однією з перших була нумерація кароштхі, поширена у Північній Індії з VI ст. до н. е. до III ст. н. е., зокрема під впливом перської традиції. Запис у ній вівся справа наліво, як у фінікійській, і нагадував її побудовою знаків. Використовувалися символи для 1, 10, 20 і 100, а також цікавий особливий знак для 4 (у формі хреста).

Та найвпливовішою стала система брахмі, що застосовувалася з VI ст. до н. е. і записувалася зліва направо. Саме її вважають безпосереднім попередником сучасних індійських цифр. Цифри брахмі вже мали окремі знаки для чисел від 1 до 9 — ключову відмінність, яка відкрила шлях до позиційної системи.

До сотень обидві ці системи спиралися на адитивний принцип, а для більших чисел — на мультиплікативні конструкції: знак множника (наприклад, 100 або 1000) поєднувався з числом, що вказувало кратність. Такі риси робили індійські системи спорідненими з фінікійською та китайською: перші три цифри майже збігаються, а знак «чотири» у вигляді хреста трапляється і в Китаї.

Принциповий злам настав із появою позиційного десяткового запису, коли значення цифри почало залежати від її місця. До VI ст. н. е. вже зафіксовані записи чисел на кшталт 346, де ті самі знаки позначають одиниці, десятки й сотні — залежно від позиції. Однак нуля як самостійного символу спочатку не існувало: на рахівниці просто залишали порожнє місце.

Потреба позначити «ніщо» породила ідею нуля. Слово шунья («порожнеча») стало його санскритським позначенням. В індійській поетичній і мнемонічній традиції числа часто виражалися словами та образами: одиницю передавали словами «Місяць» або «Земля», двійку — «очі» чи «близнюки», четвірку — «сторони світу», а нуль — як «дірка», «небо», «порожнє». Така словесна система числення (бхутасанкхья) була зручною для поетичного викладу обчислень і широко використовувалася в математичних трактатах, де одне й те саме слово могло позначати різні розряди залежно від позиції. Наприклад, число 1021 можна було записати як «Місяць — дірка — крила — Місяць».

Перше документоване вживання символу нуля — настінний напис у Гваліорі (876 р.), де число 270 подано з явним кружечком на місці десятків. Однак ідея нуля, можливо, має давніші корені. Деякі дослідники (зокрема Г. Фрейденталь) припускають грецький вплив через шістдесяткову астрономічну систему, де літера «о» могла виконувати роль пустого розряду. Інші (Дж. Нідем) вважають, що концепція нуля прийшла зі сходу, з прикордоння китайської та індійської культур. Написи VII ст. у Камбоджі й Індонезії вже фіксують нуль як крапку або кружок.

До VIII ст. індійські цифри й методи лічби починають проникати в арабський світ. У перекладах індійських математичних текстів слово шунья перекладалося як арабське сифр («порожнеча»), звідки через латинське *cifra* й походять сучасні європейські терміни: zero, Ziffer, «цифра». Єпископ Севера Себохт, який писав у 662 році, захоплювався індійською системою рахунку з дев'ятьма знаками, що, за його словами, перевершувала всі відомі описи.

Індійські вчені не лише створили числову символіку, а й запропонували альтернативні способи запису: наприклад, Аріабхата пропонував використовувати літери санскритського алфавіту для позначення чисел. Проте саме система з цифрами — спершу на основі знаків брахмі, а згодом деванагарі — отримала всесвітнє поширення.

Арифметичні дії та дроби

Якщо геометрія Європи значною мірою успадкована від греків, то арифметика, якою ми користуємося сьогодні, безперечно походить з Індії. Саме індійські математики вперше розробили правила обчислень, засновані на позиційній десятковій системі — тій самій, що лежить в основі сучасної арифметики. Їхні трактати містили не лише алгоритми обчислень, а й заклали фундаментальні поняття, які згодом стали загальноприйнятими у світовій математичній традиції.

До основних арифметичних операцій індійці відносили додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до квадрату й куба, а також добування квадратних і кубічних коренів. Уже в працях Аріабхати (V ст.) і Брахмагупти (VII ст.) описані чіткі методи виконання всіх цих дій. Причому індійська арифметика від самого початку оперувала не лише додатними числами, а й нулем і від'ємними величинами — це було новаторським кроком у порівнянні з античною традицією.

Обчислення здійснювалися на рахівниці, посипаній піском або пилом, через що сам процес називали дхулі-карма — «робота з пилом». Числа писали загостреною паличкою великими знаками, щоб уникнути плутанини, а проміжні результати відразу стирали. Це вплинуло й на характер методів: вони були спрямовані на компактність і економію

місця. Наприклад, під час множення множник поступово стирався і замінювався цифрами добутку — своєрідне «візуальне програмування» на піску.

Додавання й віднімання виконувалися як від молодших розрядів до старших, так і навпаки. Множення мало кілька варіантів — від послідовного «в стовпчик» до побудови сітки, де проміжні добутки розташовувалися у трикутниках і підсумовувалися по діагоналях. Один із таких методів нагадує сучасне «японське множення» або «метод решітки»: він був наочним, зручним і надзвичайно ефективним при ручних обчисленнях.

Під час ділення дільник розміщували під діленим, і з перших цифр діленого віднімали найбільше можливе кратне дільника. Потім дільник зміщували праворуч, і процес повторювався. Це був не просто формальний алгоритм, а цілісна система з власною логікою, близька до сучасного ділення «в стовпчик».

Особливу увагу індійці приділяли піднесенню до степеня та добуванню коренів. У «Патіганіті» Шрідхари (IX ст.) трапляються формули, що відповідають сучасним формулам скороченого множення.

Для перевірки правильності обчислень індійські математики використовували метод, відомий як «правило дев'ятки»: остачу від ділення числа на 9 порівнювали з остачею від суми його цифр. Якщо два числа множилися, перевірка полягала в тому, щоб зіставити остачу від добутку з добутком остач множників. Хоча цей метод забезпечував лише необхідну, але не достатню умову правильності, він виявився надзвичайно зручним і набув широкого поширення — спочатку в арабському світі, а потім і в Європі.

Індійські математики володіли мистецтвом роботи з дробами задовго до того, як дроби стали звичними в європейській математиці. Уже в середині II тисячоліття до н. е. згадуються дроби ардха ($\frac{1}{2}$), пада ($\frac{1}{4}$), трипада ($\frac{3}{4}$) і кала ($\frac{1}{60}$). З часом дроби почали записувати у майже сучасній формі — чисельник над знаменником, без дробової риски. Такі записи відокремлювалися горизонтальними або вертикальними лініями й трапляються у працях, що вплинули як на китайську, так і на візантійську традиції.

Додавання дробів позначали простим розміщенням їх поруч, віднімання — знаком або крапкою справа. Змішані дроби записували по-різному: або як ціле число поруч із дробом, або як єдиний вираз із чисельником і знаменником. Іноді навіть цілі числа подавали як дробі зі знаменником 1.

Правила роботи з дробами в індійців майже не відрізнялися від сучасних: зведення до спільного знаменника, множення «чисельник на чисельник, знаменник на знаменник», ділення — через обернення дільника. У ранній період спільним знаменником просто ставали добутки всіх знаменників, але пізніше (починаючи з IX ст.) почали використовувати найменше спільне кратне — саме так робив, наприклад, Шрідхара.

Ведійський період

Уже в Самхітах — найдавнішому шарі ведійської літератури — виявляється увага до чисел і дій з ними. Зокрема, у Яджурведа-самхіті (бл. 1200–900 рр. до н. е.) подається послідовність степенів десяти — від сотні до трильйона. Під час жертвопринесення ашвамедха виголошувався гімн, у якому кожне число називалося на ім'я: śata (10^2),

sahasra (10^3), ayuta (10^4), niyuta (10^5), prayuta (10^6), arbuda (10^7), nyarbuda (10^8), samudra (10^9), madhya (10^{10}), anta (10^{11}), parārdha (10^{12}). Сама структура мови закріплювала потужну десяткову систему, яка згодом стане основою індійського десяткового запису.

У Рігведі (наприклад, у гімні Пуруша-сукта, 10.90.4) трапляються згадки про дробові частини: «з трьома чвертями Пуруша піднявся вгору, одна чверть залишилася тут».

Одним із найважливіших джерел знань про ранню індійську математику залишаються Шульба-сутри — розділ ведійської літератури, присвячений будівництву вівтарів (веді) у ритуалах жертвопринесення (шраута). Назва походить від слова śulba, що означає «мотузка» або «шнур»: вимірювальні шнури були головним інструментом жерців-будівничих. Однак за цими, здавалося б, суто прикладними текстами приховується один із найдавніших шарів математичного знання.

Шульба-сутри дійшли до нас у кількох версіях, створених різними авторами: Баудгаяною (бл. 800 р. до н. е.), Манавою (бл. 750 р. до н. е.), Апастамбою (бл. 600 р. до н. е.) та Катьяною (бл. 200 р. до н. е.). Їхня датування ґрунтується переважно на історико-граматичному аналізі санскриту, особливо у порівнянні з видатною граматичною працею Паніні (V ст. до н. е.), у якій понад 4000 правил описують структуру мови з математичною точністю. Вони входять до ширшого корпусу Шраута-сутр, але вирізняються саме своїм математичним змістом.

Найдавнішими вважаються Шульба-сутри Баудгаяни — саме в них з'являються перші формулювання геометричних принципів, багато з яких сьогодні пов'язують з іменем Піфагора. Наприклад, у Шульба-сутрах Баудгаяни стверджується: «Діагональ квадрата створює подвоєну площу», «Площі, побудовані на сторонах прямокутника, у сумі дорівнюють площі, побудованій на діагоналі». Далі подається перелік прямокутних трикутників з цілими сторонами — так званих «піфагорових трійок»: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) та інших. Ці числа використовувалися в ритуальній практиці для побудови прямих кутів — адже точність орієнтації та пропорцій жертовника вважалася необхідною для досягнення бажаного результату: здобуття «небес», «світу Брахмана» або перемоги над ворогами.

Мабуть, ні в одній іншій давній цивілізації зв'язок між ритуалом і математикою не проявився так яскраво, як в Індії. Уже в I тисячолітті до н. е. тут формується унікальна традиція, у якій математичне мислення виростає із сакральної практики — будівництва жертовних вівтарів. Ці вівтари, попри їхню очевидну «утилітарність», були втіленням космічного порядку, і будь-яке відхилення від приписаних форм і розмірів уважалося не просто помилкою, а загрозою ритуальному й навіть всесвітньому балансу.

У Шульба-сутрах підкреслюється: форма вівтаря не може бути довільною. Відхилення від встановлених пропорцій робить жертвопринесення марним, а іноді навіть небезпечним. Саме тому геометрична точність стає справою не стільки практики, скільки священного обов'язку. Форми вівтарів вражають різноманіттям: квадрат, коло, півколо, трикутник, сокіл із прямими або вигнутими крилами, черепаха, махаведі — священний вівтар у формі рівнобедреної трапеції.

Особливий інтерес становить вівтар у формі сокола, який складався з п'яти шарів по 200 цеглин у кожному. Шари 1, 3 і 5 були однаковими, як і 2 та 4, але між ними не мало бути збігів швів. Ця вимога на практиці приводила до комбінаторних задач, що передбачали

ідею оптимізації форми за умови симетрії та обмежень. Крім того, прагнення використати найменшу кількість різних форм цеглин демонструє раннє усвідомлення принципу економії як засади раціонального проектування.

При цьому ритуальні приписи нерідко вимагали, щоб вівтарі різної форми мали однакову площу, що приводило до постановки й розв'язання геометричних задач: перетворення квадрата на рівновеликий круг, круга — на рівновеликий півкруг, прямокутника — на рівновеликий квадрат.

Так, в одній із формул Баудгаяни для перетворення квадрата на круг пропонується провести коло радіусом трохи менше половини діагоналі квадрата, скоригованої додаванням однієї третини виступаючої частини. Це дає наближене значення числа π , близьке до 3,088. Інший спосіб «округлення квадрата» приводить до значення $\pi \approx 3,004$. Ці оцінки далекі від сучасних, але важливі не самі цифри, а сама ідея наближення та геометричної реконструкції — вона свідчить про розвинене просторове мислення.

На увагу заслуговує й оцінка квадратного кореня з 2. В одному з уривків Баудгаяни подається вислів: «Збільш міру на третину, потім цю третину — на чверть, і зменш тридцять четверту частину від останньої — це й буде діагональ квадрата». У перерахунку це дає значення $\sqrt{2} \approx 1,4142$ — досить точне наближення, що відповідає дробу 577/408. Деякі дослідники припускають, що така точність могла бути пов'язана з усвідомленням ірраціональності $\sqrt{2}$, хоча прямих свідчень цього в текстах немає.

Попри числові обчислення, Шульба-сутри зберігають радше ритуально-практичний, ніж теоретичний характер. Їхня мета — не обґрунтування чи доведення, а припис алгоритму. Формат стислих правил-сутр, зручних для запам'ятовування, відображає ведійну традицію усної передачі знань. Кожна формула була частиною живої практики, де точність вимірювань мала не лише архітектурне, а й сакральне значення.

Деякі дослідники, зокрема Фріц Стаал і Абрагам Зайденберг, висували сміливі гіпотези про те, що подібна «ритуальна геометрія» могла стати джерелом геометричних знань і в інших культурах, зокрема в Давній Греції. Можливо, самі жерці не прагнули до формальної математики, але створили підґрунтя, на якому згодом могла постати більш абстрактна наука.

Однак історик Девід Пінґрі застерігав від надмірних узагальнень. Не можна виключати, що у ведійській Індії існували й інші — неритуальні — джерела геометрії, просто вони не збереглися. До того ж, як зазначає Кім Плофкер, саме включення математичних знань до складу ритуальної практики могло бути не первісним, а свідомим кроком — спробою «освятити» вже наявну практичну геометрію.

Як би там не було, Шульба-сутри — унікальна пам'ятка: вони дозволяють зазирнути в ту епоху, коли математика ще не була наукою, але вже перестала бути простим ремеслом. Вони демонструють, як із ритуалу народжується порядок, а з бажання догодити богам — прагнення до точності, гармонії та симетрії.

Втім, ритуальні практики були не єдиним джерелом математичних інтуїцій у ведійській культурі. Уже в пізньоведійський період (близько V ст. до н. е.) стикаємося із зародженням формального мислення, що виходить за межі геометрії. Найяскравішим прикладом є праці Паніні — граматики, який створив систему правил санскритської

морфології та синтаксису, співмірну за строгістю і системністю з сучасними формальними мовами. Його трактат Аштадг'яї, що налічує понад 4000 сур, фактично являє собою давню форму граматичного алгоритмування. Саме тут з'являється те, що можна назвати «алгебраїчною інтуїцією»: побудова виразів на основі формальних правил, використання змінних і метаправил, синтаксична рекурсія.

Цікаві й інші прояви ранньої раціоналізації та кодування знань. Наприклад, у добре відомій Камасутрі Ватсьяяни (орієнтовно IV ст. до н. е.), яку на Заході зазвичай сприймають лише як посібник із сексології, поруч із трактатами про насолоди й соціальні норми міститься перелік із 64 мистецтв (калā), якими, на думку автора, повинна володіти культурна жінка. Серед них — мистецтво під номером 44, млечхіта вікальпа — «мистецтво таємного письма й зашифрованих послань». Попри побутову мотивацію (щоб любовне листування не потрапило до чужих рук), описані прийоми — від заміни букв парами до перестановки за фонетичними зв'язками — фактично становлять ранні форми підстановочних шифрів. Коментатори Камасутри, такі як Яшодхара (X–XIII ст.), докладно описували системи Каутільї та Муладевії, що застосовувалися не лише в особистому листуванні, а й у політичній та військовій розвідці.

На цьому тлі з'являються й перші постаті, чиї праці можна назвати математичними в повному розумінні слова. Одним із таких учених був Пінгала (близько III–II ст. до н. е.) — автор трактату Чандас-шастра, присвяченого віршуванню. Попри поетичний предмет, праця Пінгали містить напрочуд глибокі математичні ідеї. Він описує рекурсивну схему побудови всіх можливих комбінацій важких (гуру) і легких (лагху) складів — по суті, бінарних послідовностей, — що робить його одним із перших дослідників комбінаторики.

Коментарій Халаюдхи до Чандас-шастри (X ст.) уже містить явну геометричну інтерпретацію цих схем — «сходи гори Меру», що, по суті, є індійським аналогом трикутника Паскаля. У ньому склади розташовуються за рівнями: перший — одна можливість, другий — дві, третій — три і так далі. Комбінації, що відповідають кожному рівню, репрезентують усі можливі метричні структури з даної кількості складів. Такий підхід не лише демонструє елементарну ідею біноміальних коефіцієнтів, а й приводить до відомої тотожності

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Пінгалі також приписують перше використання терміна шунья («порожнеча») у числовому контексті — раннє свідчення концепції нуля. Його система числення ґрунтується на двійковому кодуванні, де «0000» позначає першу з можливих комбінацій і відповідає одиниці. При цьому запис чисел у Пінгалі збільшується не зліва направо, як у сучасній бінарній системі, а справа наліво.

Паралельно продовжується розвиток геометричної думки в межах традиції Шульба-сутр — посібників із геометрії вівтарів. Тут особливо вирізняється ім'я Кат'яяни (III ст. до н. е.) — останнього великого представника ведійської математичної школи. Його версія Шульба-сутри узагальнює теорему, подібну до піфагорової, і дає наближене значення квадратного кореня з двох із точністю до п'яти знаків після коми — результат,

вражаючий навіть із сучасного погляду. Окрім геометрії, Катьяна продовжує граматичну лінію Паніні, створюючи розширення та пояснення до його праці — що, можливо, й об'єднує цих мислителів у межах ширшої інтелектуальної традиції.

Отже, на межі ведійського та постведійського періодів спостерігається не лише розвиток практичної та ритуальної математики, а й формування елементів теоретичного підходу — до мови, до інформації, до числа. У цьому складному переплетенні метрики, граматики, шифрів і вівтарної геометрії поступово кристалізується те, що можна назвати ранньоіндійською математичною культурою — багатою, формалізованою й глибоко оригінальною.

З переходом до постведійської епохи — приблизно з VI ст. до н. е. — в інтелектуальному житті Індії відбуваються значні зміни. Формуються даршани — філософські школи, кожна з яких пропонувала свій спосіб пізнання світу. Серед них були як натурфілософські — ньяя і вайшешика, так і більш метафізичні чи аналітичні — санх'я та міманса. У цих школах формувалися поняття доведення, логіки, аналітичного мислення — усього того, що згодом стане фундаментом як філософії, так і математики.

Особливу роль відіграло становлення освітніх центрів — таких як Такшашіла й Наланда, де вперше склалися умови для систематичного викладання наук. У цих умовах математика починає відокремлюватися від ритуалу, набуваючи форми наукового дослідження. Це відкриває шлях до творчості Ар'ябати, Брахмагупти та інших учених класичного періоду.

Математика джайнізму

Переїшовши від постведійського етапу до епохи становлення джайнізму, опиняємося в зовсім іншому інтелектуальному середовищі. Тут на перший план виходить не стільки ритуальна практика, скільки філософська рефлексія та спроба осмислити природу світу через логічні категорії та числові структури.

Хоча джайнізм як релігія і філософська система виник ще до VI ст. до н. е., більшість збережених джайнських математичних текстів були написані пізніше, починаючи з IV–III ст. до н. е. Ці тексти становлять важливу посередню ланку між ведійською математикою, тісно пов'язаною з ритуалами, та більш зрілою «класичною» індійською математикою, в якій домінували астрономія та алгебра.

Одним із ключових досягнень джайнської математичної традиції стало звільнення математичних міркувань від суто релігійного або жертвенного контексту. Мета джайнської математики — не просто вимірювання чи обчислення, а класифікація, розуміння масштабів світобудови та систематизація знань. На відміну від грецької традиції, що прагнула до аксіоматичності, або від ведійської, пов'язаної з утилітарною геометрією, джайнська математика спочатку використовувалася для опису кармічних потоків, структури часу та устрою Всесвіту.

Особливу увагу джайнські мислителі приділяли концепції нескінченності. Це, мабуть, перше в світовій історії філософське вчення, де нескінченність не тільки допускається, а й класифікується. У джайнській космології існують кілька видів нескінченності:

– нескінченність у просторі (*pradeśānantya*),

- нескінченність у числі душ, подій, кармічних частинок (jīvānantya, dravyānantya),
- нескінченність у знанні (jñānānantya).

Така типологія нескінченного — крок, на який європейська математика наважилася лише в новий час, починаючи з Галілея та Кантора. У джайнів нескінченність — це не абстрактний граничний концепт, а конкретна, класифікована реальність.

На цьому тлі виникає інтерес до систематики чисел. Джайнські тексти розрізняють saṅkhyāta — чисельно виражене, asaṅkhyāta — незмірно велике, але все ж скінченне, і ananta — справді нескінченне.

Це розрізнення нагадує середньовічні суперечки в Європі про різницю між «великим числом» та «істинною нескінченністю», але передбачає їх більш ніж на тисячу років.

Цікаво, що в джайнських творах вперше з'являється чітке визначення нескінченно малих величин. Хоч ці уявлення ще не формалізовані в дусі математичного аналізу XVII ст., сама ідея «переходу до границі» на інтуїтивному рівні вже присутня. Зокрема, у текстах зустрічаються роздуми про тривалість часу, рівну найменшому можливому моменту (samaya), і його зв'язок з кармічними процесами.

Особливого згадування заслуговує трактат Таттвартха-сутра (бл. III ст. н. е.) — канонічний джайнський текст, у якому зроблено спробу викласти метафізику з опорою на числову символіку. Тут також зустрічається ідея перераховуваної нескінченності — усе, що можна уявити як сукупність дискретних елементів, підлягає систематичному опису. Не дивно, що джайнська логіка згодом стала основою для розвитку індійської теорії логіки (анвікшікі), а числа — частиною моральної філософії.

У сфері геометрії джайнські автори розвивали уявлення, успадковані від ведійської традиції, але з ухилом у символізм і космологію. Вони описували Всесвіт як гігантську фігуру, що нагадує подвійний барабан (або пісочні годинники), поділену на три світи: верхній, середній і нижній. Усі її параметри виражалися числами та пропорціями. Наприклад, діаметр середньої частини, де мешкають люди, строго задавався — 100 000 йоджан (одна йоджана приблизно 12–15 км). Простір навколо населеної частини описується як порожній, але потенційно заповнюваний. Це вимагало врахування нескінченно малих об'ємів і приводило до побудови своєрідної геометрії границь.

Якщо авторів Шульба-сутр цікавило насамперед будівництво вівтарів і розрахунок їхніх площ, то джайнів хвилювала більш абстрактна й універсальна сторона математики. Вони не обмежувалися вивченням площі круга, як це робили ведійські жерці — їх цікавили також довжина кола та взаємозв'язок між довжиною кола, площею й радіусом круга. Джайнські вчені знали, що відношення площі круга до квадрата радіуса таке саме, як відношення довжини кола до діаметра. В одному з джайнських текстів навіть зустрічається формула $S = Ld/4$, де S — площа круга, L — довжина кола, d — його діаметр.

З цієї формули нескладно вивести відоме нам відношення $\pi = L/d$, хоча самі джайни виражали його інакше — наприклад, наближеною формулою $L = \sqrt{10} d$, що відповідає $\pi \approx 3,162$, трохи більше за істинне значення, але досить точне для свого часу.

Особливий інтерес становили й геометричні фігури, пов'язані з кругом: хорди, сегменти, сектори. Джайнські тексти містять дивовижно точні формули, наприклад довжина

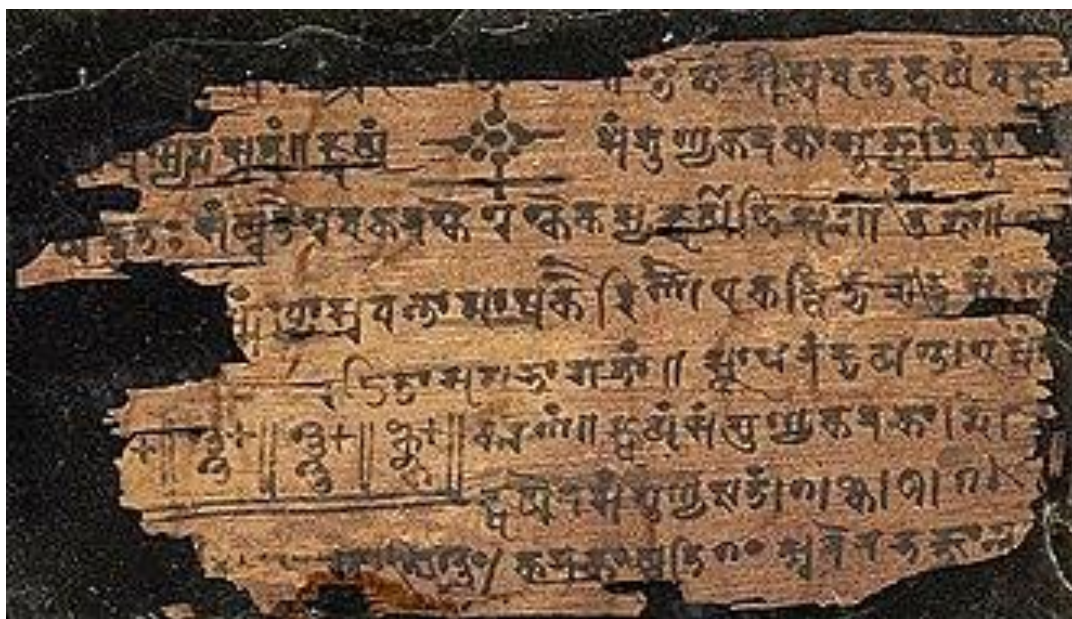
хорди, що відсікає сегмент висотою h , дорівнює $c = \sqrt{4h(d - h)}$, діаметр круга за відомою висотою сегмента і хорди обчислюється як $d = (c^2/4 + h^2) / h$, довжина дуги, що відсікає сегмент, дорівнює $a = \sqrt{c^2 + 6h^2}$.

Ці формули ґрунтуються на наближеній геометрії круга і, ймовірно, пов'язані з тією ж формулою $L = \sqrt{10} d$. Подібні геометричні задачі виходили далеко за межі вівтарної архітектури — вони свідчать про інтерес до чистої математики та вміння працювати з наближеннями.

У спробі уточнити значення довжини кола джайни, ймовірно, зверталися до аналізу многокутників, вписаних у коло. Наприклад, могли використовувати дванадцятикутник і шестикутник — фігури, легко обчислювані та зручні для наближених розрахунків.

Манускрипт Бакхшалі

Джайни відіграли важливу роль у розвитку абстрактного мислення та підходів до чисел, але тривалий час математичні знання в Індії передавалися переважно усно. Формули, міркування та алгоритми зберігалися в пам'яті, передавалися від учителя до учня у вигляді коротких віршів або ритуалізованих пояснень. Проте з часом в Індії почали з'являтися й письмові тексти, що фіксували математичні ідеї в більш розгорнутій формі. Одним із найзагадковіших і найвражаючих таких документів є манускрипт Бакхшалі — давня рукопис, у якій несподіваним чином переплелися арифметика, алгебра та початки обчислень із наближеннями.



Її знайшли у 1881 році в селі Бакхшалі, що тоді входило до Британської Індії (нині — територія Пакистану). Рукопис був закопаний у землю та написаний не на папері, а на висушеній корі дерева. Сьогодні він зберігається в бібліотеці Оксфордського університету, але через крихкість практично не показується публіці.

Рукопис не належить якому-небудь одному автору чи часу: сучасні радіовуглецеві дослідження показали, що різні його фрагменти могли бути написані у різні століття — від III до X ст. н. е. Це свідчить про те, що текст не був єдиним твором, а скоріше

робочим зібранням знань, до якого поверталися знову і знову, доповнюючи та переписуючи. В одному місці манускрипту згадується певний брахман — представник вищої жерцівської касты, син людини на ім'я Чаджака, якого називають «царем обчислювачів». Це, можливо, і був автор або переписувач. Там же зазначено, що рукопис призначався для учня — сина мудреця. Це може означати, що текст створювався в освітніх цілях — для передачі знань від учителя до учня.

Незважаючи на свій неакадемічний, «чернетковий» вигляд, манускрипт Бакхшалі містить вражаюче різноманітний математичний матеріал. Причому задачі та правила подані не просто списком, а в певній формі: спершу правило — зазвичай у віршах, потім приклад, його розв'язок і перевірка. Такий спосіб подачі робить манускрипт схожим на підручник або зошит з математики.

Серед задач — квадратні рівняння, знаходження квадратного та кубічного кореня, обчислення відсотків, пропорцій, поділ спадщини, задачі на змішування товарів, підрахунок прибутку — словом, справжній курс прикладної арифметики для торговця, землеміра чи податкового збирача. Але є й задачі, що передбачають абстрактне мислення та роботу з невідомими, як в алгебрі: використовується позначення змінної і розв'язуються задачі на знаходження чисел, що задовольняють певним умовам. Одна з цікавих задач стосується двох подорожніх, у яких різні швидкості та різні «прирости» швидкості. У віршованій формі подано правило, як знайти момент часу, коли вони опиняться в одній точці.



Особливо цікаво, що в рукописі використовується символ, що позначає нуль — маленький кружок (shunya-bindu), який вважається одним із найдавніших відомих прикладів такого позначення в індійських текстах. Це не «нулеве число» як

результат віднімання, а скоріше позиційний нуль — знак, що дозволяє розрізняти, наприклад, 204 і 24. Це означає, що автори рукопису користувалися позиційною десятковою системою числення, вже близькою до сучасної.

Класичний період

З IV століття починається те, що прийнято називати золотим віком індійської математики. Цей період тривав до XII століття і охоплював діяльність таких видатних учених, як Ар'ябхата, Варахаміхіра, Брахмагупта, Бхаскара I і II, Махавіра, а пізніше й представників Керальської школи, таких як Мадгава зі Сангамаграми та Нілакантха Сомаяджі. Саме тоді індійська математична традиція набула оформленого, багатогранного вигляду та почала впливати далеко за межами Індії — спершу на арабський світ, а згодом і на Європу.

Особливо важливо, що в цей період математика розвивається не як окрема теоретична дисципліна, а як частина ширшої наукової області, званої джйотиша-шаstra (jyotiḥśāstra), що можна перекласти як «наука про світила». Ця область об'єднувала три

взаємопов'язані частини: ганіта (gaṇita) або тантра — власне математичні розрахунки, правила та формули; хора (hora) — астрологія гороскопів, розрахунок положень планет при народженні та передбачення; самхіта (saṃhitā) — більш загальна астрологічна та метеорологічна інтерпретація явищ, включаючи передбачення на основі природних ознак, затемнень тощо.

Таким чином, майже вся серйозна математика того часу виникає в контексті астрономічних текстів, у яких розрахунки руху небесних тіл, визначення координат планет і часових циклів вимагали глибоких і точних математичних методів. Ці праці створювалися санскритом, переважно у віршованій формі, із наступними коментарями прозою. Це дозволяло усній традиції зберігатися та поширюватися протягом століть.

Один із найраніших і найвпливовіших текстів цього періоду — Сур'я-сиддханта (буквально «Учення Сонця»), що є не лише астрономічним трактатом, а й видатним пам'ятником математичної думки. Сучасна редакція тексту датується приблизно VIII століттям н. е., хоча окремі елементи, відомі з Панча-сиддхантики Варахаміхіри (VI ст.), існували значно раніше. Написана у віршах, Сур'я-сиддханта слугувала практичним посібником для астрономів, містячи точні розрахунки та формули, викладені поетично.

Трактат містить одні з перших формальних описів тригонометричних функцій у формі, що стала стандартною в Індії на багато століть. Використані терміни включають *jya* — еквівалент сучасного синуса ($\sin$), *kojya* — аналог косинуса ($\cos$), *utkrama-jya* — «обернений синус», аналог арксинуса або довжини дуги.

Ці поняття стали основою індійської тригонометрії і пізніше були сприйняті арабською, а згодом і європейською наукою (через латинські переклади арабських текстів). Для обчислень використовувалися таблиці значень *jya* з кроком $3^\circ 45'$ — восьма частина від 30° , прийнятого ділення зодіаку. Сур'я-сиддханта застосовує теорему косинусів для сферичної тригонометрії, сформульовану словесно, наприклад, для розрахунку висоти Сонця над горизонтом. Числові наближення в тексті відрізняються високою точністю. Так, значення числа π апроксимується як 3,1414 — дивовижно близько до справжнього значення.

Автор Сур'я-сиддханти детально розглядає поняття часу, розрізняючи нескінченний, вимірюваний та надто малий для вимірювання. Вводиться одиниця тругі, приблизно рівна 29,6 мікросекунди — вражає мала величина для того часу. Система відліку часу базується на складній комбінації сонячних і місячних циклів, включаючи різні типи днів, місяців і років. Також описано способи корекції невідповідності між місячним і сонячним календарями за допомогою міжкалькуляційних циклів.

Сур'я-сиддханта не була ізольованою працею — вона увібрала в себе ідеї інших культур. У тексті присутні запозичені терміни та концепції з месопотамської, грецької та римської традицій, що свідчить про тісні інтелектуальні зв'язки Індії з елліністичним світом. Деякі розділи трактату демонструють вплив грецьких моделей (наприклад, системи епіцентрів і ексцентрів), адаптованих до індійської космології з нерухомою Землею в центрі.

Через Варахаміхіру та його працю Панча-сиддхантика (VI ст.) Сур'я-сиддханта була включена у широкий порівняльний аналіз п'яти різних індійських астрономічних

систем, включаючи системи грецько-римського походження (наприклад, Ромака-сиддханта і Пауліша-сиддханта).

Серед інших джерел тієї епохи варто відзначити календар Чхеді (594 р. н. е.), у якому використано десяткову позиційну систему з нулем — ту саму систему, яка пізніше стане основою для сучасних «арабських цифр». Цей календар є одним із перших зафіксованих свідчень практичного використання індійського числового запису в державному та науковому контексті.

Ар'ябхата

Першим із великих астрономів і математиків класичного періоду Індії був Ар'ябхата (476 — після 550 рр. н.е.). Один із небагатьох надійних біографічних фактів про нього міститься у його творі: у строфі X «Ар'ябхатії» він пише, що йому було 23 роки, коли настав 3600-й рік Кали-юги — це відповідає 499 року н.е., а отже, він народився близько 476 року.



Місце народження Ар'ябхати залишається предметом суперечок. Він сам називає себе уродженцем Кусумапури, яку традиція ототожнює з давньою Паталіпутрою — столицею Магадхи, сучасним містом Патна (Біхар). Саме тут знаходився великий науковий центр — монастир і університет Наланда, з яким, ймовірно, була пов'язана його академічна діяльність.

У коментарях Бхаскари I (VII ст.) зустрічається й інша географічна прив'язка — Ар'ябхата називається āśmakīya — «людина з Ашмаки». Це давнє царство знаходилося в районі між річками Нармада та Годаварі (сучасні штати Махараштра і Телангана). Деякі дослідники намагалися пов'язати його з Кералою (Кодунгаллур), спираючись на пізнішу традицію коментарів до Ар'ябхатії, але прямих підтверджень цьому немає.

Отже, сьогодні найімовірнішим вважається наступний сценарій: Ар'ябхата народився в одному з регіонів центральної або західної Індії (можливо, в Ашмакі), але здобув освіту та здійснив наукову діяльність у Кусумаपुरі, де, за свідченням однієї зі строф, він навіть міг очолювати навчальний заклад (використано термін *kulapa*, що може означати керівника школи або наукового колективу).

Кусумапура (Паталіпутра) того часу була не лише адміністративним, а й науково-релігійним центром, де перетиналися буддійські, індуїстські та джайнські інтелектуальні традиції. Університет Наланда, розташований неподалік, вважався найбільшим освітнім закладом свого часу. Хоча прямих свідчень того, що Ар'ябхата очолював Наланду, немає, така гіпотеза залишається правдоподібною. Також припускають, що він заснував власну обсерваторію, можливо, при храмі Сонця в Тарегані (нині — у штаті Біхар).

Ар'ябхата вважається автором принаймні трьох праць, з яких до нас дійшла лише одна — Ар'ябхатія. Його інша робота, Ар'я-сиддханта, нині втрачена, але її зміст відомий завдяки згадкам у інших авторів, таких як Варахаміхіра, Брахмагупта та Бхаскара I. У цьому тексті, який використовував систему відліку від півночі (на відміну від ранкової в Ар'ябхатії), містилося описання астрономічних приладів — від гномонів і тіньових пристроїв до водяних годинників і кутомірів. Існує також згадка про можливу арабську версію третьої праці Ар'ябхати, al-Nanf, зафіксовану у аль-Біруні.

Ар'ябхатія складається з 121 строфи (13 вступних і 108 основних) і поділяється на чотири розділи (пади):

Гітикапада — введення в індійську космологію та систему вимірювання часу (юги, манвантари, кальпи). Тут же подається таблиця синусів в одній строфі.

Ганітапада — описує методи обчислень: арифметику, геометрію, прогресії, квадратні та невизначені рівняння, а також методи розрахунку тіней.

Калакріяпада — містить астрономічні алгоритми: календарні розрахунки, визначення положення планет і міжкалендарні поправки.

Голапада — присвячена сферичній тригонометрії, будові небесної сфери, поясненню затемнень, обертанню Землі та моделям руху планет.

Хоча Ар'ябхата не використовував символ нуля і не застосовував брагмі-цифри, він користувався позиційною системою числення та позначав числа літерами санскритського алфавіту — давня мнемонічна традиція. Деякі дослідники, зокрема Жорж Іфра, стверджують, що в його записах уже була імпліцитна концепція нуля.

Ар'ябхата вивів приблизне значення числа π : $\pi \approx 62832/20000 = 3.1416$.

Це значення відрізняється від сучасного менш ніж на 0,00002, і в тексті підкреслюється, що воно наближене (слово *āsanna*), що може свідчити про розуміння ірраціональності числа π — майже за 1200 років до європейського доведення Ламберта. Він використовував термін ардха-дж'я («половина хорди»), що в арабських перекладах перетворилося на джіба, а потім помилково було перекладено латинською як *sinus* — звідси сучасне «sine». Його таблиця синусів була представлена в компактній формі.

Ар'ябхата розробив алгоритм куттакка («розщеплення») для розв'язання діофантових рівнянь виду $ax + by = c$. Цей метод став основою індійської алгебри та зберігався до середньовіччя. У Ар'ябхатії наведені формули для сум квадратів і кубів натуральних чисел.

Ар'ябхата першим в Індії чітко висловив ідею обертання Землі навколо своєї осі. У одній зі строф він пише: «Як людина в рухомому човні бачить береги, що пливуть назад, так і зірки здаються рухомими на захід, хоча Земля обертається на схід.» Це була революційна ідея, протилежна загальноприйнятому уявленню про обертання небосхилу.

Замість міфологічних Раху і Кету Ар'ябхата пояснив сонячні та місячні затемнення як наслідок тіней Землі і Місяця. Місяць і планети, на його думку, світять відбитим сонячним світлом.

Він описав геоцентричну модель з епіциклами, але з рядом особливостей: рухи планет визначалися у відношенні до Сонця, що дало підстави деяким історикам припускати

наявність прихованої геліоцентричної інтуїції. Прямих вказівок на геліоцентризм у Ар'ябхати немає.



Перший індійський супутник названо на честь Ар'ябхати

В Ар'я-сиддханті (за описами інших авторів) згадуються прилади для вимірювань: гномони, півкруглі та круглі кутоміри, водяні годинники циліндричної та дугоподібної форми, що підтверджує високий рівень технічного мислення.

Варахаміхіра

У шостому столітті нашої ери індійська наука переживала період активного зростання та систематизації знань. Після яскравої постаті Ар'ябхати, який запропонував нові математичні та астрономічні ідеї, на сцену виходить учений іншого складу — збирач, коментатор і систематизатор Варахаміхіра, представник школи Уджайни. Якщо Ар'ябхата був реформатором, то Варахаміхіра — енциклопедистом, який прагнув представити світ знань як упорядковану та завершену картину.

Про життя Варахаміхіри відомо небагато. Він народився близько 505 року в місті Уджайні (нині Уджайн, штат Мадхья-Прадеш) — одному з головних астрономічних центрів Індії. Його батько, Аді Вараха, також займався астрономією, що, можливо, визначило інтерес сина до цієї галузі. Варахаміхіра жив і працював за часів імперії Гуптів — епохи розквіту науки, мистецтва та літератури в Індії. Він знав праці Ар'ябхати, іноді полемізував із ним, але водночас цінував його внесок і нерідко спирався на його методи. Варахаміхіра не лише розвивав індійську традицію, але й, очевидно, знав про астрономічні досягнення греків і, можливо, навіть персів, що відображається у низці запозичених ідей та термінів.

Головною працею Варахаміхіри вважається «Панча-сиддхантика» («П'ять сиддхانت»), енциклопедичний огляд п'яти астрономічних систем, що існували в Індії на його час. Це не власна теорія, а компіляція, проте виконана з великим мистецтвом. Він розглядає Сур'я-сиддханту (традицію, з якою в цілому солідарний), Васиштха-сиддханту,

Пауліша-сиддханту (можливо, походженням від грецької астрономії), Ромака-сиддханту (вплив римської, тобто греко-римської традиції) та Пайтамаха-сиддханту.

Варахаміхіра не прийняв революційну ідею Ар'ябхати про обертання Землі, надавши перевагу класичному поясненню руху зірок обертанням небесної сфери. Тим не менше, його аргументи на захист цієї моделі містять елементи міркувань, близькі до наукової полеміки.

З математичної точки зору Панча-сиддхантіка цікава насамперед завдяки використанню тригонометричних таблиць та формул. Варахаміхіра склав таблиці синусів і косинусів з точністю до чотирьох знаків після коми. Він використав (або, можливо, вперше записав) основну тригонометричну тотожність та формули для синуса і косинуса подвійного кута.

Для обчислення площі круга Варахаміхіра користувався наближенням $\pi \approx \sqrt{10}$, що було достатньо точним для практичних потреб астрономії того часу.

Цікаво, що у Панча-сиддхантіці зустрічаються й комбінаторні ідеї. До Варахаміхіри джайнські математики вже розв'язали задачу підрахунку числа комбінацій із n по k . Однак Варахаміхіра підійшов до задачі інакше: він, по суті, побудував трикутник, аналогічний відомому в європейській традиції як трикутник Паскаля — спосіб наочного представлення біноміальних коефіцієнтів.

Цікавим прикладом наукового мислення Варахаміхіри є його міркування про географію Землі. Він називає міру окружності Землі — 3200 йоджан — і зазначає, що можна визначити розміри планети, користуючись спостереженнями за допомогою гномона. Ось його метафора: «...За допомогою гномона ми можемо визначати центр Землі або охоплення всієї Землі, подібно до того, як ми пробуємо смак солі, випивши трохи солоної води». Це порівняння дивовижно точно передає методику наукового висновку від часткового спостереження до загального висновку — індукції.

Іншою важливою працею Варахаміхіри є Брігхат-самхіта — своєрідна енциклопедія знань: від астрономії та астрології до метеорології, архітектури, агрономії та навіть омовін. Хоча вона має більш прикладний, ніж теоретичний характер, у цьому творі містяться важливі для історії науки відомості. Наприклад, там згадується ідея, що «речі падають на землю, бо притягуються нею» — одна з ранніх формулювань концепції гравітації, задовго до Ньютона. Проте Варахаміхіра не розвивав цю думку як математичну модель.

Варахаміхіра займає важливе проміжну ланку між новаторськими ідеями Ар'ябхати та більш строгою математичною формалізацією, яка наявна у Брахмагупти. Якщо Ар'ябхата відкрив шлях, то Варахаміхіра його вимостив і розширив, систематизувавши знання та підкресливши важливість точних обчислень і спостережень. Його роботи не були радикальними, але саме вони закріпили ключові методи та уявлення в традиції індійської астрономії та математики.

Брахмагупта, який народився всього за кілька десятиліть після Варахаміхіри, не лише знав його праці, а й у багатьому спирався на них, висуваючи власні, значно більш абстрактні та математично насичені концепції. Таким чином, Варахаміхіра став

сполучною ланкою між астрономами-практиками та математиками-теоретиками, а його праця — важливою сходинкою в розвитку науки класичної Індії.

Бхаскара I

Після Варахаміхіри, чиї праці відзначалися енциклопедичністю й прагненням поєднати математичні та астрологічні знання в єдину систему, індійська наукова думка у VII столітті продовжила розвиватися у більш спеціалізованих напрямках. Одним із таких напрямків стала алгебра й астрономія в дусі Ар'ябхати. Найяскравішим представником цієї лінії був Бхаскара I — перший великий коментатор «Ар'ябхатії», автор оригінальних математичних методів і один із перших учених, який уживав знак нуля у звичній для нас круглій формі. Він не лише продовжив традицію Ар'ябхати, а й уточнив і розвинув її, запропонувавши власні ідеї та способи обчислень.

Бхаскара, який жив приблизно між 600 і 680 роками, має в історіографії позначення «Бхаскара I», щоб не плутати його з пізнішим, але більш відомим Бхаскарою II, автором «Лілаваті». Про життя Бхаскари I відомо небагато, але з його власних текстів можна зробити певні висновки. Імовірно, він походив із області Саураштра (сучасний штат Гуджарат), де розташовувалося місто Валлабхі — тодішня столиця династії Майтраків. Також у його працях згадуються міста Шивараджапура, Бхаруч і Тханесар, що свідчить про широкий географічний горизонт і, можливо, подорожі або зв'язки з різними астрономічними школами.

Освіту Бхаскара, вочевидь, здобув від свого батька, також астронома. Хоча він був молодшим за Варахаміхіру, праці Бхаскари I ближчі за духом до Ар'ябхати — його вважають найвизначнішим представником школи Ар'ябхати та першим коментатором «Ар'ябхатії». Його шанування Ар'ябхати виявляється не лише у способі мислення, а й у побудові власних праць. У 629 році Бхаскара завершив свій знаменитий коментар — «Ар'ябхатіябгаш'ю», який став найважливішим джерелом для розуміння оригінальної праці Ар'ябхати.

Головний внесок Бхаскари I у математику пов'язаний із розвитком десяткової позиційної системи запису чисел. Ще за кілька століть до нього індійські вчені користувалися позиційним принципом — але не у цифровій, а у словесній формі. Цифри позначалися символічними словами: «місяць» означав одиницю, «очі» — два, «чуття» — п'ять тощо, причому числа записувалися у віршах і читалися у зворотному порядку: спочатку одиниці, потім десятки й далі. Такий спосіб був зручним для запам'ятовування і поетичного викладу, але мав обмеження — одне й те саме слово могло мати різні значення залежно від контексту, і не існувало чіткої системи для позначення нуля.

Бхаскара був одним із перших індійських учених, хто почав прямо використовувати брагмі-цифри, включно з символом нуля, у наукових текстах санскритом. У його працях зустрічається формула $an\text{ka}\bar{i}r\ a\bar{r}i$ — «у числах це виглядає так», після чого подавали запис числа у цифровій формі. На відміну від попередніх словесних записів, числа у Бхаскари читаються зліва направо — від старших розрядів до молодших, як це прийнято сьогодні. Хоча, ймовірно, він не був винахідником цієї системи, його праці — перше засвідчене її використання в науковій літературі, що стало важливим кроком в історії математики.

Бхаскара I написав три астрономо-математичні трактати, серед яких найвідоміші — «Махабхаскарія» («Велика [книга] Бхаскари») і «Лагхубхаскарія» («Мала [книга] Бхаскари»), а також коментар до трактату «Ар'ябхатія» свого попередника Ар'ябхати. Особливо цікаві його коментарі до 33 віршів, присвячених математиці, в яких він демонструє прагнення не просто передати правила, а й обґрунтувати їх, а не покладатися лише на традицію чи авторитет.

Одним із найвражаючих досягнень Бхаскари є його апроксимація синуса кута — красива й ефективна формула:

$$\sin x \approx \frac{4x(180 - x)}{40500 - x(180 - x)},$$

де x — кут у градусах. Ця формула описана в «Махабхаскарії», у 7-й главі. Вона дає дуже точне наближення значення синуса на проміжку від 0° до 180° , із відносною похибкою менш ніж 2%. Для порівняння, сам Ар'ябхата користувався менш точною таблицею синусів із кроком $3^\circ 45'$, де значення обчислювалися покроковими відніманнями з попереднього — оригінальна, але менш універсальна методика. Формула Бхаскари, навпаки, універсальна, застосовна до всього діапазону й майже не потребує таблиць.

Цікаво, що у викладі Бхаскари формула займає всього три санскритські шлоки — поетичні двовірші по 16 складів у рядку. В одній із цих шлок зустрічається число 40500, подане не цифрами, а поетичною формулою: «небо-хмара-стріла-небо-океан». Це відображення ще однієї давньоіндійської особливості — алегоричного запису чисел, де кожне слово символічно відповідає певній цифрі (наприклад, «стріла» = 5, «океан» = 4, «небо» = 0), а самі цифри розташовувалися у зворотному порядку — від одиниць до тисяч. Таким чином, «небо-хмара-стріла-небо-океан» = $0-0-5-0-4 \rightarrow 40500$. Це явне свідчення позиційної системи з нулем, оформленої в поетичному та культурному контексті.

Бхаскара також розглядав рівняння, еквівалентні рівнянням Пелля — рівнянням виду $y^2 - Nx^2 = 1$. Він, наприклад, ставив таке завдання: «Скажи мені, математику, яке таке число, що якщо його квадрат помножити на 8 і додати одиницю, то вийде квадрат?» Це відповідає рівнянню $8x^2 + 1 = y^2$, розв'язок якого — (1, 3), а також похідні розв'язки, наприклад (6, 17). Хоча він не подає методу побудови всіх розв'язків, сама постановка такої задачі свідчить про глибоке розуміння закономірностей.

Цікаво й те, що Бхаскара критикував наближене значення числа π , прийняте в джайнській математиці як $\sqrt{10}$, і підтримував наближення Ар'ябхати — $\pi \approx 3.1416$, близьке до справжнього значення, вважаючи π ірраціональним числом — думку, що значно випередила свою епоху.

Ще одним визначним внеском стало те, що Бхаскара першим в Індії описав чотирикутники з чотирма нерівними й непаралельними сторонами, тобто в загальному вигляді.

Що ж до астрономії, «Махабхаскарія» охоплює широкий коло тем: обчислення довгот планет, з'єднання планет і зірок, фази Місяця, сонячні й місячні затемнення, часи сходу

та заходу планет. Частину цього твору пізніше переклали арабською мовою, що вплинуло на розвиток астрономії в ісламському світі.

Брахмагупта

Брахмагупта народився близько 598 року в місті Бхілламала (сучасний Бхінмал, штат Раджастан, Індія) — тодішній столиці країни Гурджара, одного з найбільших царств Західної Індії. Його батьком був Джішнугупта. Сам Браhmaгупта вважав себе послідовником шиваїзму, і його релігійні переконання чітко позначилися на наукових суперечках із сучасниками. В одній зі своїх праць він прямо стверджував, що вірити слід Ведам, а не теоріям, які суперечать священному писанню. Особливо різко він критикував погляди Ар'ябхати, який заперечував участь демона Раху в сонячних і місячних затемненнях та твердив, що Земля — сфера, що обертається: «Серед людей є такі, що думають, ніби затемнення спричиняються не Головою [дракона Раху]. Це безглузда думка, адже саме вона викликає затемнення, і більшість жителів світу каже, що саме вона є причиною. У Ведах, які є Словом Божим, з вуст Брахми сказано, що Голова викликає затемнення. Натомість Ар'ябхата, йдучи всупереч усім, із ворожнечі до згаданих священних слів твердить, що затемнення спричиняються не Головою, а лише Місяцем і тінню Землі... Ці автори повинні підкоритися більшості, бо все, що є у Ведах, — священне.»



Голова Раху, бажаючи помститися Сонцю й Місяцю, іноді «проковтує» їх, що призводить до появи сонячних і місячних затемнень — про це нагадує статуя з колекції Британського музею (фото з [сайту Вікіпедія](#)).

Більшу частину життя Браhmaгупта провів або у рідній Бхілламалі, або в Удджайні — одному з головних наукових центрів Центральної Індії. Там він, імовірно, очолював астрономічну обсерваторію, продовжуючи традиції Варахаміхирі. Він належав до школи Браhmaпакша — однієї з чотирьох головних астрономічних шкіл Індії того часу, і вивчав праці Ар'ябхати, Латадеви, Варахаміхирі, Сімхи та інших астрономів.

Перший із двох його фундаментальних творів — «Брахма-спхута-сіддганта» — був завершений у 628 році, коли Брахмагупті виповнилося 30 років. Другий твір — «Кхандакхадьяка» — з'явився у 665 році. Його було написано в жанрі карана — практичного посібника з астрономії, призначеного для щоденного використання. Брахмагупта помер близько 668 року, ймовірно, в Удджайні.

Найвагоміший внесок Брахмагупти в математику міститься в його праці «Брахмасфутасіддганта» (близько 628 р.), де дві глави (12-та — «Обчислення» та 18-та — «Побудови») присвячені саме математиці. Попри обмежений обсяг, саме ці розділи мали величезний вплив на розвиток індійської та світової математики.

Брахмагупта першим в історії дав чіткі правила дій із нулем і від'ємними числами, розглядаючи їх як повноцінні числа, а не просто як символи. Він описав правила додавання, віднімання та множення з нулем і від'ємними числами, сформулювавши їх у формі, близькій до сучасної: сума двох від'ємних чисел є від'ємним числом; додатне й від'ємне дають різницю; рівні числа при відніманні дають нуль. Він також визначив добуток двох від'ємних чисел як додатне.

Однак ділення на нуль він тлумачив інакше: вважав, що $0/0 = 0$, а ділення ненуля на нуль залишав невизначеним, лише зазначаючи, що дільник дорівнює нулю. Незважаючи на це, його правила стали важливим кроком до включення нуля в арифметику як самостійної математичної сутності.

Брахмагупта дав розв'язки лінійних і квадратних рівнянь загального вигляду. Для лінійного рівняння $bх+c=dх+e$ він запропонував розв'язок, еквівалентний $х = (e - c)/(b - d)$. Також він навів два еквівалентні розв'язки квадратного рівняння, близькі до сучасних формул.

У його трактаті присутня рання форма діофантового аналізу: він розглядав невизначені рівняння другого порядку виду $у^2 - Nх^2 = 1$ (пізніше відомі як рівняння Пелля) і запропонував методи їх розв'язання за допомогою «дроблення» — процедури, подібної до розширеного алгоритму Евкліда. Брахмагупта також дав розв'язки систем лінійних діофантових рівнянь із кількома невідомими, що робило його підхід придатним для практичних обчислень в астрономії та календарях.

Він узагальнив формулу Герона для площі трикутника на вписані чотирикутники, отримавши відому формулу Брахмагупти:

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)},$$

де a, b, c, d — довжини сторін чотирикутника, вписаного в коло, а p — півпериметр.

Він також навів формули для діагоналей таких чотирикутників і показав, як за допомогою чотирьох прямокутних (піфагорових) трикутників можна скласти чотирикутник із цілими сторонами, діагоналями й площею — це був своєрідний прообраз цілочисельної геометрії.

Брахмагупта запропонував формули для побудови прямокутних трикутників із раціональними сторонами і для генерації піфагорових трійок. Його метод дозволяв знаходити нескінченні множини розв'язків, часто — у цілих числах.

Він також навів формули для суми перших n квадратів і кубів натуральних чисел, зазначаючи: «Сума квадратів — це сума чисел, помножена на подвоєну кількість кроків, збільшену на одиницю, і поділена на три. Сума кубів — це квадрат суми чисел до того самого числа.» Це повністю збігається із сучасними виразами.

У «Брахмасфутасіддганті» описано правила додавання, віднімання, множення й ділення дробів, а також способи їх комбінування. У главі про обчислення він пояснює, як знаходити квадратні та кубічні корені й дає зручні прийоми для ручного піднесення до степеня й добування коренів.

Алгебра Брахмагупти — так звана синкопована (скорочена), як і в Діофанта. Він використовує аббревіатури та позиційні позначення дій, що робить його праці попередниками алгебраїчної символіки. Наскільки цей стиль був запозичений у греків чи розвинувся незалежно — питання відкрите, але безсумнівно, що Брахмагупта стояв на дуже високому рівні алгебраїчної абстракції.

Вірасена

Ачар'я Вірасена (бл. 792–853 рр. н. е.) був видатним математиком, філософом і монахом-дігамбарою⁸, який належав до джайнської традиції. Він входив до духовної лінії, що бере початок від Кундакунди — одного з найвпливовіших джайнських мислителів. Вірасена уславився не лише як учений, а й як промовець і поет; серед його учнів і послідовників були авторитетні філософи й математики. Він жив при дворі раштракуцького імператора Амогхаварші в Маньякетсі (сучасна Карнатака) і його часто називали однією із «коштовних оздоб» цього двору.



Головною працею Вірасени вважається «Дхавала» — об'ємний коментар до джайнського канонічного тексту Шаткхандагама. За джайнською традицією, роботу над ним було завершено 816 року. Ця праця охоплює не лише богословські й філософські теми, а й містить важливі математичні ідеї, що розвивають спадщину раніших джайнських авторів — Кундакунди, Самантабхадри, Тумбулурі та інших.

Вірасена зробив значний внесок у розвиток індійської математики, особливо в тих галузях, які сьогодні б назвали теорією чисел і аналізом. Одним із центральних понять його математики стало ардхачххеда — кількість разів, скільки ціле число

можна поділити на 2, доки не вийде непарне. Для степенів двійки це збігається із сучасним двійковим логарифмом, але в загальному випадку ближче до поняття 2-адичної норми, розробленої лише у XX столітті. Він також розглядав аналогічні операції

⁸ Дігамбари (буквально «ті, що вдягнені простором») — одна з двох головних гілок джайнізму. Її монахи ведуть особливо суворе аскетичне життя, відмовляючись від будь-якої власності, включно з одягом, що символізує повну відмову від прихильності до матеріального світу. Дігамбарська традиція підкреслює ідею духовної чистоти, самодисципліни й внутрішньої свободи від пристрастей.

поділу на 3 (тракаччхеда) і на 4 (катуртгаччхеда), демонструючи тонке розуміння логарифмічних структур задовго до появи символічної логіки й алгебри.

Особливої уваги заслуговує запропонована Вірасеною формула для наближеного обчислення довжини кола. Він записав її у вигляді

$$C = 3d + \frac{16d + 16}{113},$$

де d — діаметр кола, а C — його довжина. Для великих d ця формула дає значення $\pi \approx 355/113 \approx 3,14159292$ — надзвичайно точне наближення, що точністю перевищує оцінку $\pi \approx 3,1416$, подану Ар'ябхатою у «Ар'ябхатіі».

Крім того, Вірасена запропонував метод обчислення об'єму усіченого конуса за допомогою своєрідної нескінченної процедури — що можна розглядати як раннє наближення до ідей інтегрального числення.

Махавіра

Махавіра, також відомий як Махавірачар'я (тобто Махавіра-вчитель), був видатним джайнським математиком IX століття. Ймовірно, він народився на півдні Індії, можливо, в районі сучасного Майсуру, і працював при дворі раштракутського імператора Амогаварші — відомого покровителя науки й мистецтва. Близько 850 року Махавіра завершив свій головний твір — «Ганіта-сара-санграху» («Зведена суть математики»), перший в історії Індії трактат, повністю присвячений саме математиці як самостійній дисципліні, без включення астрономічних матеріалів.

Махавіра систематизував і спростив багато положень, розроблених раніше Ар'ябхатою та Брахмагуптою, виклавши їх зрозумілою й чіткою мовою. Його праця охоплює елементи арифметики, алгебри, геометрії та комбінаторики й демонструє добре розвинений алгебраїчний стиль мислення. Особливу увагу він приділив методам розв'язання рівнянь і розкладу дробів, що робить цей трактат цінним джерелом для вивчення індійської математичної традиції.

Махавіра користувався десятковою системою числення та активно застосовував нуль у розрахунках. Він описав правила добування квадратних і кубічних коренів, розробив наближені методи обчислення площі й периметра еліпса та навів загальну формулу для біноміальних коефіцієнтів.

Одним із найпримітніших положень у його роботі стало визнання того, що квадратний корінь із додатного числа може мати два значення — додатне й від'ємне. Це, здавалося б, просте зауваження стало справжнім зрушенням у математичному мисленні: до Махавіри таке твердження прямо не формулювалося. Відтоді рівняння вигляду $x^2 = a$ могло розглядатися як таке, що має два розв'язки, — важливий крок у розвитку алгебри. Водночас він чітко зазначав, що квадратного кореня з від'ємного числа не існує — тим самим свідомо окреслюючи межі допустимих рішень із логічною послідовністю.

Разом із тим Махавіра вважав, що ділення на нуль нібито не змінює число — твердження, яке з сучасної точки зору є помилковим, але добре відображає складність осмислення «граничних» математичних понять у той час.

Махавіра надавав великого значення поданню звичайних дробів у вигляді суми одиничних дробів (подібно до єгипетських дробів).

Він також приділяв увагу геометричним фігурам і ввів терміни для позначення рівностороннього та рівнобедреного трикутників, ромба, кола й півкола, що відіграло важливу роль у стандартизації математичної термінології. Крім того, він навів формулу для суми геометричної прогресії.

Шрідхара

Про життя Шрідхари, індійського математика VIII–IX століть, відомо дуже мало. Ані його праці, ані згадки про нього в творах пізніших авторів не зберегли відомостей про його батьків, учителів чи місце народження. Виходячи зі змісту його задач і присвят, припускають, що він був індуїстом-шаївітом⁹, а за географічними ознаками — походив або з Бенгалії, або з півдня Індії. Його ім'я згадується у Бхаскари II (XII ст.), а подібні матеріали трапляються в працях його сучасників — Махавіри та Говіндасваміна. Це дозволяє датувати діяльність Шрідхари приблизно VIII або початком IX століття.

До нашого часу дійшли два трактати Шрідхари — «Патіганіта» та «Патіганіта-сара». Перший, повніший, має також назви Бріхат-Паті («Велика книга лічби») і Навашати («Та, що складається з дев'ятисот [віршів]»), хоча до нас дійшло лише 251 двовірш. Це практичний посібник із арифметики та обчислень, що охоплює широкий спектр тем — від лічби натуральних чисел до вимірювання площ і об'ємів. Другий трактат, Патіганіта-сара («Суть лічби»), є коротким викладом першого у трьохстах віршах і, ймовірно, слугував навчальним посібником. Крім того, відомо, що Шрідхара написав алгебраїчний трактат «Біджа-ганіта» («Алгебра»), який не зберігся, однак цитувався пізнішими авторами. Йому також приписують ще одну втрачену працю — «Ганіта-панчавімша».

У своїх творах Шрідхара викладає правила основних арифметичних дій, включно з операціями з нулем. Він чітко формулює, що при додаванні нуля число не змінюється, при відніманні нуля результат залишається тим самим числом, а при множенні на нуль виходить нуль. Для свого часу це було важливе теоретичне уточнення у трактуванні поняття нуля — абстрактної, але фундаментальної величини.

Він докладно описує правила роботи з дробами, зокрема метод ділення дробу через множення на обернений — підхід, який застосовується й сьогодні. Трактат містить також методи обчислення квадратних і кубічних коренів, правила складних відсоткових обчислень, задачі на партнерські вклади й пропорції (включно з «правилом трійки»¹⁰), задачі на спільну роботу й рух, а також формули для обчислення площ і об'ємів — від трикутника до півсфери.

⁹ Шаївіти — послідовники одного з головних напрямів індуїзму, що вшановують Шиву як верховне божество. Для шаївізму характерні ідеї аскетизму, внутрішнього самопізнання та злиття душі з абсолютном через медитацію й духовну дисципліну. У давній Індії шаївіти часто відігравали важливу роль у розвитку філософії, мистецтва та науки.

¹⁰ Правило трійки — традиційний арифметичний метод для розв'язання задач на пропорції. Якщо відомо, що три величини пов'язані співвідношенням $a : b = c : x$, то четверту величину x знаходять за формулою $x = b \cdot c / a$.

Найбільший інтерес із точки зору історії науки становить внесок Шрідхари в алгебру. Він був одним із перших індійських математиків, хто чітко сформулював метод розв'язання квадратних рівнянь — спосіб, відомий нині як «метод Шрідхари» або метод виділення повного квадрата. У сучасній формі цей метод лежить в основі універсальної формули для розв'язання квадратних рівнянь. У низці джерел її навіть називають формулою Шрідхарачар'ї. Таким чином, його праця стала кроком до символічної алгебри — загального розв'язання рівнянь із буквами як коефіцієнтами.

Він також навів правило, що дозволяє знаходити раціональні розв'язки деяких рівнянь типу рівнянь Пелля, що свідчить про його зацікавлення діофантовими задачами. У його працях зустрічаються й комбінаторні міркування — наприклад, підрахунок кількості способів вибрати p предметів із t можливих.

Манжула

Манжула (або Мунджала), який жив у першій половині X століття й розпочав роботу над своїм головним трактатом близько 932 року, належить до тих індійських астрономів, чийі імена відомі нам не з біографічних джерел, а майже виключно завдяки їхнім науковим працям. Від Манжули зберігся лише один твір — «Лагху-манаса» («Короткий [опис руху] розуму/ума»), проте він виявився настільки значним, що забезпечив авторові стійке місце в історії науки.

Про себе Манжула повідомляє небагато. У вступній строфі свого трактату він називає себе «найкращим серед брахманів» і зазначає, що належить до роду Бхарадванджа. Його коментатори, починаючи з Прашастідхари (958 рік), підкреслюють його авторитет і називають його іменем Манжула (що санскритом означає «прекрасний»), хоча в пізнішій традиції, особливо на півдні Індії, закріпилася форма імені Мунджала. Дехто вважає, що він жив у місті Пракаша-паттана на півночі Індії, неподалік сучасної Патни, у місцевості, де стояв відомий храм Сонця.

Свій твір Манжула назвав «іншим» (anyat) — можливо, маючи на увазі скорочений варіант більш об'ємного трактату Бріхат-манаса або ж спробу викласти зміст авторитетних астрономічних праць у стислій формі. Як би там не було, Лагху-манаса став самостійним і широко коментованим джерелом. Особливо сильний вплив він справив на традиції Андхра-Прадешу та Керали, де з'явилися численні коментарі санскритом, телугу та малайялам.

По суті, Лагху-манаса — це астрономічна епітома, в якій викладено методи обчислення положень планет, затемнень і календарних величин на основі праць таких майстрів, як Ар'ябхата, Брахмагупта, Лалла та Ватешвара. При цьому Манжула не обмежувався однією традицією: він однаково вільно запозичував і з ар'ябхатійської, і з брахмагуптівської школи.

Одним із найцікавіших математичних досягнень Манжули стало використання наближених значень синуса. Він першим показав, що різницю між значеннями синуса в двох близьких точках можна апроксимувати виразом $\sin w' - \sin w \approx (w' - w) \cos w$. Це фактично формула, що підводить до поняття похідної синуса за кутом, отримана задовго до виникнення диференціального числення. Згодом цю ідею розвинув Бхаскара II: його теорія малих прирощень і методи наближених обчислень функцій у

тригонометрії спиралися на подібні міркування. Таким чином, Манжула виявився на крок ближчим до поняття похідної, ніж будь-хто з його попередників.

Ар'ябхата II

Ар'ябхата II (близько 920–1000 рр. н. е.) — індійський математик і астроном, чиє ім'я супроводжується означенням «другий», аби відрізнити його від набагато відомішого Ар'ябхати I (V ст.). Хоча точні дати його життя невідомі, дослідження рукописів його головного твору дозволяють віднести період його діяльності до другої половини X — початку XI століття. Основна праця Ар'ябхати II — «Маха-сіддганта» («Велике вчення») — була відома в різних регіонах Північної Індії, зокрема на території сучасних Гуджарату, Раджастану, Уттар-Прадешу та Бенгалії. На цій підставі припускають, що він жив і працював на півночі Індії.

Відомо також, що Ар'ябхата II писав коментарі до праць попередників, зокрема Шрідхари, що свідчить про спадковість традиції й активну участь у розвитку індійської математичної школи.

Головний твір Ар'ябхати II — Маха-сіддганта, трактат із 18 глав, написаний санскритом. У ньому поєднано астрономічні та власне математичні теми, причому більшість математичних результатів безпосередньо пов'язані із задачами визначення положень планет і затемнень.

Перші дванадцять глав присвячені питанням математичної астрономії: визначенню довгот планет, обчисленню сонячних і місячних затемнень, часу їх настання, фаз Місяця, сходу й заходу планет, а також їх видимим з'єднанням. Для розв'язання цих задач Ар'ябхата II застосовує геометричні та числові методи, характерні для індійської науки того періоду.

З математичного погляду найбільший інтерес становлять останні шість глав Маха-сіддганти, присвячені геометрії, алгебрі та розв'язанню невизначених рівнянь. Ар'ябхата II наводить докладні правила для розв'язання рівнянь виду $by^2 = ax^2 + c$. Ці правила охоплюють різні випадки — коли c додатне чи від'ємне, а також залежно від парності числа проміжних поділів. Такі рівняння належать до класу діофантових і в Індії були відомі під назвою куттака (санскр. *kuttaka* — «поділ»). Розв'язки подібних рівнянь мали велике значення в астрономічних розрахунках, зокрема під час синхронізації календарів і визначення планетних циклів.

У дусі традиції, започаткованої Ар'ябхатою I, Ар'ябхата II надавав великого значення точності обчислень тригонометричних функцій, особливо синуса. Він уклав таблицю синусів із точністю до п'яти десяткових знаків — досягнення, необхідне для розрахунків положень планет і затемнень, де навіть найменші похибки могли призвести до значних відхилень.

Окрім цього, Ар'ябхата II описав метод обчислення кубічного кореня, подібний до методу Ар'ябхати I.

Хоч Ар'ябхата II не був новатором у тій мірі, що його тезка Ар'ябхата I, його праця є важливою ланкою в розвитку індійської астрономічної та математичної думки. Він систематизував відомі методи, доповнив їх новими прикладами й класифікаціями,

особливо у сфері розв'язання лінійних невизначених рівнянь. Його вплив відчутний у трактатах XI–XII століть, а Маха-сіддганта зберігалася й коментувалася протягом кількох століть, особливо в астрономічних школах Бенгалії та Східної Індії.

Шріпаті

Після видатних праць таких учених, як Брахмагупта та Бхаскара I, традиція математичних і астрономічних досліджень в Індії продовжувала розвиватися у тісному зв'язку з релігійно-астрологічною практикою. Уже з VIII–IX століть спостерігається посилення ролі астрології (джйотіша) в індійській науковій культурі. Наукова математика зберігалася як допоміжний інструмент, передусім для астрономічних обчислень і складання гороскопів. На зламі XI століття яскравим представником цієї тенденції став Шріпаті — математик, астроном і астролог, діяльність якого відображає специфіку пізньої класичної науки Індії, усе більше інтегрованої в прикладні та ритуальні контексти.

Шріпаті (бл. 1019–1066), також відомий як Шріпаті Мішра, походив із Рохінікханди — регіону в сучасному штаті Махараштра. Його батьком був Нагадева, а дідусем — Кешава. Він жив у період, коли наукова діяльність в Індії дедалі тісніше перепліталася з релігійною практикою, і сам Шріпаті був глибоко залучений у астрологічну традицію. Він перебував під впливом учення Лалли, більш раннього астронома й астролога IX століття. Слідом за цим напрямом Шріпаті писав праці з астрології, астрономії та математики, при цьому математика розглядалася ним як необхідна основа для астрономічних обчислень, що, у свою чергу, слугували астрологічним цілям.

Шріпаті увійшов в історію також як автор системи поділу домів в астрологічній карті (бхава-чакра), відомої як «система Шріпаті» — одного з основних методів в індійській астрології.

Шріпаті залишив після себе обширну й різноманітну наукову спадщину. Його праці охоплюють як прикладну астрономію та астрологію, так і математичні обчислення, що слугували цим дисциплінам. Найбільш значущими в математичному відношенні є два його твори:

«Gaṇita-tilaka». Це арифметичний трактат, написаний у 125 віршах, і, судячи з усього, залишився незавершеним. Він базувався на працях більш раннього математика Шрідхари і перетинався за змістом з арифметичним розділом іншого твору Шріпаті — Siddhānta-śekhara. Gaṇita-tilaka демонструє високий рівень розвитку арифметики в Індії й охоплює питання додавання, віднімання, множення, ділення, витягування квадратних і кубічних коренів.

«Siddhānta-śekhara». Цей обширний твір з астрономії складається з 19 розділів. Він містить значний математичний матеріал, особливо в розділах 13–15: Розділ 13 присвячений арифметиці та включає 55 віршів про числові обчислення, вимірювання й розрахунки тіней. Розділ 14 — своєрідна алгебра без символів: тут наведені усні правила дій з додатними й від'ємними числами, включно з правилами знаків при додаванні, відніманні, множенні й діленні. Також зустрічається правило розв'язання квадратних рівнянь. Розділ 15 присвячений геометрії сфери та астрономічним розрахункам, у ньому

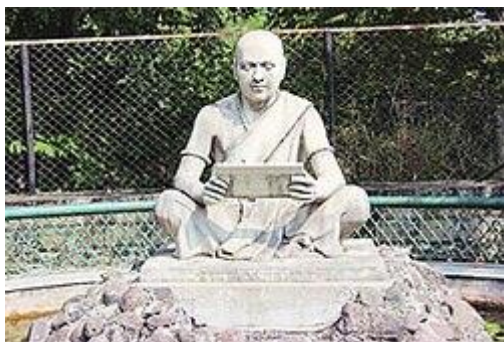
описані методи розв'язання невизначених лінійних рівнянь — підхід, що походить від Брахмагупти, але переосмислений Шріпаті.

Особливу увагу в Siddhānta-śekhara приділено таким розділам, як перестановки та комбінації, що свідчить про розвиток комбінаторики в індійській математиці того періоду.

В інших своїх астрономо-математичних працях Шріпаті досліджує сонячні та місячні затемнення, обчислює довготи планет, затемнення та планетарні транзити. Хоч ці твори передусім астрономічні, вони спираються на розвинені математичні методи, включно з використанням сферичної геометрії та обчислювальних таблиць.

Бхаскара II: завершення класичної індійської математичної традиції

Після видатних досягнень Ар'ябхати, Варахаміхіри та Брахмагупти індійська математика досягла вражаючої зрілості. Ці вчені заклали основи, на яких наступні покоління продовжували будувати — розвиваючи арифметику, алгебру, геометрію та астрономію. Їхні праці вплинули не лише на індійську наукову традицію, а й через арабських учених стали відомі в ісламському світі та, пізніше, у Європі. Особливе місце в цьому ряді займає Бхаскара II (або просто Бхаскара), якого часто вважають останнім великим математиком класичного періоду Індії. Його праці підсумовують тисячолітню історію індійської математичної думки, водночас відкриваючи шлях новим ідеям, багато з яких випереджали свій час.



Бхаскара II, також відомий як Бхаскарачар'я («вчитель Бхаскара»), народився в 1114 році н.е. у місцевості, що називалася Війжадавіда (або Війжалавіда). Точне розташування цієї села до кінця не встановлено: більшість сучасних дослідників локалізують його в районі Чалісгаон (штат Махараштра), у передгір'ях Сатпури, поблизу річки Годаварі, у традиційному регіоні Кхандеш. Бхаскара походив із брахманської

родини Дешаштха-Рігведі, яка протягом поколінь займалася математикою, астрономією та жерцівською діяльністю. Його батько, Махешвара (Махешварапандит), також був астрономом і математиком і, ймовірно, був першим учителем сина.

З поетичних строф у його головній праці Сиддханта-Шіромані відомо, що Бхаскара створив цей твір у 36 років, у 1150 році, а до 1183 року, у 69 років, завершив ще один трактат — Карана Кутухала («Цікаві розрахунки»), практичний посібник з астрономічних обчислень. Бхаскара помер близько 1185 року.

Він жив і працював у Патнадеві (неподалік від міста Патан), серед гір Сатьпура та Сах'ядрі (Західні Гати), і був очільником обсерваторії в Удджайні — одному з найстаріших наукових центрів Індії, що вважався «астрономічною столицею» давньоіндійського світу. Удджайн розташовувався на меридіані, з яким індійські астрономи співвідносили небесні координати, подібно до нульового меридіану в Гринвічі в європейській традиції.

Бхаскара належав до династії вчених: його прадіди, батько, він сам, а також син Локасамудра займали наукові посади та викладали. За переказами, у 1207 році, вже після смерті Бхаскари, його онук Чангадева організував школу для вивчення праць діда, що підтверджується храмовою написом. Саме від цих нащадків збереглася родова хроніка сім'ї Бхаскари — рідкісний приклад безперервності у історії індійської науки.

У західній науці Бхаскара став відомий на початку XIX століття, коли британський орієнталіст Генрі Коулбрук переклав фрагменти його праць і представив їх європейській аудиторії. Уже тоді стало очевидно, що Бхаскара II — один із найвидатніших математиків не лише Індії, а й усього середньовічного світу.

Головною працею Бхаскари II є Сиддханта-Шіромані («Вінець учення») — енциклопедичний твір, завершений у 1150 році. Він складається з чотирьох частин, кожна з яких може розглядатися як окремий твір: Лілаваті — арифметика та елементарна геометрія, Біджаганіта — алгебра, Грагаханіта — математична астрономія, Голадхья — сферична астрономія та астрономічна геометрія. Ця робота поєднує як строгі математичні дослідження, так і витончену поетичну форму: весь текст написаний віршами санскритом, що полегшувало запам'ятовування і поширення серед учнів.

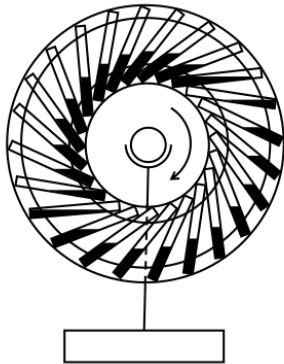
У розділі Лілаваті представлені арифметичні правила та задачі, викладені в доступній формі. Він охоплює обчислення відсотків і складних відсотків (включно із задачами на відсотки за час — рання форма процентних ставок), арифметичні та геометричні прогресії, роботу з площами й об'ємами, задачі на комбінаторику, визначення довжини тіні гномона (сонячних годинників), ранні міркування про нескінченно малі величини при вимірюванні дуг і площ, спроби обчислення значення π (Бхаскара вказує його як 3,1416), пояснення неможливості ділення на нуль, де він стверджує, що результат ділення будь-якого числа на нуль прагне до нескінченності — що свідчить про його тонке розуміння граничних переходів, хоча формального поняття границі у нього не було.

В алгебраїчному розділі Біджаганіта Бхаскара демонструє зріле володіння методами розв'язання рівнянь різних степенів. Він розв'язує квадратні, кубічні та біквадратні рівняння, працює з ірраціональними числами (сурдами), визнає існування двох коренів квадратного рівняння, включно з від'ємними, хоча і сумнівається у фізичному сенсі від'ємних чисел, пропонує методи для розв'язання рівнянь з кількома невідомими, розробляє метод чакравала — цикл переходів, що наближає розв'язок діофантового рівняння другого порядку (зокрема, узагальненого рівняння Пелля виду $x^2 - Ny^2 = 1$). Метод Бхаскари — шедевр середньовічної обчислювальної математики, аналогічний за досконалістю європейським алгоритмам XVIII століття.

Бхаскара наводить геометричні побудови та доведення, включно з доведенням теореми Піфагора і властивостей хорд та січних. У сфері тригонометрії він використовує синуси і косинуси, виводить тригонометричні формули, розробляє елементи сферичної тригонометрії, необхідні для астрономічних обчислень.

Одним із найвражаючих аспектів праці Бхаскари є інтуїтивні кроки в напрямку диференціального числення: він дає наближення значень тригонометричних функцій та їхніх змін при малих прирощеннях кута, виводить (у риторичній формі) щось подібне до похідної синуса і формулює аналог теореми Ролля (особливий випадок теореми

Лагранжа), стверджуючи, що якщо функція досягає максимуму, то в цьому місці її зміна на малому інтервалі стає нульовою. Цю теорію він застосовує у задачах про рух і падіння тіл — тим самим передбачаючи ідеї Ньютона, хоча й без загальної теорії границь і похідних.



Бхаскара не обмежувався лише абстрактною математикою. В одному зі своїх віршів він описує пристрій, схожий на перпетуум мобіле: колесо з прикріпленими по ободу посудинами, частково наповненими ртуттю. Він сподівався, що за рахунок нерівномірного розподілу маси таке колесо буде обертатися нескінченно. Хоч фізично це неможливо, сама ідея демонструє його технічну уяву та інтерес до механіки.

Праці Бхаскари залишалися актуальними на індійському субконтиненті до нового часу. Лілаваті використовувалася як підручник з арифметики протягом століть.

Індійська математика в пізньому Середньовіччі та ранньому Новому часі (XIV–XVII століття)

Після Бхаскари II індійська математична традиція продовжувала розвиватися в нових культурних та філософських контекстах. Особливо помітні два потужні осередки інтелектуальної активності: філософська логіка школи Нав'я-Ньяя та математико-астрономічна школа Керали. Їхня діяльність знаменує пізній розквіт індійської наукової традиції перед початком колоніальної епохи.

У XIV–XVII століттях індійські вчені не лише коментували праці давнини, а й пропонували оригінальні математичні ідеї — зокрема в областях, близьких до аналізу та комбінаторики. Незважаючи на географічну ізоляцію, математики Керали виробили власні методи роботи з нескінченними рядами та наближеними обчисленнями, що випередили ідеї європейського математичного аналізу на два століття.

У XIII столітті в Індії виник унікальний напрямок логіки та філософії, що отримав назву Нав'я-Ньяя — «нова ньяя». Він став розвитком більш ранньої школи ньяя і проіснував до XVIII століття. Засновником цього напряму вважається філософ Гангеша Упадхьяйя з Мітхіли, а найважливішими послідовниками — мислителі з Бенгалії, зокрема Рагхунатха Шіромані.

Головна мета школи Нав'я-Ньяя полягала в тому, щоб зробити роздуми та міркування максимально точними. Гангеша створив фундаментальну працю Таттвачинтамані («Дорогоцінність роздумів про істинне»), де не лише відповів на критику інших філософів, а й переглянув усталені поняття класичної логіки. Він запропонував новий спосіб аналізу знання, більш строгий і детальний, ніж раніше.

Нав'я-Ньяя розробила спеціальну мову для опису мисленнєвих процесів — у ній кожне поняття й кожен об'єкт чітко визначалися, а потім ретельно перевірялися за допомогою так званих праман — надійних джерел знання. Таких джерел виділяли чотири:

сприйняття, логічний висновок, аналогія та свідчення авторитету. Цей підхід дозволяв точно відокремлювати правильні висновки від помилкових і систематизувати знання.

Чому це важливо для історії математики? Справа в тому, що логіка Нав'я-Нья була дуже формальною і точною — настільки, що її можна порівняти з системою аксіом і доведень, як у математиці. Вчені цієї школи прагнули мислити так, щоб уникнути неточностей, двозначностей і логічних помилок. У цьому сенсі їхній підхід до аналізу мислення можна розглядати як форму абстрактного мислення, близьку до математичного.

Завдяки таким розробкам Нав'я-Нья вплинула не лише на філософію, а й на освіту: її методи використовувалися в традиційних навчальних закладах (толи), де навчалися майбутні вчені та знавці логіки. Ці методи допомагали розвивати строгість мислення та увагу до деталей — якості, необхідні й у математиці.

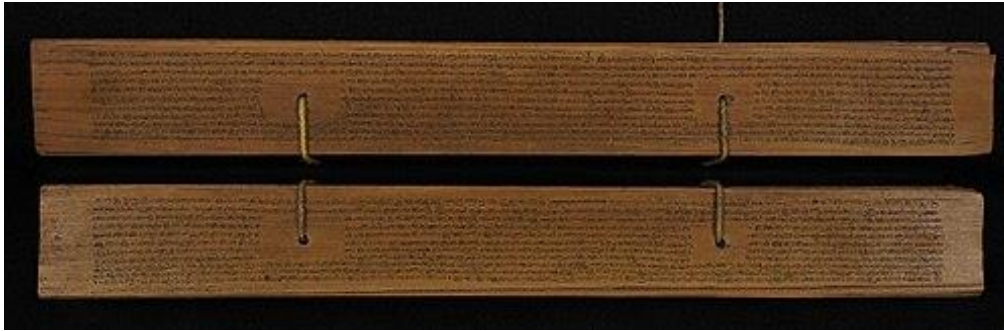
Школа Керали

Одним із найвражаючих наукових феноменів в історії середньовічної Індії стала математико-астрономічна школа Керали, що існувала на південному заході країни з XIV по XVII століття. Її засновником вважається Мадхава із Сангамаграми (бл. 1340–1425), і саме з його праць розпочалася ціла традиція, що охопила кілька поколінь видатних учених: Парамешвару, Нілакантху Сомаяджі, Дж'єштхадеву, Ач'юту Пішараті, Мелпатура Нараяну Бхаттатхірі та інших. Їхні праці, зазвичай, написані санскритом і малайяламом.

Школа Керали сформувалася в культурному середовищі, де астрономія була не лише інтелектуальною дисципліною, а й необхідним інструментом для ведення ритуального календаря, а отже — користувалася постійною увагою освічених верств суспільства. Прагнучи дедалі точніших астрономічних обчислень, математики цієї школи прийшли до ряду відкриттів, які в Європі стали можливими лише через два століття.

Найвизначнішим досягненням школи стали ряди для тригонометричних функцій — синуса, косинуса й арктангенса, еквівалентні розкладам Тейлора–Маклорена. Ці вирази вперше були записані у віршованій формі в трактаті Тантрасанграха (бл. 1500) Нілакантхи Сомаяджі, а потім детально прокоментовані в анонімному творі Тантрасанграха-вакхья. Доведення ж з'явилися пізніше — у Юктібхаші Дж'єштхадеви (бл. 1530–1610), трактаті, написаному малайяламом, де математичні міркування викладено прозоро й із використанням наочних пояснень.





Сторінки трактату Юктібхаша («Міркування про доведення») — фундаментальної праці астронома Дж'ештхадеви, написаної мовою малайялам близько 1530 року. У цьому творі вперше в Індії систематично подано доведення математичних тверджень, зокрема розкладів тригонометричних функцій у нескінченні ряди, що передували європейському аналізу на два століття. Рукопис узагальнює відкриття Мадхави, Нілакантхи та інших учених школи Керали (фото з [Вікіпедії](#)).

Мадхава та його послідовники незалежно відкрили розклад у ряд для числа π

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(в Європі відомий як ряд Лейбніца), нескінченні ряди для $\sin x$ і $\cos x$, записані у вигляді, близькому до сучасного, раціональні наближення для скінченних сум цих рядів і оцінки похибок, ряди з прискореною збіжністю для числа π , зокрема вираз

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^3 - 5} + \frac{1}{7^3 - 7} - \dots$$

наближення сум степеневих послідовностей, наприклад,

$$1^p + 2^p + \dots + n^p \approx \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

поняття, близьке до математичної границі, яке використовується в доведеннях, зародки диференціювання тригонометричних функцій (хоча повноцінної теорії похідної чи інтеграла школа не створила).

Усі ці досягнення виникали як практичні інструменти для розв'язання задач сферичної астрономії, обчислення руху планет і затемнень. Особливо яскраво це виявляється в працях Нілакантхи, де розглянуто уточнену геоцентричну модель Всесвіту з елементами геліоцентризму, що перегукується з теоріями Тихо Браге в Європі.

Слід підкреслити, що, попри формальну схожість із європейським аналізом, учені Керали не створили єдиної теорії числення, не сформулювали загального поняття функції й не дійшли до фундаментальної теореми аналізу. Проте використання розкладів у ряди, наближень, оцінок похибок і навіть інтуїтивних граничних переходів робить їхні праці унікальним прикладом доєвропейського математичного мислення високого рівня.

Ідеї Мадхави були розвинуті його послідовниками, особливо Парамешварою (бл. 1360–1455), відомим своїми спостереженнями затемнень і працями зі сферичної тригонометрії. Його учень Дамодара та інші представники традиції продовжували обчислення, уточнювали ряди, вводили нові методи наближень і числового аналізу.

Особливе місце посідає Нілакантха Сомаяджі (бл. 1444–1545), автор трактату Тантра Санграха, де він уточнив індійську модель планетних рухів, запропонувавши, зокрема, модель внутрішніх і зовнішніх планет, зіставну за точністю з птолемеївською. В астрономії він також використовував синус як основну функцію — на відміну від європейської традиції, що довго спиралася на таблиці хорд.

У першій половині XVII століття Дж'єштхадева створив трактат Юктібхаша — одну з небагатьох праць школи, написаних не санскритом, а малайяламом, що робить її особливо цінним історичним джерелом. У ній чітко викладено методи роботи з нескінченними рядами й наближеними значеннями, а також обговорено ідеї, близькі до поняття похідної. Хоча система понять Керальської школи не була формалізована в термінах границь чи аналізу в європейському сенсі, по суті вона містила аналогічні прийоми.

Інші учасники школи Керали також робили внесок у різні галузі. Парамешвара (бл. 1370–1460) коментував праці Ар'ябхати та Бхаскари й сформулював версію теореми про середнє значення. Читрабхану (середина XVI ст.) дав розв'язання 21 типу систем двох алгебраїчних рівнянь із двома змінними — як в алгебраїчній, так і в геометричній формі. Мелпатур Нараяна Бхаттатхірі, останній великий представник школи, завершив систематизацію математичних знань цього напрямку.

Попри високу наукову цінність, Керальська школа залишилася невідомою за межами Південної Індії. Немає переконливих доказів, що її відкриття вплинули на становлення європейського аналізу XVII століття. Проте паралелізм між рядом Мадхави й рядом Лейбніца, між розкладами синуса й косинуса у Дж'єштхадеви та аналогічними формулами Ньютона свідчить про незалежний розвиток подібних ідей у різних культурних контекстах.

Лише 1835 року британський чиновник Чарльз Уїш повідомив про них у науковій статті, заявивши, що індійські математики «заклали основи числення флюксій» задовго до Ньютона. Однак справжній інтерес до їхніх праць пробудився лише у XX столітті — завдяки дослідженням С. Раджагопала та його колег.

Отже, школа Керали є одним із найважливіших прикладів безперервності математичної традиції в Індії. На стику практичної астрономії та глибоких абстрактних ідей вона задовго до Європи змогла намацати ключові елементи аналізу — хоч і не перетворила їх на універсальну математичну теорію.

Поза школами

Отже, індійська математика продовжувала розвиватися, хоча й у змінених історичних умовах. Політична роздробленість, мусульманське панування в Північній Індії та зсув інтелектуального центру на південь не припинили наукового життя, але зробили його більш локалізованим. Поза двома найвідомішими школами — філософською Навья-Ньяя та математико-астрономічною школою Керали — існували й інші осередки математичної активності, що продовжували давню традицію та водночас робили вагомі новації.

Багато індійських учених цього періоду займалися інтерпретацією та систематизацією ідей, викладених у працях Ар'ябхати, Брахмагупти й Бхаскари II. Серед них — Лаллада, Чакрапані, Парамешвара та Рамасубраманья. Проте найбільший інтерес становить діяльність Нараяни Пандіти, який жив у XIV столітті.

Він створив два математичні трактати: Ганіта-кауруді («Місячне сяйво математики») — про арифметику та комбінаторику, і Біджаганіта-ватамса — з алгебри. У першій праці Нараяна запропонував низку оригінальних задач і методів їх розв'язання. Особливо вирізняється його внесок у комбінаторику, яку він розвивав набагато систематичніше, ніж це було прийнято в попередній індійській традиції — і на кілька століть раніше, ніж комбінаторика сформувалася як дисципліна в Європі.

Одна з найцікавіших задач із Ганіта-кауруді звучить так: «Корова щороку народжує по одному теляті. Починаючи з трирічного віку, кожне теля також щороку приносить по теляті. Скільки всього корів і телят буде через 20 років?» — ця задача є аналогом знаменитої задачі про кроликів Фібоначчі. Сучасна формалізація призводить до рекурентного співвідношення $N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$, за початкових умов $N_0 = N_1 = N_2 = 1$. Ця послідовність (сьогодні відома як A000930 у базі OEIS) дає числа 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, ..., а відношення двох послідовних членів прямує до надзолотого перетину¹¹.

Крім того, Нараяна залишив докладний коментар до Лілаваті Бхаскари II — Ганіта-каурудія (в іншому джерелі згадується як Карма-паддхаті), що підтверджує його глибоке знання класичної алгебри.

У низці регіонів Індії (особливо в Махараштрі та Гуджараті) у XIV–XVII століттях створювалися так звані ганіта-сутри — поетичні збірки математичних правил і задач, призначені як для навчання в гурукулах¹², так і для практичних потреб торговців, землемірів і чиновників. У таких текстах обговорювалися питання подільності, дробів, пропорцій, відсотків і розрахунків у змішаних одиницях. За змістом і формою ці твори можна порівняти з європейськими «комерційними арифметиками» XV–XVI століть.

Вартий згадки також Читрабхану (XVI ст.), математик із Гуджарату, який уклав таблиці розв'язків лінійних і квадратних рівнянь із двома невідомими та класифікував 21 тип алгебраїчних задач. Його підхід — систематичний і алгоритмічний — значною мірою передбачає європейські пошуки універсального методу розв'язання рівнянь у працях Вієта й Бомбеллі.

Значення і визнання

Сучасні історики науки дедалі частіше порушують питання про недооцінку внеску індійських (та інших позаєвропейських) математиків у глобальну історію науки. Наприклад, математик і історик науки Джордж Джозеф, розглядаючи проблему євроцентризму в історіографії, зазначає, що досягнення Індії часто тлумачилися як похідні від грецьких або взагалі ігнорувалися. Таке сприйняття призвело до того, що

¹¹ Надзолотим перетином називають єдиний дійсний корінь рівняння $x^3 = x^2 + 1$.

¹² Гурукула — традиційна індійська школа, у якій учні (шиш'ї) жили й навчалися при домі вчителя (гуру), поєднуючи здобуття знань із повсякденною працею та духовною практикою.

багато ідей — зокрема використання нуля, десяткового запису, методів розв'язання рівнянь чи рядів — були приписані європейським авторам набагато пізнішого часу.

Історик Флоріан Кайорі, втім, наголошував на складності цього питання. Він писав, що, з одного боку, можливо, індійська математика вплинула на Діофанта, а з іншого — визнавав, що самі індійці запозичували певні ідеї в греків. Історія — не односторонній рух, і контакти між культурами, особливо через арабських посередників, відігравали в цьому процесі значну роль.

Особливо обговорюваною темою залишається передбачення ряду результатів математичного аналізу в працях школи Керали (як уже згадувалося вище) — зокрема нескінченних рядів для тригонометричних функцій. Ці результати з'явилися в Індії на два століття раніше, ніж аналогічні побудови в працях Грегорі, Тейлора та Маклорена. Хоча прямих доказів того, що ці знання дійшли до Європи, не знайдено, шляхи передавання — через торгівлю, місіонерів і арабських учених — цілком могли існувати.

Водночас, як підкреслює Девід Брессуд, сама ідея поєднання понять похідної та інтеграла в єдиний формалізм, що лежить в основі сучасного аналізу, була розроблена вже в Європі — Ньютоном і Лейбніцем. Проте внесок індійських (і арабських) учених у формування підґрунтя цих ідей заслуговує на більш уважне й неупереджене вивчення.

Історія математики ще не розповіла всіх своїх сторінок. Перегляд усталених схем і визнання розмаїття інтелектуальних традицій — важливий крок до повнішого й справедливішого розуміння того, як наука розвивалася в різних частинах світу.



Людвіг Дейч, Гра в шахи, 1896 р.

В історії математики арабська традиція посідає особливе місце як сполучна ланка між античністю та європейським Середньовіччям, а згодом і Ренесансом. Саме завдяки арабомовним ученим значна частина спадщини грецької, індійської та перської науки була не лише збережена, а й осмислена, розвинена й передана далі — до Латинської Європи, ставши підґрунтям для подальшого наукового піднесення.

Після падіння Західної Римської імперії, а особливо в добу візантійської ортодоксализації у Східній Римській імперії, почалися переслідування грецьких філософів-язичників, а також християн-«єретиків» — несторіан і монофізитів. Багато з них утекли до Персії та інших регіонів Близького Сходу. При дворі сасанідського царя Хосрова I (VI століття) сирійські та греко-сирійські вчені перекладали сирійською мовою твори Платона, Аристотеля, Евкліда й інших класиків. Саме ці переклади стали

основою для арабської перекладацької діяльності через два століття, коли мусульманський світ увійшов у добу стрімкого інтелектуального розквіту.

До VIII–IX століть, за правління Аббасидів, ісламський світ став головним центром наукового життя. У Багдаді було засновано знаменитий «Дім мудрості» (Байт аль-Хікма) — академію й бібліотеку, де перекладачі, учені та філософи працювали над перекладами з грецької, сирійської, перської та санскриту. Особливо активно перекладали математичні твори: «Начала» Евкліда, «Альмагест» Птолемея, праці Архімеда, Аполлонія, Герона, Діофанта. Лише коментаторів і перекладачів одного Евкліда відомо понад сотню.

Проте переклади не були простою передачею текстів. Сучасні дослідники відзначають високий рівень перекладацької техніки: особливу увагу приділяли точності, формальній строгості й — що особливо важливо — створенню нової наукової лексики арабською мовою, здатної передати абстрактні поняття грецької науки.

З перекладів почався перший етап становлення арабської математики, але дуже швидко настав період активного переосмислення й розвитку. Уже в IX столітті математика в ісламському світі стала самостійною галуззю, що поєднала в собі елементи грецької дедукції, індійської обчислювальної практики та прагматичної інженерної традиції Близького Сходу. Особливо сильним було вплив індійської математики — саме через арабів Європа познайомилася з десятковою позиційною системою запису чисел і з поняттям нуля (сунья на санскриті стало арабським ас-сифр, від якого походить слово «цифра»).

Принципово важливо, що арабська математика, на відміну від римської, не просто перейняла грецькі знання, а й засвоїла їхній метод. Мусульманські математики стали спадкоємцями грецької логіки й доказовості, але водночас прагнули практичного застосування знань — у торгівлі, будівництві, географії, астрономії й навіть у релігійній практиці: наприклад, при розрахунку часу намазу, напрямку на Мекку (кібли) чи місячного календаря.

У IX столітті в Багдаді розпочинає свою діяльність Мухаммад ібн Муса аль-Хорезмі — постать, з якої починається систематичний розвиток алгебри як окремої галузі. Його праця «Книга про відновлення і протиставлення» (Китаб мухтасаб ал-джабр і вал-мукабала, звідси — аль-джабр, тобто «алгебра») дала не лише назву дисципліні, а й нову її форму — менш геометричну, ніж у греків, і більш алгоритмічну та обчислювальну.

Згодом математики на кшталт аль-Караджі продовжили систематизацію алгебраїчних знань, розвиваючи вчення про степені, біноміальні розклади та арифметику цілих і раціональних чисел. Паралельно велось дослідження в галузях геометрії, тригонометрії, теорії чисел і комбінаторики.

Упродовж усього Середньовіччя наукова література писалася переважно арабською мовою. Навіть «Начала» Евкліда стали відомі в Європі спочатку через арабський переклад, а не безпосередньо з грецького. Саме арабські праці почали проникати до Європи в XI–XIII століттях — через Сицилію, Іспанію, у добу Хрестових походів, а згодом — через університети Латинського Заходу.

Таким чином, арабська математика стала не просто сховищем давніх знань, а активним посередником і перетворювачем, без якого європейська наука навряд чи змогла б здійснити той стрибок, що привів до Ренесансу й становлення нової науки.

Одним із найважливіших чинників розвитку науки було покровительство халіфів і візирів, особливо в добу Аббасидського халіфату (VIII–X ст.). У IX столітті в Багдаді було засновано «Дім мудрості» (Байт аль-Хікма) — науково-перекладацький центр, де перекладали арабською мовою твори грецьких, сирійських і індійських учених. Переклади не були простим копіюванням: вони супроводжувалися коментарями, виправленнями та оригінальними доповненнями.

Наукові центри ісламського світу в середні віки

Розквіт математики в ісламському світі у середні віки був нерозривно пов'язаний із формуванням розгалуженої мережі наукових центрів, що простягалася від Кордови й Багдада до Самарканда. Ці міста були не лише адміністративними чи торговими вузлами, а й осередками, де освіта, наука й перекладацька діяльність отримували систематичну підтримку з боку правителів, релігійних діячів і заможних меценатів. Нижче розглянемо найважливіші наукові центри, які відіграли ключову роль у розвитку математичної думки.

Багдад: Дім Мудрості. Головним інтелектуальним центром ісламського світу IX століття був Багдад. За халіфа аль-Мамуна (813–833) тут було засновано знаменитий Бейт аль-Хікма — «Дім Мудрості» — своєрідну академію, бібліотеку та перекладацький центр. Саме тут систематично перекладали арабською мовою твори грецьких, перських і індійських учених — зокрема Евкліда, Архімеда, Діофанта, Птолемея та Брахмагупти. Цей процес став підґрунтям для синтезу ідей різних наукових традицій.



Учені в бібліотеці Аббасидів у Багдаді.

У Багдаді працювали такі видатні математики, як Мухаммад аль-Хорезмі, автор одного з перших трактатів з алгебри, а також Аль-Кінді та Аль-Карраджі, які зробили внесок у розвиток арифметики й теорії чисел. Місто стало символом початку «золотого віку» ісламської науки.

Басра і Куфа: інтелектуальні школи раннього періоду. До того, як Багдад став столицею, важливими осередками наукової та філософської активності були Басра і Куфа. Тут формувалися перші школи логіки, граматики та числових міркувань. Зокрема, у Басрі діяло відоме братство «Брати чистоти» (Іхван ас-Сафа) — філософсько-наукове об'єднання, що залишило після себе енциклопедичний твір, який містив і математичні роздуми.

Дамаск і Каїр: математика й астрономія в ісламському Заході. Після політичного й культурного зміщення центру халіфату на захід важливу роль почали відігравати Дамаск і Каїр. У Каїрі особливо активно розвивалася астрономія, пов'язана з обчисленням календарів і напрямків молитви, а разом із нею — сферична геометрія. Тут працювали такі вчені, як Ібн Юнус і Насір ад-Дін ат-Тусі (у пізніший період), чії праці вплинули на подальші європейські моделі руху небесних тіл.

З XII століття Каїр також став місцем збереження багатьох перекладених і переписаних праць, зокрема геометричних та алгебраїчних трактатів.

Кордова і Толедо: передавання знань до Європи. На західному краю ісламського світу, в Іспанії, розквітли міста Кордова, Севілья і особливо Толедо, де арабська наука почала справляти безпосередній вплив на християнську Європу. Тут діяли багатомовні перекладацькі школи, у яких твори арабських (а часто — арабізованих грецьких та індійських) учених перекладали латинською.

Одним із ключових перекладачів був Герард Кремонський, який працював у Толедо у другій половині XII століття. Саме з Іспанії до Європи потрапили арабські трактати з арифметики, алгебри й астрономії. Так, латинські переклади праць аль-Хорезмі стали основою середньовічної європейської алгебри, а його ім'я дало походження слову «алгоритм».

Самарканд і Мерв: математика Сходу. На східній периферії ісламського світу розташовувалися Самарканд і Мерв — великі центри наукового життя, де перетиналися арабська, перська, індійська й тюркська культури. Найвищого розквіту Самарканд досяг у XV столітті за правителя й ученого Улугбека, який заснував знамениту обсерваторію. Тут працювали видатні астрономи й математики, що продовжували античну традицію точних обчислень.

Система наукових центрів ісламського світу створювала умови не лише для накопичення й збереження знань, а й для їх активного опрацювання та розвитку. Ці міста, розташовані переважно вздовж торговельних шляхів, ставали просторами інтенсивного культурного й наукового обміну. Саме завдяки їхній діяльності математична традиція античності отримала друге життя й була передана Європі, де стала фундаментом майбутньої наукової революції.

Хабаш аль-Хасіб

У VIII–IX століттях, у добу розквіту Аббасидського халіфату, в Багдаді формується унікальне наукове середовище. Осередком знань стає «Дім Мудрості» — академія та бібліотека, куди стікаються найкращі уми ісламського світу. Тут перекладають і вивчають твори давньогрецьких, індійських та перських учених. На цьому інтелектуальному ґрунті починає розвиватися власна математична традиція. Серед перших яскравих постатей нового покоління науковців — Хабаш аль-Хасіб, математик і астроном, який відіграв важливу роль у становленні ісламської тригонометрії та прикладної математики.

Хабаш аль-Хасіб (повне ім'я — Абу Джафар Ахмад ібн Абдаллах аль-Марвазі) народився близько 770 року в місті Мерв (на території сучасного Туркменістану), але більшу частину життя провів у Багдаді. Його прізвисько «Хабаш» може свідчити про ефіопське походження або про темний колір шкіри. Він жив і працював при дворі халіфів аль-Мамуна та аль-Му'тасима — у час, коли формувалася класична ісламська наука.

Аль-Хасіб співпрацював з іншими видатними вченими свого часу — аль-Хорезмі, аль-Фаргані — і брав участь в астрономічних спостереженнях, зокрема в проєкті вимірювання довжини одного градуса земного меридіана. За свідченнями біографів, він прожив близько ста років і помер між 864 і 874 роками.

Його наукову діяльність продовжив син — Абу Джафар ібн Хабаш, також астроном і конструктор приладів.

Хабаш аль-Хасіб залишив по собі значну наукову спадщину, що охоплює астрономію, географію, математику та приладобудування. Він є автором кількох астрономічних таблиць (зіджив), частина яких спиралася на індійські джерела, а частина — на власні спостереження, проведені в Багдаді. Ці таблиці використовували для розрахунків положень планет і затемнень і вони стали основою для подальших астрономічних праць.

Головний внесок Хабаша у математику — розвиток тригонометрії. Він першим увів у розрахунки нові тригонометричні відношення — тангенс і котангенс, спочатку як співвідношення довжин у практичних задачах (наприклад, висоти жердини та довжини її тіні залежно від кута підйому Сонця над горизонтом). Ці функції він включив до спеціальних таблиць, складених для зручності обчислень — це перші в історії таблиці тангенсів і котангенсів.

Крім того, Хабаш склав таблицю синусів, що зробило можливими точніші астрономічні та геодезичні розрахунки.

Особливий інтерес становить його ітераційний метод розв'язання трансцендентного рівняння виду $t = \theta - k \sin \theta$ — рівняння, яке згодом стане відомим як «рівняння Кеплера», але вперше було запропоноване саме Хабашем для задач астрономічної теорії паралаксу.

У своєму трактаті «Книга про тіла та відстані» він навів оцінки розмірів і відстаней до небесних тіл — Місяця, Сонця, Землі — на основі геометричних моделей і спостережень.

Аль-Хорезмі та народження алгебри

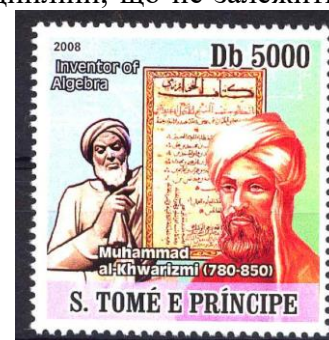
Ім'я Мухаммада ібн Муси аль-Хорезмі (бл. 780 — після 847) пов'язане з однією з найважливіших подій в історії математики: саме він започаткував алгебру як окрему галузь знань. Його твір «Коротка книга про відновлення та протиставлення» (Кітаб аль-джабр ва-ль-мукабала) не лише дав назву новій дисципліні (аль-джабр → «алгебра»), а й показав якісний стрибок: замість простих арифметичних задач аль-Хорезмі почав працювати з формальними операціями над невідомими величинами. Він не просто узагальнював методи розв'язання рівнянь, як це робили давньогрецькі чи індійські математики, — він створював цілісну систему.



Про життя аль-Хорезмі відомо небагато. Його повне ім'я — Абу Джафар Мухаммад ібн Муса аль-Хорезмі — вказує на його походження з Хорезму (територія сучасного Узбекистану). Народився він близько 780 року, ймовірно, у столиці Хорезму — Кяті або поруч із нею. Згодом переїхав до Багдада, де більшу частину життя працював при дворі халіфа аль-Мамуна у знаменитому «Домі мудрості» (Байт аль-Хікма). Тут він не лише вивчав грецькі та індійські джерела, а й створював власні твори, що виходили далеко за межі простих компіляцій.

Його головний твір, «Книга про відновлення та протиставлення», написаний близько 820 року, став першою спробою систематично викласти методи розв'язання рівнянь, розглядаючи їх не як окремі випадки, а як єдиний об'єкт вивчення. Саме з цієї книги починається історія алгебри як незалежної математичної дисципліни, що не залежить від геометрії.

Термін аль-джабр у назві книги означає перенесення від'ємних членів рівняння на протилежний бік зі зміною знака, а мукабала — спрощення рівняння шляхом скорочення однакових членів. Ці прості на перший погляд операції стали основою для подальшої роботи з рівняннями в загальному алгебраїчному сенсі. Латинські перекладачі зберегли слово аль-джабр, і саме з нього пізніше виникло європейське algebra.



Книга охоплює розв'язання лінійних і квадратних рівнянь шести основних типів, класифікованих за позитивними величинами. Аль-Хорезмі, слідуючи античній традиції, не визнавав від'ємних і нульових рішень. Приклади, наведені у книзі, бралися з торгівлі, спадкового права та архітектури, що показує прикладний характер науки того часу. Але за цією практичною оболонкою ховається щось глибше: він запропонував універсальні процедури розв'язання, незалежно від конкретних чисел — перший крок до майбутньої символічної алгебри.



Його «алгебра» ще риторична: замість формул — розгорнутий текст арабською, без символів та скорочень. Проте в ньому є все, що робить алгебру алгеброю: узагальненість, робота з невідомими, строгість операцій і систематичні методи. Там, де у Евкліда рівняння було геометричною задачею, у аль-Хорезмі воно стає числовим об'єктом, підпорядкованим правилам

перетворень. Це не просто новий метод — це новий спосіб мислення в математиці. Поява аль-джабру стала поворотним моментом: від математики фігур до математики абстрактних структур. Тут народжується прообраз дисципліни, яка визначатиме розвиток математики на століття вперед.



Перша сторінка книги Кітаб аль-джабр ва-ль-мукабала

Латинський переклад книги XII століття під назвою *Liber algebrae et almucabala*, виконаний Робертом з Честера, став ключовим джерелом алгебраїчних знань для європейських учених до епохи Відродження. До XVI століття «алгебра» на Заході сприймалася перш за все як спадщина аль-Хорезмі — сукупність методів, описаних у його книзі.



Окрім алгебри, він написав праці з астрономії (втрачена, але цитована іншими), географії (з виправленнями до праці Птолемея) та Книгу про індійський рахунок (Кітаб аль-Джам' валь-тафрік биль-хісаб аль-Хінді). Остання стала першою систематичною працею з арифметики в ісламському світі. Латинський переклад цього тексту — *Algoritmi de numero Indorum* («Алгоритм про число індійців») — дав початок європейському слову «алгоритм». Переписувачі сприйняли ім'я аль-Хорезмі (*Algoritmi*) як позначення методу, а пізніше — і як термін. Таким чином, ім'я хорезмського вченого назавжди увійшло до наукової мови: алгоритм — це метод розв'язання задачі за чітко визначеними кроками, як навчав аль-Хорезмі.

Мухаммад аль-Хорезмі опинився на перехресті культур — індійської, грецької та ближньосхідної — і створив на цьому перехресті щось нове. Він став не просто передавачем знань, а реформатором, який запропонував принципово інший порядок

організації математичних знань. Його внесок настільки значущий, що сучасні поняття «алгебра» і «алгоритм» походять від назви його книги та його імені.

Тут тимчасово відійдемо від хронологічного стилю викладу і коротко розглянемо розвиток основних ідей ісламської математики, а потім повернемося до детального опису внеску окремих видатних учених.

Розвиток алгебри

Переклад книги аль-Хорезмі латиною у XII столітті справив глибокий вплив на інтелектуальне життя середньовічної Європи. Його підхід до розв'язання лінійних і квадратних рівнянь за допомогою числових і геометричних прийомів виявився корисним як у науковій, так і в прикладній математиці, особливо в добу Відродження. Сам термін «алгебра» походить від арабського слова аль-джабр — «восповнення», що відображає одну з операцій, описаних у книзі аль-Хорезмі.

Важливо зазначити, що алгебра аль-Хорезмі була риторичною: рівняння описувалися словами, на відміну від синкопованої алгебри Діофанта, де використовувалися скорочення й умовні позначення. Проте саме арабська традиція започаткувала рух до символічної алгебри, у якій переважають позначення, подібні до сучасних. Цей розвиток простежується у працях Ібн аль-Банні (XIII–XIV ст.) та аль-Каласаді (XV ст.), які почали застосовувати буквені позначення і стали попередниками європейських алгебраїстів Нового часу.

Після аль-Хорезмі важливий внесок у розвиток алгебри зробили Абу Каміл Шуджа і аль-Караджі. Абу Каміл систематизував роботу з ірраціональними числами, розв'язував рівняння з коренями, супроводжуючи міркування геометричними побудовами. Він розглядав багато часткових випадків розв'язання задач і тим самим наблизився до поняття алгебричної множини розв'язків. Аль-Караджі, своєю чергою, розвинув теорію многочленів, запропонував правила їх множення та ділення і став одним із перших, хто явно користувався методами, близькими до математичної індукції. Ці ідеї були розвинуті його учнем аль-Самавалом, який застосовував індуктивні міркування у доведеннях властивостей бінома Ньютона і трикутника Паскаля.

Цікаво, що саме в ісламській математиці почали зникати межі між числами та геометричними величинами, настільки характерні для греків. Тоді як античні математики уникали роботи з ірраціональними числами поза геометричним контекстом, арабські вчені, такі як Абу Каміл і Ібн Тахір аль-Багдаді, почали вільно оперувати ірраціональними величинами в алгебричних рівняннях, включаючи їх до загального математичного апарату. Це створило передумови для подальшого розширення поняття числа.

Особливе місце в історії посідає праця Омара Хайяма (XI–XII ст.), який у трактаті «Про доведення задач алгебри» запропонував геометричні методи розв'язання кубічних рівнянь. Він розглядав перетини конічних перетинів, зокрема парабол і кіл, для знаходження коренів рівнянь виду $x^3 + a^2x = b$. Це був серйозний крок за межі алгебри

аль-Хорезмі, який демонстрував глибокий зв'язок алгебри та геометрії, що походив від античної традиції, але був суттєво розширений і систематизований.

Пізніше Шараф ад-Дін ат-Тусі (XIII ст.) зробив ще один значний крок, запропонувавши метод, по суті, заснований на аналізі форми графіка кубічної функції. Він увів поняття максимуму функції, аналізуючи, коли кубічне рівняння має одне, два або жодного розв'язку. Це стало передвісником методів, близьких до математичного аналізу.

Ще одним досягненням арабської алгебри було поступове прийняття від'ємних чисел. Хоча аль-Хорезмі їх не використовував, уже Абу Каміл і аль-Караджі обговорювали правила роботи з ними, зокрема множення й віднімання, а аль-Самавал сформулював низку правил, аналогічних сучасним: добуток додатного й від'ємного чисел є від'ємним, а добуток двох від'ємних — додатним. Ці кроки показують, як ісламська математика долала обмеження античного мислення і наближалася до більш універсального та абстрактного поняття числа.

Нарешті, метод подвійної хибної позиції (*hisāb al-khaṭā'ayn*), який застосовувався для числового розв'язання рівнянь і був широко поширений у прикладній математиці, отримав обґрунтування та систематизацію в арабських джерелах. Такі математики, як Куста ібн Лукка та Ібн аль-Банна, доповнювали його геометричними та мнемонічними поясненнями, що свідчить про синтез теоретичного й прикладного підходів.

Отже, ісламська математика відіграла ключову роль у розвитку алгебри. Вона перетворила окремі прийоми розв'язання рівнянь на систему загальних методів, доповнила їх теоретичним обґрунтуванням, розширила поняття числа й підготувала ґрунт для появи символічної алгебри в Європі. Як слушно зазначили Дж. Дж. О'Коннор і Е. Робертсон¹³: «Алгебра стала об'єднувальною теорією, що дала змогу розглядати раціональні та ірраціональні числа, геометричні величини й інші об'єкти як єдині алгебричні сутності. Це надало математиці нового напрямку — набагато ширшого, ніж геометрична парадигма античності, — і зробило можливим застосування самої математики до її власних структур».

Тригонометрія

У працях математиків і астрономів ісламського світу тригонометрія набула самостійності й складності, яких вона не мала ні в грецькій, ні в індійській традиції. Якщо в античній математиці обчислення, пов'язані з тригонометрією, здебільшого обмежувалися обчисленням хорд — як, наприклад, у «Альмагесті» Птолемея, — то арабські вчені, успадкувавши ідеї александрійців і індійські сиддханти, істотно розширили інструментарій, збагативши його новими функціями, таблицями та теоретичними побудовами. Завдяки арабським математикам тригонометрія вперше

¹³ Джон Дж. О'Коннор (John J. O'Connor) і Едмунд Ф. Робертсон (Edmund F. Robertson) — британські математики й історики математики, автори одного з найвідоміших сучасних електронних ресурсів з історії математики — MacTutor History of Mathematics Archive. MacTutor — це великий онлайн-архів, створений у 1990-х роках в Університеті Сент-Ендрюс (University of St Andrews, Шотландія). Він містить біографії тисяч математиків усіх епох, огляди напрямів розвитку математики, школи, періоди, а також карти, хронології й цитати з історичних джерел.

стала самостійною, розгалуженою дисципліною, придатною не лише для астрономії, а й для географії, навігації та релігійної практики.

Центральну роль у формуванні тригонометричного апарату відіграло знайомство з індійською системою синусів. Індійські астрономи, відмовившись від хорди подвійного кута, запровадили поняття синуса, косинуса та синуса-версуса. В арабській мові термін «джайб» (переклад санскритського «джива», буквально — тятива) почав означати синус, а його переклад латинською як *sinus* започаткував європейську термінологію. Від латинського виразу *complementi sinus*, що відтворює арабське «джайб ат-тамам», походить слово «косинус». Радіус кола позначався як «повний синус» (*sinus totus*), і саме в такому вигляді це поняття зберігалось в європейській науці аж до Нового часу.

Розвиваючи індійські таблиці синусів, арабські вчені розширили коло тригонометричних функцій. Уже в працях IX століття з'являються тангенс і котангенс, які спочатку називалися «оберненою тінню» (зілля ма'кус) та «пласкою тінню» (зілля мустав). Ця термінологія походить від античної гномоніки, де довжини тіней використовувалися для вимірювань. Згодом утвердилася термінологія «тінь» і «тінь доповнення», що відобразилася і в латинських назвах — *umbra recta* та *umbra versa*. Секанс і косеканс, які спершу позначалися як «діаметри тіні», також увійшли в ужиток, попри їхнє обмежене теоретичне значення, адже дозволяли замінювати ділення на синус і косинус множенням, що було зручно в обчисленнях до появи логарифмів.

Одними з перших тригонометричних таблиць були таблиці синусів аль-Хорезмі. Його сучасник Хабаб аль-Хасіб склав докладніші таблиці, які включали також тангенси, котангенси, секанси й косеканси. Ці таблиці супроводжувалися методами інтерполяції — спершу лінійної (як у Абу-л-Вафі), а потім і квадратичної (як у ал-Біруні в «Каноні Мас'уда»). Астрономи ісламського світу досягли високої майстерності в числових обчисленнях: наприклад, Абу-л-Вафа обчислив синус $0^{\circ}30'$ з точністю до десятого десяткового знаку, а ал-Каші згодом знайшов $\sin 1^{\circ}$ з видатною точністю, використовуючи алгебричні методи.

Тригонометричні функції спочатку викладалися як частина астрономічних праць — як це видно з «Альмагеста» Абу-л-Вафі та «Канону Мас'уда» ал-Біруні, де подані основні теореми для розв'язання плоских і сферичних трикутників. Сферична тригонометрія виявилася особливо важливою в астрономічних і географічних задачах. Так, Сабіт ібн Корра у творі «Про сонячні годинники» запропонував формули для визначення висоти Сонця над горизонтом, подібні до тих, що містилися в індійських і античних джерелах, але сформульовані через синуси та синус-версус. Ці правила відображають сферичну теорему косинусів.

Особливе значення мало застосування тригонометрії в релігійній практиці: для обчислення кіблі — напрямку на Мекку — арабські астрономи розв'язували задачі на сфері, визначаючи сторону сферичного трикутника за відомими координатами двох точок. Такі задачі розв'язувалися на основі географічних координат і сферичної тригонометрії. Перетворення між горизонтальною, екваторіальною та екліптичною системами координат на небесній сфері також потребували застосування тригонометричних формул, розроблених ісламськими математиками.

Першим великим твором, повністю присвяченим сферичній тригонометрії, став анонімний трактат XI століття «Збір правил науки астрономії». У ньому вперше подано всі шість задач сферичного трикутника (наприклад, визначення сторін за кутами) та введено поняття полярного трикутника, сторони якого пов'язані з кутами початкового. Цей твір вплинув на подальшу традицію, зокрема на працю Насіра ад-Діна ат-Тусі «Трактат про повний чотирикутник», написану в XIII столітті. У ній міститься систематичний виклад плоскої й сферичної тригонометрії, доведення всіх теорем і правила для обчислень. Саме він дав строге доведення сферичної теореми синусів, відомої сучасній тригонометрії, і описав усі шість випадків задання сферичного трикутника.

Розвиток сферичної тригонометрії в ісламській науці був тісно пов'язаний з іменами таких учених, як Абу-л-Вафа, Сабіт ібн Корра, Абу Наср Мансур, Абу Махмуд Худжанді, Насір ад-Дін ат-Тусі та Ібн Муад аль-Джайяні. Останній у своєму трактаті XI століття дав загальне формулювання закону синусів для сферичної геометрії, а ат-Тусі згодом поширив цей закон і на плоскі трикутники. Ці досягнення стали основою для подальшого розвитку тригонометрії в Європі — від Регіомонтана і аж до математиків Нового часу.

Аналіз

Розвиток математичного аналізу в Європі у XVII столітті не відбувся у вакуумі — він спирався не лише на античну спадщину, а й на досягнення, зроблені в ісламському світі за багато століть до Ньютона і Лейбніца. Класична історіографія нерідко замовчувала цей внесок, хоча він був не менш значущим, ніж праці європейських учених.

Ісаак Ньютон, створюючи у 1665–1670 роках свою версію числення, спирався на розробку степеневих рядів і відому йому формулу інтегрування степеневі функції — результат, який вважається центральним у математичному аналізі. Проте ця формула була відома задовго до нього. Її відкрив в Єгипті близько 1000 року Ібн аль-Хайсам, а згодом вона неодноразово з'являлася в працях інших ісламських математиків. Ба більше, щонайменше з IX століття арабські вчені використовували метод вичерпування, відомий ще Архімеду, але доповнений новими підходами. У «Книзі вимірювання площинних і сферичних фігур» братів Бану Муса метод вичерпування застосовано для доведення теорем, аналогічних тим, що трапляються у Архімеда в трактатах «Вимірювання кола» та «Про кулю і циліндр».

Особливо значний внесок зробив Сабіт ібн Курра — один із провідних представників математичної традиції IX століття. У «Книзі про карастун» він досліджує рівнодійну систему сил, підвішених до балки ваг, і робить крок до обчислення інтеграла, розглядаючи не лише скінченну кількість вантажів, а й нескінечно густий розподіл маси — прообраз неперервного навантаження. Його результат еквівалентний сучасному інтегралу вигляду $\int x \, dx$.

Ібн Курра також дає оригінальне доведення квадратури сегмента параболи, подібне, але не тотожне архімедівському. Він ділить діаметр параболи на нерівні відрізки, що відносяться як непарні числа, і встановлює відповідність між ординатами параболи та натуральними числами. Це приводить його до обчислення інтеграла від x^2 за

нерівномірною сіткою — прийому, який у Європі з'явився знову лише у Ферма в XVII столітті. Сам Ферма, поділяючи відрізок на частини в геометричній прогресії, обчислював інтеграли вигляду $\int x^n dx$, але арабські математики передбачили цей метод на кілька століть раніше.

Онук Ібн Курри, Ібн Сінан, продовжив цю лінію досліджень і запропонував ще один витончений розв'язок квадратури параболи. У «Книзі про вимірювання параболи» він використовує афінні перетворення¹⁴ для доведення теореми про співвідношення площ, а далі застосовує метод вичерпування до трикутників, вписаних у сегменти параболи. Його висновок — площа сегмента дорівнює $4/3$ площі вписаного трикутника — аналогічний результату Архімеда, але отриманий незалежно й іншим шляхом.

Інший трактат Ібн Курри — «Книга вимірювання параболічних тіл» — присвячений обчисленню об'ємів тіл обертання, утворених із сегментів параболи. Тут Ібн Курра виділяє параболічні сфери та куполи різних форм і знаходить їхні об'єми за допомогою методу, близького до методу вичерпування. Ці ідеї розвинув і уточнив Абу-с-Сахл аль-Кухі, який використав простіший спосіб визначення об'єму параболічного купола, пов'язавши його з об'ємом циліндра, описаного навколо параболічного сегмента.

Особливе місце займає праця Ібн аль-Хайсама «Про вимірювання параболічного тіла», у якій він обчислює об'єм параболічної сфери через підсумовування четвертих степенів натуральних чисел — результат, раніше невідомий у математиці. Цей висновок еквівалентний інтегруванню $\int x^4 dx$. Крім того, він формулює й доводить нерівності, необхідні для застосування методу вичерпування в цьому контексті, демонструючи найвищий рівень математичної строгості та витонченості.

Проте ісламська традиція аналізу розвивалася не лише у геометричному напрямі. У «Книзі про уповільнення й прискорення руху по зодіакальному колу» Ібн Курра розглядає видимий рух світила (наприклад, Сонця) по екліптиці й доходить до понять миттєвої швидкості та прискорення, аналізуючи їхню поведінку залежно від положення світила. Він не використовує терміни «швидкість» і «прискорення» у сучасному сенсі, але оперує аналогічними поняттями — «рухом», «уповільненням» і «прискоренням», указуючи на найбільші та найменші значення миттєвого руху в апогеї й перигеї. Це можна вважати одним з перших наближень до поняття похідної.

Ці ідеї розвинув аль-Біруні у своєму трактаті «Метод дослідження руху Сонця» та особливо в «Каноні Мас'уда», де він описує плавні переходи між прискоренням і уповільненням, виділяє моменти рівності миттєвої та середньої швидкостей і формулює спостереження, які сучасною мовою можна тлумачити як дослідження похідної функції руху. Ба більше, у тому ж «Каноні» він уперше формулює правило квадратичної інтерполяції для таблиць тригонометричних функцій — крок, який можна вважати прообразом чисельного аналізу.

Таким чином, арабська математична традиція, починаючи з IX століття, не просто зберігала античні знання, а активно розвивала аналітичні методи, передбачаючи багато

¹⁴ Спрощено кажучи, афінні перетворення — це один із фундаментальних типів геометричних перетворень, який поєднує лінійне перетворення (тобто розтягнення, стискання, поворот, відбиття, зсув за осями) і паралельне перенесення. Тобто, афінне перетворення — це будь-яке перетворення, яке зберігає паралельність прямих, але не обов'язково зберігає довжини й кути.

ідей математичного аналізу задовго до Ньютона і Лейбніца. Ці праці залишалися майже невідомими в Європі аж до Нового часу й рідко згадуються у традиційних курсах історії математики, що є несправедливим як з історичного, так і з наукового погляду.

Криптографія

Історію криптографії зазвичай починають із шифрів Цезаря й закінчують машиною «Енігма». Проте між цими двома точками лежить багатовікова традиція теоретичного аналізу шифрів, що зародилася в ісламському світі у IX–X століттях і суттєво вплинула на формування криптології як науки. Ці розробки не просто продовжували античні ідеї — вони започаткували статистичні та лінгвістичні методи дешифрування, які знову з'являться в Європі лише через кілька століть.

Одним із перших теоретиків криптографії вважають аль-Кінді — філософа й ученого епохи Аббасидів, який жив у IX столітті. Його «Трактат про дешифрування зашифрованих послань» став фундаментом для подальшої ісламської криптографії та вперше ввів у науковий обіг статистичний підхід до аналізу тексту. Аль-Кінді описує метод частотного аналізу, що ґрунтується на ідеї: у будь-якій мові одні літери трапляються частіше за інші, і, спостерігаючи за частотою появи символів у зашифрованому повідомленні, можна відновити початковий текст. Сьогодні цей метод вважають наріжним каменем класичної криптоаналітики, але формулювання аль-Кінді майже повністю відповідає сучасному розумінню. Його трактат також містить опис кількох нових методів зламу шифрів, що робить його першою відомою в історії працею з криптоаналізу як наукової дисципліни.

Та історія починається ще раніше. Арабський філолог Халіль ібн Ахмад аль-Фарахіді, один із засновників арабської лінгвістики, першим звернув увагу на можливість використання стандартних фраз відкритого тексту для дешифрування. За переказами, він припустив, що лист грецькою мовою, адресований візантійському імператорові, має починатися словами «В ім'я Аллаха»¹⁵, що дозволило йому розшифрувати решту тексту. Згодом він виклав цей принцип у творі «Кітаб аль-Муамма» («Книга таємної мови») — одному з перших відомих текстів із криптології.

Його ідеї та методи аналізу мови вплинули на подальші праці ісламських учених, зокрема Ібн Вахшії. У 855 році він написав «Книгу про велике прагнення людини розгадати таємниці давнього письма» — один із перших криптографічних трактатів, що містив описи різних систем шифрування, зокрема використання кількох абеток. Цей підхід, коли для однієї й тієї ж літери застосовуються різні замінники залежно від позиції в тексті, стане відомим у Європі лише через багато століть.

¹⁵ Подібні методи надихають і сучасних кінематографістів, які часто звертаються до сюжетів про криптоаналітику як до символу поєднання інтуїції, логіки й технічної винахідливості. У художньому фільмі *The Imitation Game* (2014) показано, як команда Алана Тьюрінга використовує припущення про наявність у зашифрованих депешах фрази «Heil Hitler» як так званий *crib* — передбачуваний фрагмент відкритого тексту, що допомагає знайти правильні налаштування машини «Енігма». Цей епізод є кінематографічною реконструкцією: метод *crib* справді застосовувався під час роботи над «Енігмою» (найчастіше у вигляді прогнозів погоди або стандартних формул звернень), але історичні джерела свідчать, що конкретні приклади та алгоритми були значно різноманітнішими й складнішими, ніж показано у фільмі.

У X столітті тюркський учений Сулі у своїй праці «Адаб аль-Куттаб» («Настанова для писарів») подав практичні інструкції зі шифрування адміністративних записів — зокрема податкових. Це свідчить, що криптографія в ісламському світі використовувалася не лише в дипломатії та науці, а й у повсякденному цивільному житті.

Розвиток криптоаналізу продовжили такі вчені, як Ібн ад-Дурайхім і Ібн Адлан, які систематизували й поглибили методи, закладені аль-Кінді. Вони застосовували частотний аналіз із урахуванням граматичних особливостей арабської мови, пропонували способи виявлення безглузвих поєднань і враховували контексти вживання слів.

Ключову роль у розвитку криптоаналізу відіграли й праці арабських граматистів, особливо Сібавейгі, чий опис звукової структури арабської мови дозволяли будувати таблиці ймовірностей появи літер і складів залежно від позиції у слові — метод, який активно використовувався в пізніших дешифруваннях. Ці граматичні моделі були адаптовані для аналізу шифрів, і саме завдяки їм частотний аналіз перестав бути емпіричним методом, перетворившись на теоретично обґрунтовану процедуру.



Скринька з кодовим замком. Чотири подвійні циферблати, кожен із яких можна встановити у 16 різних положень, створюють 16 у восьмому степені (4 294 967 296) можливих комбінацій коду. Іран, 1200–1201 рр.

Одним із найвищих досягнень ісламської криптології стала праця єгипетського поліглота аль-Калкашанді. У 1412 році він опублікував енциклопедичний твір «Субх аль-аша», у якому поєднав теорію та практику шифрування, створивши першу в історії узагальнену працю з криптології. У цьому трактаті вперше одночасно описано як методи шифрування (підстановка, перестановка, поліалфавітні системи), так і методи дешифрування, зокрема побудову таблиць частотності та аналіз неможливих комбінацій літер. Це була справді зріла криптологічна система, що відображала як багатство арабської лінгвістики, так і глибоке математичне розуміння.

Криптографічні знання ісламського світу не обмежувалися теорією. У практичних завданнях — наприклад, під час передачі дипломатичних послань чи захисту наукових трактатів — використовувалися складні системи підстановок, перестановок,

псевдоабеток і навіть кодові книги, де кожному поняттю відповідало певне слово чи знак. Такі системи застосовували, зокрема, під час передачі медичних або алхімічних текстів, щоб приховати інформацію від непосвячених.

Зв'язок цієї традиції з європейським Відродженням можна простежити в низці пізніших латинських творів, починаючи з XV століття. Деякі елементи частотного аналізу з'являються у працях італійського математика Леона Баттісти Альберті, однак його ідеї значно поступаються за ясністю й глибиною тим, що викладені в аль-Кінді. Лише в XVI столітті — з працями Джованні Баттісти Беллазо та Блеза де Віженера — у Європі розпочинається серйозна систематизація криптографічних методів, але багато з їхніх ідей, зокрема використання кількох абеток і комбінованих шифрів, мали прямі аналоги в арабській традиції.

Попри це, ісламська криптологія не увійшла до канону європейської історії науки. Її досягнення тривалий час залишалися невідомими в західній історіографії, хоча трактат аль-Кінді був перекладений латинською ще у середньовіччі. Її вплив можна простежити опосередковано — через арабо-латинські переклади та діяльність ісламських наукових центрів в Іспанії й на Сицилії, однак явних згадок про цих авторів у працях європейців Відродження практично немає.

І все ж, як і у випадку з математичним аналізом, ісламські вчені задовго до Європи перетворили криптографію з ремесла на науку, запровадили математичні й лінгвістичні методи в практику дешифрування та створили стійку наукову традицію. Саме в арабській культурі вперше з'являються такі базові для сучасної криптології поняття, як алгоритм і шифр — слова, етимологічне коріння яких веде до спадщини аль-Хорезмі та його послідовників. Їхні праці заклали основи сучасної криптології, де аналіз тексту поєднується зі статистикою, комбінаторикою та теорією інформації.

А тепер розглянемо докладніше внесок ключових дослідників у розвиток математики.

Брати Бану Муса

Бану Муса — збірна назва трьох братів: Джафара Мухаммада ібн Муси ібн Шакіра, Ахмада ібн Муси ібн Шакіра та аль-Хасана ібн Муси ібн Шакіра. Попри те, що у своїх працях вони часто виступали як колектив, кожен мав власну спеціалізацію. Джафар Мухаммад працював переважно в галузі геометрії та астрономії, Ахмад — у механіці, а аль-Хасан — також у геометрії. Однак їхні біографії настільки тісно переплетені, що їх зазвичай розглядають як єдине наукове явище.



Вони вивчали математику, механіку, музику, геометрію та астрономію.

Їхній батько, Муса ібн Шакір, у юності був розбійником, але згодом захопився наукою й став шанованим астрономом. Він зблизився з майбутнім халіфом аль-Ма'муном, сином Гаруна ар-Рашида. Після смерті батька аль-Ма'мун узяв братів під своє покровительство й забезпечив їм найкращу освіту в Багдаді.

Халіф аль-Ма'мун продовжив просвітницьку політику свого батька й заснував Дім мудрості (Байт аль-Хікма) — академію та перекладацьку школу, де перекладали античні твори арабською мовою. Він також створив велику бібліотеку та обсерваторії, у яких працювали провідні вчені ісламського світу. Бану Муса стали одними з ключових постатей цього інтелектуального центру. Вони співпрацювали з іншими видатними вченими, такими як аль-Хорезмі, аль-Кінді, Хунайн ібн Ісхак і Сабіт ібн Курра. Старший із братів, Джафар Мухаммад, особливо зблизився з Хунайном.

Після смерті аль-Ма'муна в 833 році Дім мудрості продовжував діяти за нових халіфів. Однак за правління аль-Мутаваккіля наукова атмосфера почала занепадати: посилювалися конфлікти між ученими, почалися переслідування неортодоксальних течій, руйнувалися церкви та синагоги. Бану Муса відіграли активну роль у цих суперечках — саме вони стали причиною падіння філософа аль-Кінді в немилість: за їхнім доносом халіф наказав його побити, а бібліотеку конфіскували. Попри все це, брати зберегли прихильність халіфа й займалися інженерними проектами, зокрема будівництвом каналів для нового міста аль-Джафарія.

Головною математичною працею Бану Муса вважається трактат «Книга про вимірювання плоских і сферичних фігур». У XIII столітті на нього писав коментар Насір ад-Дін ат-Тусі, а в XII столітті книгу переклав латинською мовою Герард Кремонський під назвою *Liber trium fratrum de geometria* («Книга трьох братів про геометрію»). Ця праця містить задачі, подібні до тих, що розглядав Архімед у трактатах «Вимірювання круга» та «Про кулю і циліндр». Брати використовували метод вичерпування, розроблений Евдоксом і застосований Архімедом, але спростили його, усунувши важливий момент — граничний перехід від многокутників із 2^k сторонами до кола. Можливо, це було пов'язано з неповним розумінням оригінального методу.

Попри це, у їхньому підході був справжній прорив: на відміну від греків, які порівнювали лише співвідношення площ і об'ємів, Бану Муса почали мислити величини кількісно, як числа. Наприклад, вони визначали число π як «величину, яка при множенні на діаметр дає довжину кола». Вони застосовували арифметичну термінологію до геометричних задач і вперше ввели кінематичні методи — тобто мисленнєвий прийом, що передбачає рух фігур, — наприклад, під час розв'язання задачі про трисекцію кута.

У галузі астрономії брати також зробили помітний внесок. За дорученням аль-Ма'муна вони виміряли одну градусну дугу меридіана в північній Месопотамії. З Багдада вони проводили спостереження за Сонцем і Місяцем, а також за зіркою Регул; спостереження тривали в 840–841, 847–848 і 850–851 роках. Вони фіксували рівнодення в Самаррі, визначали координати міст за допомогою одночасних спостережень місячних затемнень і зробили власні уточнення руху Сонця, які згодом підтвердив аль-Біруні. Вони навіть створили альтернативну модель небесної сфери, відкидаючи гіпотетичну «дев'яту сферу», введену Птолемеєм, що свідчить про розвиток критичного ставлення до авторитетів античності. Мухаммад і Ахмад визначили тривалість сонячного року — 365 днів і 6 годин.



Однією з найвідоміших книг Бану Муса стала «Книга про хитромудрі механізми», у якій описано сто механічних пристроїв — від посудин із автоматичною подачею води до фонтанів і автоматичних музичних інструментів. Ці прилади часто мали розважальне призначення (наприклад, використовувалися для здивування гостей), але водночас демонстрували глибоке розуміння принципів гідростатики, тиску, клапанів і автоматичного керування. Найвідомішим пристроєм була флейта з механічним виконанням — прообраз програмованої машини.

Аль-Джаухарі

Аль-Аббас ібн Саїд аль-Джаухарі (бл. 800 — бл. 860) був арабським математиком, астрономом і перекладачем, одним із видатних представників Золотого віку ісламської науки. Він народився у Фарабі — на території сучасного Казахстану — і, ймовірно, помер у Багдаді, де провів значну частину свого наукового життя. Походження його, найімовірніше, було іранським.

Аль-Джаухарі працював у «Домі мудрості» в Багдаді одночасно з аль-Хорезмі. Він входив до числа видатних інтелектуалів, які брали участь у масштабній програмі перекладу й осмислення античних наукових текстів, що здійснювалася за правління халіфа аль-Ма'муна. Його високо цінували за знання грецької мови — рідкісне й надзвичайно важливе вміння для того часу.

У 830 році аль-Джаухарі разом із Яхьєю ібн Абу Мансуром, аль-Марварруді та Санадом ібн Алі брав участь в астрономічних спостереженнях у Багдаді, а згодом, у 833 році, — у Дамаску. Саме на основі цих спостережень було складено знаменитий астрономічний збірник «Зідж аль-Ма'муна, перевірений» (as-sahih). Він також брав участь в експедиції з вимірювання довжини однієї градусної дуги земного меридіана на рівнині Сінджар — одному з найраніших геодезичних експериментів в історії.

Найбільшу славу аль-Джаухарі здобув як геометр, автор ґрунтовної праці за «Началами» Евкліда. Його «Коментарі до Евкліда» містили близько 50 додаткових пропозицій, що доповнювали й розвивали оригінальний текст. Аль-Джаухарі прагнув не просто зберегти античне знання, а створити логічно послідовну й обґрунтовану геометричну систему. Його праця поширилася в ісламському світі та вплинула на подальших математиків, зокрема ан-Найрізі та Насіра ад-Діна ат-Тусі.

Особливу увагу він приділяв п'ятій книзі «Начал», присвяченій теорії відношень і пропорцій. Аль-Джаухарі намагався побудувати теорію пропорцій, спираючись на алгоритм Евкліда й визначення рівності відношень як рівності неповних часток. Це була одна з перших спроб аксіоматизувати поняття пропорції, що відіграло важливу роль у розвитку алгебраїчного мислення в ісламській математиці.

Найцікавішою частиною його роботи була спроба доведення п'ятого постулату Евкліда — знаменитого постулату про паралельні прямі, зміст якого протягом століть викликав суперечки серед математиків. Аль-Джаухарі став першим із арабських учених, хто серйозно спробував побудувати строге доведення цього твердження. Його міркування ґрунтувалося на неявному припущенні, що якщо при перетині двох прямих деякою

січною утворюються рівні внутрішні різносторонні кути, то те саме має відбуватися і при їхньому перетині будь-якою іншою січною. У процесі свого доведення він сформулював кілька важливих теорем, зокрема — що через будь-яку точку всередині кута можна провести пряму, яка перетне обидві сторони цього кута. Пізніше саме ця теорема лягла в основу спроби доведення п'ятого постулату у Лежандра на початку XIX століття.

Окрім коментарів до «Начал», аль-Джаухарі приписують трактат про визначення відстані від центру Землі до Сонця, а також власний зідж (астрономічний довідник), який, на жаль, не зберігся. Йому також приписують переклад із санскриту на арабську «Книги отрут» індійського автора Шанаки.

Абд аль-Хамід ібн Тюрк

Абу-ль-Фадль 'Абд аль-Хамід ібн Васі' ібн Тюрк аль-Джілі — один із ранніх мусульманських математиків IX століття, який належав до кола вчених, що працювали при дворі халіфа аль-Ма'муна у Домі мудрості (Байт аль-Хікма) в Багдаді. Це коло складалося з таких видатних дослідників, як аль-Хорезмі, аль-Фаргані, Хаббаш аль-Хасіб та інші.

Місце його народження точно не встановлене: аль-Кіфті вказує на Гілян (область на південь від Каспійського моря), тоді як Ібн ан-Надім згадує Хутталь — регіон у Середній Азії на північ від Амудар'ї. У збережених рукописах самого Ібн Тюрка його нісба¹⁶ найчастіше подається як аль-Джілі, що робить версію про походження з Гіляна більш вірогідною.

Про подальше життя та обставини смерті Ібн Тюрка майже нічого невідомо, але за непрямыми даними можна зробити висновок, що він активно працював у 820–830-х роках.

Головним внеском 'Абд аль-Хаміда ібн Тюрка в науку став його трактат з алгебри — «Логічна необхідність у змішаних рівняннях» (*al-Mu'āmalāt al-mukhtalīṭa min jihat al-wujūb*). Цей твір був виявлений і опублікований лише у XX столітті — в 1962 році єгипетським істориком математики Ахмадом Саїлі. У ньому докладно розглядається розв'язання квадратних рівнянь, і, як показав Саїлі, багато прикладів, структура доведень і навіть геометричні побудови в ньому близькі або збігаються з тими, що містяться у знаменитій книзі аль-Хорезмі.

З цього дослідники роблять важливий висновок: ні аль-Хорезмі, ні Ібн Тюрк не були в повному розумінні «батьками» алгебри — вони вже діяли в межах сформованої традиції. Їхні праці свідчать про те, що на початку IX століття алгебра як наука вже значною мірою склалася, хоча й перебувала у процесі становлення як окрема дисципліна.

Особливо важливо, що у своєму трактаті Ібн Тюрк не просто викладає методи розв'язання рівнянь, а прагне логічно обґрунтувати, чому ці методи працюють. По суті, він вводить зародки теорії дискримінанта: в одному місці геометрично доводить, що

¹⁶ Нісба — це особливий елемент арабського імені, який указує на походження, місце народження, плем'я, професію або належність людини до певної групи.

якщо дискримінант від'ємний, то рівняння не має дійсних розв'язків — це важливий крок у напрямку усвідомлення меж застосовності математичних методів.

Серед інших творів Ібн Тюрка згадуються «Книга рідкісностей арифметики та властивостей чисел» — ймовірно, збірка незвичайних задач і числових закономірностей, та «Книга про угоди» — можливо, трактат, присвячений застосуванню арифметики в комерції та праві, що було типовим для прикладної математики того часу.

Сінд ібн Алі

За походженням Абу Тайїб Сінд ібн Алі був або єврейським ученим із Багдада, або вихідцем з індійської провінції Сінд (сучасний Пакистан), що відображено в його імені. У зрілому віці Сінд ібн Алі прийняв іслам. Його батько також був відомим астрономом і, вочевидь, вплинув на початкову освіту сина.

Сінд ібн Алі був тісно пов'язаний із колом учених, що зібралися в багдадському «Домі мудрості». Він співпрацював з аль-Хорезмі, Ях'єю ібн Абу Мансуром, аль-Джаухарі та ал-Марварруді, беручи участь у низці великих наукових проєктів тієї епохи. Серед них — астрономічні спостереження в Багдаді (830 р.) та Дамаску (833 р.), а також знамените вимірювання довжини одного градуса дуги земного меридіана на рівнині Сінджар з метою визначення розмірів Землі. Згодом він очолив обсерваторію в багдадському кварталі Шамасія.

Попри наукові досягнення, доля Сінда ібн Алі була ускладнена придворними інтригами. За словами Ібн Абі Усайбії, брати Бану Муса, побоюючись конкуренції, домоглися його усунення від двору халіфа аль-Мутаваккіля та заслали його назад до Багдада. Пізніше, коли інженер аль-Фаргані допустив грубу помилку під час будівництва каналу в Самаррі, лише втручання Сінда ібн Алі врятувало репутацію Бану Муса. Він перерахував і виправив розрахунки, ризикуючи власною безпекою.

Сінд ібн Алі зробив значний внесок у розвиток астрономії, математики та інженерної справи в ісламському світі. Його діяльність охоплює як переклад і адаптацію індійських знань, так і оригінальні розробки. Його вважають одним із перших учених, які ознайомили арабський світ з індійською системою числення. Він брав участь у перекладі астрономічного трактату «Сіддханта», відомого в арабській традиції як «Сіндхінд» — тексту, що містив таблиці синусів, методи обчислення положень планет, основи індійської арифметики й алгебри. Завдяки йому та аль-Хорезмі десяткова позиційна система з використанням нуля була впроваджена в арабську науку, а згодом — у Європу. Є підстави вважати, що саме Сінд ібн Алі запровадив запис десяткових дробів із використанням десяткової крапки, що стало важливим кроком у розвитку обчислювальних методів.

Сінд ібн Алі написав «Книгу про алгебру й аль-мукабалу», у якій розвивав і коментував методи аль-Хорезмі. Він не лише пояснював окремі положення, а й прагнув строго їх обґрунтувати, тим самим наближаючи алгебру до геометричних методів Евкліда. Його праця з алгебри відображає важливий перехід від практичної арифметики до більш абстрактного й теоретично обґрунтованого підходу.

Крім того, він написав трактати «Книга про додавання і віднімання» та «Книга про індійську арифметику», у яких узагальнив методи усного й письмового рахунку, зокрема множення та ділення з використанням індійської нотації.

Сінд ібн Алі також активно займався геометрією. Його коментар до X книги «Начал» Евкліда — «Книга про апотомі й медіалі» — є одним із перших у арабській традиції глибоких досліджень евклідової теорії несумірних величин та ірраціональностей. У цій праці він докладно аналізував поняття медіалей і апотом, тобто особливих ірраціональних величин.

Як астроном і інженер, Сінд ібн Алі брав участь у створенні «Зіджа аль-Мамуна, перевіреного», одного з найдавніших і найточніших астрономічних довідників халіфату. Крім того, він запропонував оригінальний метод визначення розмірів Землі, що полягав у вимірюванні кута між горизонтальною площиною та лінією до морського горизонту з вершини високої гори. Цей метод пізніше описав аль-Біруні у своєму трактаті «Геодезія», визнавши його важливість і практичну точність.

Аль-Кінді

Абу Юсуф Я'куб ібн Ісхак ас-Саббах аль-Кінді (бл. 801–873), відомий у латинській традиції як Алькіндус, походив зі знатного роду племені Кінда; його батько був губернатором Басри. Народившись у Куфі, він здобув там початкову освіту, а потім продовжив навчання в Багдаді. Його блискучі здібності були помічені при дворі халіфів — спершу аль-Мамуна, а згодом аль-Му'тасима. За розпорядженням аль-Мамуна аль-Кінді став членом «Дому мудрості», де він не лише вивчав, а й редагував і курував переклади грецьких наукових і філософських текстів арабською мовою.



Аль-Кінді веде бесіду з Аристотелем — алегоричне зображення з середньовічного арабського рукопису.

При халіфі аль-Му'тасимі він досяг вершини своєї кар'єри, став наставником сина халіфа й присвятив йому свої найважливіші філософські твори. Однак уже за правління аль-Васика, а особливо за аль-Мутаваккіля, аль-Кінді потрапив у немилість: його бібліотеку конфіскували, самого піддали побиттю та усунули від наукової діяльності. Причини цього, ймовірно, крилися в поєднанні придворних інтриг, релігійних переслідувань і негативного ставлення влади до філософії. Аль-Кінді помер близько 873 року в Багдаді, забутий і ізольований.



Попри забуття після смерті та втрату більшості його праць, вплив аль-Кінді на розвиток науки й філософії в ісламському світі — а згодом і в Європі — був надзвичайно глибоким.



Аль-Кінді залишив величезну наукову спадщину: за арабськими джерелами, він написав понад 260 трактатів, що охоплюють філософію, математику, медицину, астрономію, логіку, оптику, музику, механіку й навіть парфумерію. Особливо значущим був його внесок у розвиток математики, криптографії та оптики.



У математиці аль-Кінді став одним із перших мусульманських учених, які сприяли впровадженню й поширенню індійської (десятькової) системи числення. Його праця «Про застосування індійських чисел» у чотирьох книгах суттєво вплинула на подальше прийняття цієї системи в арабському та європейському світі. Його дослідження охоплювали арифметику, геометрію, теорію чисел і пропорцій. Він також розглядав математичні аспекти музичної теорії, розвиваючи ідеї про гармонію чисел.

Аль-Кінді цікавився і філософськими аспектами математики. Зокрема, він намагався спростувати ідею вічності світу, стверджуючи, що існування актуальної нескінченності є математично суперечливим.



Одним із найвизначніших досягнень аль-Кінді, що вплинуло на світову науку, стало його новаторське застосування математичних методів у криптографії. Його трактат «Про розшифрування зашифрованих повідомлень» вважається першою в історії працею з криптоаналізу й основоположним дослідженням з частотного аналізу.



У цьому трактаті аль-Кінді застосував ймовірнісні методи, вивчаючи частоти появи літер в арабській мові для зламу підстановочних шифрів. Це був перший зафіксований в історії приклад використання статистичного аналізу для дешифрування тексту, а сам метод частотного аналізу став основою класичної криптоаналітики, яка застосовувалася аж до XX століття. Таким чином, аль-Кінді справедливо вважається одним із засновників криптографії як наукової дисципліни.

Аль-Кінді був першим великим теоретиком оптики після античних часів. Він критично розглядав дві основні теорії зору — аристотелівську (засновану на передачі «відчутних форм» через середовище) і евклідову (засновану на прямолінійному поширенні променів від ока до предмета) — і віддавав перевагу другій, як тій, що краще пояснює зорове сприйняття. Його трактати з оптики вплинули на таких європейських мислителів, як Роджер Бекон і Роберт Гроссетест.



У медицині аль-Кінді розробляв методи кількісної оцінки ефективності ліків, застосовуючи математичні шкали. Він також досліджував вплив астрономічних і метеорологічних факторів на здоров'я людини. У трактаті *De Gradibus* він запропонував використовувати місячний календар для визначення критичних днів хвороби.

Він також написав праці з астрології, метеорології, алхімії (де критикував можливість перетворення металів), а також з технології виробництва ароматів і дистиляції.

Сабіт ібн Курра

Абу-ль-Хасан Сабіт ібн Курра аль-Харрані, знаний у латинській традиції як Thebit, народився близько 836 року в місті Харран, розташованому у Верхній Месопотамії, в області Діяр-Мудар на території Аббасидського халіфату. Він належав до харранських сабіїв — малої, елінізованої семітської громади з політеїстичними та астральними віруваннями, яких мусульманські автори часто називали «зорепоклонниками» або гностиками. Рідною мовою Сабіта була сирійська, і деякі його праці були написані саме нею.

У молодості Сабіт працював мінійлом на ринку в Харрані, доки його не помітив видатний учений і старший із братів Бану Муса — Мухаммад ібн Муса. Вражений його лінгвістичними та інтелектуальними здібностями, Мухаммад запросив Сабіта до Багдада, щоб навчати його математики, астрономії та філософії. Відтоді розпочався шлях Сабіта ібн Курри як ученого і перекладача, тісно пов'язаний із блискучим інтелектуальним колом «Дому мудрості» (Байт аль-Хікма).

Сабіт став не лише учнем братів Бану Муса, а й їхнім колегою. Він увійшов до наукових кіл Багдада, отримавши доступ як до рукописів, так і до підтримки впливових осіб при дворі. Згодом він став придворним астрономом халіфа аль-Мутадіда (правив у 892–902 рр.), із яким його пов'язували дружні та робочі стосунки. У Багдаді він провів решту життя, продовжуючи наукову діяльність у галузях математики, астрономії, механіки та медицини.

Сабіт ібн Курра написав близько 150 праць, що охоплюють математику, астрономію, медицину та філософію, але до нашого часу збереглося лише кілька десятків. Його син Сінан ібн Сабіт і внук Ібрагім ібн Сінан також стали відомими вченими, продовживши родинну наукову традицію. Сабіт помер у Багдаді 18 (або 19) лютого 901 року.

Завдяки його діяльності розпочався перехід від суто геометричного мислення, властивого грекам, до більш алгебраїчного та кількісного підходу, що підготував ґрунт для математичного мислення Нового часу.

Сабіт ібн Курра присвятив значну частину своїх праць перегляду «Начал» Евкліда. Особливий інтерес у нього викликав п'ятий постулат, із яким у античній геометрії традиційно виникали труднощі. Сабіт запропонував два різні підходи до його доведення:

Перший: Він припустив, що якщо дві прямі розходяться в одному напрямку, то в іншому вони зближуються — це дозволило йому спершу довести існування паралелограма, а потім і самого постулату.

Другий: Він виходив із припущення про існування рівновіддалених прямих (аналогів сучасних еквідистант), на основі чого доводив існування прямокутника, а далі — решту тверджень.

На відміну від греків, які розділяли арифметику й геометрію, Сабіт застосовував числові операції до відношень між геометричними величинами (наприклад, між відрізками чи площами), що стало важливим кроком у формуванні абстрактного числового мислення.

Сабіт ібн Курра першим вивів формулу, що дозволяє знаходити певні пари дружніх чисел — таких натуральних чисел, сума дільників одного (без самого числа) дорівнює іншому і навпаки. Він довів, що якщо $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1}$, і p та q — прості, то $M = 2^n \cdot p \cdot q$ та $N = 2^n \cdot r$ утворюють пару дружніх чисел. При $n = 2$ ця формула дає відому ще з часів піфагорійців пару 220 і 284.

Це стало вагомим внеском у теорію чисел, розширивши уявлення про властивості чисел та їхні взаємозв'язки. У середньовічній Європі його формули стали відомі завдяки латинським перекладам, зокрема в працях Миколи Кузанського та, згодом, Лейбніца.

Хоча Сабіт, ймовірно, не знав оригінального трактату Архімеда про квадратуру параболи, він незалежно здійснив квадратуру сегмента параболи, використовуючи нерівномірний поділ відрізка на частини, пропорційні $1:3:5:7:\dots$, що по суті еквівалентно обчисленню визначеного інтеграла. Його метод дозволив із високою точністю наближено визначати площу сегмента, а також об'єм параболічного купола — тіла, обмеженого параболоїдом обертання.

Ці методи становили ранню форму інтегрального числення, близьку за духом до архімедової, але збагачену оригінальними засобами. Подібні підходи згодом використовували в Європі П'єр Ферма та Бонавентура Кавальєрі, тож у цьому сенсі праці Сабіта — одне з недооцінених ланок у генезі математичного аналізу.

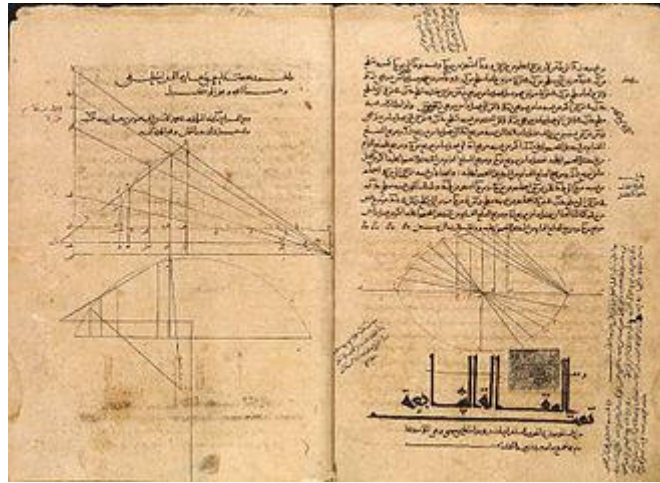
Сабіт ібн Курра першим сформулював і довів теорему синусів для сферичного прямокутного трикутника: $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B$.

Це стало важливим внеском у розвиток сферичної тригонометрії, надзвичайно значущої для навігації та астрономії. Згодом ця теорема поширилася в Європі, вплинувши на праці Регіомонтана та інших учених XV–XVI століть.

Сабіт також розробив узагальнення теореми Піфагора, у якому використав ідеї п'ятого постулату та застосував метод аналізу й синтезу. Ба більше — він першим пов'язав геометрію з поняттями руху та рівноваги, що передбачило ідеї Галілея й Декарта.

Сабіт ібн Курра залишив по собі значну наукову спадщину: відомо щонайменше 44 трактати з математики, механіки, астрономії та філософії, а також 17 медичних праць.

Завдяки знанню сирійської, грецької та арабської мов він відіграв ключову роль у русі перекладів, заснувавши власну перекладацьку школу в Багдаді.



Переклад арабською «Конічних перетинів» Аполлонія

Він переклав і адаптував «Начала» Евкліда (з редагуванням перекладу Хунайн ібн Ісхака), «Конічні перетини» Аполлонія, «Про кулю і циліндр», «Про дотичні кола» Архімеда, а також «Альмагест» і «Географію» Птолемея.

Деякі з цих творів (наприклад, книги V–VII Аполлонія чи Архімедів трактат про побудову семикутника) відомі сьогодні лише завдяки перекладам Сабіта ібн Курри.

Абу Каміль

Абу Каміль Шу‘а ібн Аслам ібн Мухаммад ібн Шу‘а (бл. 850 – бл. 930), відомий також як аль-Хасіб аль-Місрі («єгипетський калькулятор»), був видатним єгипетським математиком доби Золотого віку ісламу. Його вважають наступником аль-Хорезмі, хоча особисто вони не зустрічалися. Жив і працював у Фустаті (нині частина Каїра). Докладних відомостей про його життя майже не збереглося.

Ібн Хальдун поставив його на друге місце серед алгебраїстів після аль-Хорезмі, а його праці справили значний вплив як на подальших ісламських математиків, так і на європейську науку — зокрема на Фібоначчі, який використовував його роботи при створенні власних трактатів з алгебри та геометрії. На відміну від популярної та переважно практичної «Алгебри» аль-Хорезмі, твори Абу Каміля були призначені для математично підготовленої аудиторії й демонстрували помітний крок уперед як за глибиною змісту, так і за строгістю викладу.

Головний твір Абу Каміля — «Книга про алгебру та алмукабалу» — це розвинений трактат, що спирається на «Начала» Евкліда. Він зберігає класичний поділ квадратних рівнянь на шість типів, як у аль-Хорезмі, але обґрунтовує їх розв’язання не просто геометрично, а з прямими посиланнями на конкретні твердження Евкліда, особливо з другої книги. Так, рівняння виду $x^2 + q = px$ він розв’язує за допомогою побудов, які представляють числа у вигляді площ і відрізків, забезпечуючи тим самим строгий зв’язок алгебри з геометрією.

Новаторським було й вільне використання ірраціональних чисел — квадратних, четвертих коренів і їхніх комбінацій — як коефіцієнтів і розв’язків. Це стало важливим кроком до більш абстрактного розуміння алгебри, в якій Абу Каміль дозволяє працювати не лише з цілими та дробовими числами, а й з алгебраїчними величинами вищих ступенів, аж до x^8 . Він дає точні риторичні позначення для степенів змінних, використовуючи, наприклад, вислів «маль маль шай» (буквально: «квадрат квадрата речі») для четвертого степеня, що зближує його термінологію з діофантовою.

Абу Каміль розв’язує не лише окремі рівняння, а й цілі системи, у тому числі зі складними обмеженнями. Одним із прикладів є система

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ xz = y^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ x < y < z \end{cases}$$

— задача, що поєднує числове розв’язання з геометричним змістом (піфагорова трійка). Він не вагається включати в розрахунки об’єкти різної природи, відмовляючись від традиційної античної вимоги однорідності: в одній задачі, наприклад, він шукає висоту рівностороннього трикутника, у якого сума цієї висоти та площі дорівнює 10.

Одним із найбільших досягнень Абу Каміля є систематичне дослідження невизначених лінійних рівнянь у цілих числах. Його «Книга про рідкісності мистецтва арифметики» вважається першим в арабській математиці твором, присвяченим таким рівнянням. У ній наведено задачі, де розв’язків може бути один, кілька або жодного. Особливо відома серія задач, у яких перше рівняння фіксоване $x + y + z = 100$, а друге змінюється — від лінійних комбінацій змінних до складніших співвідношень. Він розв’язує навіть п’ятизмінну систему, знаходячи для неї 2676 допустимих розв’язків, демонструючи не лише технічну майстерність, а й прагнення до повноти аналізу.

Цей систематичний підхід — важлива риса його методу. У невеликому трактаті «Книга птахів» (так названому через задачу про купівлю різних видів птахів на фіксовану суму) Абу Каміль пише: «Я зіткнувся з проблемою, яку розв’язав і для якої знайшов багато розв’язків; розглянувши їх глибше, я отримав дві тисячі шістсот сімдесят шість правильних. Моє здивування було велике, але я виявив, що коли розповів про це відкриття, ті, хто мене не знав, поставилися зверхньо, з недовірою і підозрою. Тому я вирішив написати книгу про цей вид обчислень, аби полегшити їх опрацювання й зробити їх більш доступними».

Тут особливо помітна його прихильність не лише до розв’язання, а й до пояснення процесу — важливий крок до формування методологічної основи алгебри.

Абу Каміль зробив внесок і в геометрію. У втраченій, але збереженій у латинських та єврейських перекладах «Книзі про п’ятикутник і десятикутник» він розглядає наближені розв’язки рівнянь, пов’язаних із побудовою правильних многокутників, зокрема вписаного в коло п’ятикутника за відомим діаметром. Одне з таких рівнянь — $x^4 + 3125 = 125x^2$ — він розв’язує чисельно, вводячи елементи наближених обчислень. Тут же він звертається до «золотого перетину», що підкреслює зв’язок його математики з

естетикою та архітектурною практикою. Саме цей твір вплинув на *Practica geometriae* Фібоначчі.

Інший практичний трактат — «Про обчислення і геометрію» — слугував довідником із розрахунку площ, периметрів і об'ємів різних фігур. Він не претендує на наукову строгість, але свідчить про інтерес Абу Каміля до застосування математики в інженерії та управлінні.

Твори Абу Каміля були перекладені іспанською, латинською та давньоєврейською мовами, частково увійшли до *Liber mahameleth* Іоанна Севільського, а в XV столітті «Книга про алгебру» була повністю перекладена на іврит Мордехаєм Фінці. Його підхід до систематичного викладу розв'язків, термінологія та увага до обґрунтування вплинули на становлення європейської алгебри XIII століття, особливо на *Liber abaci* Фібоначчі.

Він також вважається одним із перших математиків, хто застосував метод подвійного хибного положення (у втраченій «Книзі двох помилок») і почав використовувати алгебру в юридичних задачах (наприклад, у розділі про спадщину за ісламським правом).

Аль-Баттані

В історії арабської науки X століття Аль-Баттані (бл. 858–929), відомий у латинській традиції як *Albatenius*, посідає особливе місце. Його ім'я насамперед пов'язують з астрономією, однак його внесок у математику — особливо в розвиток тригонометрії — став ключовим для подальшого розвитку науки в Європі.



Аль-Баттані народився в Харрані (у північній Месопотамії, на території сучасної Туреччини), але більшу частину життя провів у Рацці на Євфраті, де здійснював систематичні астрономічні спостереження.

Одним із головних внесків Аль-Баттані в математику стало активне використання тригонометричних функцій замість геометричних побудов, які домінували у греків. На відміну від Птолемея, що спирався на хордові функції, Аль-Баттані систематично застосовував синуси, косинуси, тангенси та котангенси, у тому числі під час розв'язання задач сферичної астрономії. Він сформулював і використовував ключові співвідношення між сторонами й кутами сферичних трикутників.

Аль-Баттані склав таблиці тангенсів, котангенсів, секансів і косекансів (останні він називав «таблицею тіней» у зв'язку із сонячними годинниками), уперше представивши повну таблицю косекансів від 1° до 90° . Це стало найважливішим кроком до створення систематичної тригонометрії, яка згодом стане основою математичної астрономії та навігації.

Аль-Баттані використовував великі астрономічні інструменти, встановлені в Рацці, щоб підвищити точність вимірювань. Завдяки цьому він значно уточнив нахил екліптики — $23^\circ 35'$, тривалість сонячного року — 365 днів, 5 годин, 46 хвилин і 24 секунди (що лише

на 2 хвилини 22 секунди відрізняється від сучасного значення), а також величину прецесії рівнодень — 1° за 66 років.

Він також першим зрозумів природу кільцеподібного сонячного затемнення, визначивши, що відстань від Землі до Сонця змінюється протягом року. Його спостереження дозволили зафіксувати зміщення сонячного апогею на $16^\circ 47'$ порівняно з даними Птолемея та дали ранній опис рівняння часу як циклічної величини.

Одним із перших застосувань тригонометрії до задач географії стало рівняння Аль-Баттані для визначення кіблі — напряму на Мекку, обов'язкового під час молитви для мусульман. Ввівши різницю довгот ($\Delta\lambda$) і широт ($\Delta\phi$) між даним місцем і Меккою, він запропонував формулу $\tan q = \sin \Delta\lambda / \sin \Delta\phi$. Хоча це наближення не враховувало сферичну форму Землі й було точним лише поблизу Мекки, воно використовувалося протягом століття, доки аль-Біруні не запропонував точніші методи.

Головний астрономічний твір Аль-Баттані — «Зідж ас-Сабі» (бл. 900) — класичний збірник астрономічних таблиць і теоретичних положень, виконаний у птолемеївській традиції, але без значного впливу індійської чи сасанідської астрономії. У ньому він переглянув дані Птолемея, описав астрономічні інструменти та запропонував власні таблиці руху Сонця, Місяця й зірок. Цей зідж поширився в Європі через латинський переклад Плато Тібуртинуса (1134–1138) і справив вплив на Миколая Коперника, Тихо Браге, Кеплера та Галілея.

Згодом праці Аль-Баттані були використані Христофором Клавіусом під час реформи календаря. Завдяки Аль-Баттані тригонометрія остаточно увійшла до арсеналу прикладної математики й астрономії, а його підходи стали прообразом наукового методу в ісламській традиції.

Аль-Фарабі

Абу Наср аль-Фарабі (бл. 870 — бл. 950), відомий у латинській традиції як Alfarabius, був видатним ученим, філософом, логіком і математиком — одним із центральних представників Золотого віку ісламу. Народився, ймовірно, у Фарабі (сучасний Отрар, Казахстан) у тюркській родині, але навчався й працював у головних інтелектуальних центрах ісламського світу — Багдаді, Дамаску та Алеппо. Там він потрапив під покровительство династії Хамданідів і був близький до еміра Сайф ад-Даули.



Аль-Фарабі володів багатьма мовами (зокрема грецькою), що дозволило йому працювати з першоджерелами античної філософії та науки. Його називали «Другим

учителем» — після Аристотеля, чий праці він не лише коментував, а й систематизував, закладаючи основи арабомовної філософії та науки.



Аль-Фарабі став одним із перших учених, хто чітко розмежував астрономію та астрологію, вважаючи останню псевдонаукою, і закликав учених шукати реальні причини природних явищ. У трактаті «Що правильне і що хибне в судженнях зірок» він критикував астрологічні уявлення, стверджуючи, що рух небесних тіл не визначає події на Землі. Він наполягав, що астрономічні явища слід вивчати за допомогою спостережень і математичних методів, а не покладатися на передбачення астрологів.

У галузі фізики Аль-Фарабі першим висунув ідею, що повітря займає простір і може розширюватися. У трактаті «Слово про порожнечу» він проводив експерименти з зануренням поршнів у воду, спостерігаючи, як повітря заповнює утворені порожнечі. На підставі цих спостережень він дійшов висновку, що ідеальний вакуум неможливий, адже повітря завжди прагне заповнити порожній простір.



Центральне місце у філософії Аль-Фарабі посідає логіка, яку він розглядав як інструмент пізнання, що передує всім іншим наукам. Він продовжив традицію Аристотеля, але суттєво її переосмислив, звернувши увагу на теми, які виходили за межі аристотелівського канону: умовні силогізми, аналогічні умовиводи (у дусі стоїків), а також зв'язок логіки з граматиною. Він поділив логіку на два рівні: «уявлення» (tasawwur) і «ствердження» або «доведення» (tasdiq), тим самим заклавши основи формальної класифікації логічних операцій. У коментарі до «Поетики» Аристотеля він увів оригінальне поняття «поетичного силогізму» — способу, за допомогою якого образи й метафори, особливо у поезії, можуть передавати філософські смисли.

Хоча оригінальні математичні трактати Аль-Фарабі не збереглися, його внесок у розвиток математичного мислення проявився в систематизації та філософській інтерпретації наукових дисциплін. У творі «Іхса аль-улюм» («Перелік наук») він представив класифікацію всіх галузей знання, включно з математикою, як самостійною і фундаментальною наукою. Він поділяв математику на арифметику, геометрію, астрономію, музику й механіку — структуру, натхненну



платонівсько-аристотелівською традицією, але адаптовану до ісламського наукового середовища.

У цій структурі арифметика тлумачиться не лише як мистецтво лічби, а й як наука про сутність чисел; геометрія — як вивчення абстрактних форм і відношень; музика — як числовий вираз гармонії. Таким чином, Аль-Фарабі продовжив платонівську лінію, пов'язуючи музику з математикою й космосом, що особливо яскраво виявлено у його «Великій книзі про музику»

(Kitab al-Musiḳi al-Kabir), де він аналізує математичну природу музичних інтервалів, їхній вплив на душу та зв'язок із поетичним мовленням.

Космологія Аль-Фарабі є оригінальною спробою поєднати аристотелівську теорію причинності, неоплатонічну модель еманції та птолемейську астрономію. Всесвіт у нього постає як система концентричних сфер, кожна з яких відповідає певному «інтелекту» — рівню буття, що випромінюється від Першопричини. У центрі — земний, матеріальний світ, на периферії — Небесний Розум, чия думка запускає ланцюг буття. Числова впорядкованість і логіка еманції надають цьому космосу строгої ієрархії, де кожен щабель має дедалі більшу множинність і недосконалість у міру віддалення від Єдиного.



Ця концепція метафізики тісно пов'язана з математикою через уявлення про досконалість як простоту та єдність. Чим простіша й єдиніша субстанція, тим вищим є її місце в онтологічній ієрархії. Таким чином, Аль-Фарабі тлумачить структуру реальності як логіко-математичну систему, у якій кожен рівень буття підпорядковується строгим законам причинності та необхідності.



Аль-Фарабі розробив цілісну теорію пізнання, у якій особливе місце належить інтелектуальному сприйняттю. Він розрізняв чотири типи інтелекту: потенційний, актуальний, набутий і активний. Потенційний інтелект є в кожній людині — це здатність мислити. Актуальний — це інтелект, що здійснює акт мислення, який починається з абстрагування універсалій із чуттєвого досвіду. Набутий інтелект формується в міру того, як людина наближається до пізнання загальних істин, які вже містяться в активному інтелекті — особливому розумі, що пов'язує людину з вищими сферами

буття.

Математика, за Аль-Фарабі, посідає проміжне місце між чистими абстракціями метафізики та мінливим світом природи. Вона надає людині сталі й перевірювані форми знання, що дозволяють наблизитися до інтелектуальної досконалості. Тому вона розглядається не лише як наука, а й як шлях етичного й духовного самовдосконалення.



Однією з історичних заслуг Аль-Фарабі стало збереження й переосмислення спадщини Аристотеля та Платона. Його праці — зокрема коментарі до «Категорій», «Поетики», «Метафізики» — відіграли ключову роль у передачі грецької філософії в арабський світ, а через нього — до латинської Європи. Саме завдяки прологу Аль-Фарабі до «Метафізики» Аристотеля Ібн Сіна (Авіценна) зміг правильно інтерпретувати цей складний текст. Аль-Фарабі справив значний вплив на Моше Маймоніда, а пізніше — через латинські переклади — на схоластику XIII століття. За це його й називали «Другим учителем» (після Аристотеля).



Аль-Фарабі став важливою ланкою у передачі античної спадщини — насамперед аристотелівської — до ісламського світу, а звідти й до Європи. Його логічні та філософські твори, особливо коментарі до Аристотеля, широко читали й цитували середньовічні арабські та єврейські мислителі, а згодом — і європейські схоласти.

Через праці таких авторів, як Авіцена (Ібн Сіна), чия філософія тісно пов'язана з Аль-Фарабі, його ідеї досягли латинського Заходу. У XII–XIII століттях у Толедо та інших центрах перекладів його твори були перекладені латинською, і трактати про логіку, метафізику та класифікацію наук стали підручниками для європейських шкіл.



(З аль-Біруні в центрі та Авіценною праворуч)

На Сході Аль-Фарабі справив значний вплив на розвиток філософії, логіки та наукової методології. Він став взірцем «філософа-громадянина», що прагне до поєднання знання й доброчесності, що особливо відобразилося в його концепції «доброчесного міста» — ідеального суспільства, у якому математика й наука відіграють важливу роль у вихованні розуму.

Ан-Найрізі

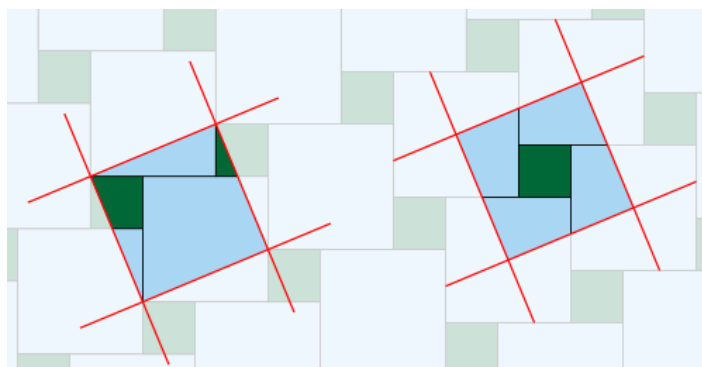
Один із ключових етапів в історії арабської науки — це не лише створення нових знань, а й збереження та переосмислення античної спадщини. Особливо важливу роль у цьому процесі відіграли перекладачі й коментатори грецьких текстів. Одним із них був Абу аль-Аббас аль-Фадль ібн Хатім ан-Найрізі (бл. 865 — після 922), відомий як ан-Найрізі — за назвою міста Найріз у Персії, звідки він походив.

Про нього відомо порівняно небагато, проте збережені праці ан-Найрізі дозволяють оцінити його значення. Він жив у Багдаді, в епоху розквіту Аббасидського халіфату, коли перекладацька діяльність і зацікавлення науками активно підтримувалися правителями. Як і багато інших учених свого часу, ан-Найрізі працював у межах грецької наукової традиції, головним чином — спадщини Евкліда.

Найбільшу славу ан-Найрізі здобув завдяки своєму коментарю до «Начал» Евкліда. Він працював із арабським перекладом, виконаним Хаджджаджем ібн Юсуфом ібн Маттаром, і не просто пояснював текст, а прагнув глибше розкрити його зміст. Коментар ан-Найрізі містить уривки з більш ранніх античних тлумачів Евкліда, зокрема Герона Александрійського та Симплікія.

Ан-Найрізі не обмежувався переказом геометрії — він аналізував структуру доведень, уточнював формулювання, а іноді пропонував альтернативні доведення. Наприклад, він

дав власне доведення теореми Піфагора, використовуючи фігуру з повторюваних квадратів (так звану «піфагорову мозаїку» або «піфагорову викладку»).



Розтин на п'ять частин, використаний у доведенні ан-Найрізі й Сабіта ібн Курри (ліворуч) та Генрі Перігала (XIX ст.)

Особливе місце в математиці ан-Найрізі посідає його «Трактат про доведення п'ятого постулату Евкліда». Ан-Найрізі намагався довести його, виходячи з уявлення про паралельні прямі як еквідистанти — тобто такі, що на всій довжині перебувають на однаковій відстані одна від одної. Цю ідею він запозичив у грецького філософа Посідонія і, можливо, у маловідомого математика Аганіса.

Спочатку він показує, що за такого визначення можна побудувати прямокутник (фігуру з чотирма прямими кутами), а потім на цій підставі виводить п'ятий постулат. Сьогодні ми знаємо, що такий підхід містить приховані припущення, але на той час це був важливий крок у розвитку геометричного мислення.



Якоб Охтервелт, Музиканти на вулиці біля дверей заможного дому, 1665 р.

Підлога на цій картині є піфагоровою мозаїкою.

Ан-Найрізі також розвивав тригонометрію. Він одним із перших ужив термін умбра («тінь»), який позначав величину, що відповідає сучасному тангенсу кута. Цей термін застосовувався під час вимірювання тіней в астрономії та геодезії. Він довів загальну теорему синусів для сферичних трикутників.

Окрім геометрії та тригонометрії, ан-Найрізі писав про практичне застосування математики. Йому належать такі твори, як «Книга про кутомірні вимірювання», присвячена обчисленню кутів і відстаней; «Книга про дії з астролябією» — практичний посібник із використання цього універсального астрономічного приладу; «Трактат про азимут кібли», у якому він описав точний метод визначення напрямку на Мекку; «Книга про побудову сонячних годинників» — корисна в повсякденному житті праця про вимірювання часу за сонячною тінню, а також астрономічні таблиці, складені за індійською методикою.

Ан-Найрізі також згадує атмосферні явища і, ймовірно, створив працю про них на замовлення халіфа аль-Мутадіда.

Твори ан-Найрізі стали відомі в Європі у XII столітті завдяки перекладачам, особливо Герарду Кремонському. Його латинська версія коментарів до «Начал» Евкліда тривалий час використовувалася як важливий навчальний посібник у середньовічних університетах. Часто саме за текстами ан-Найрізі європейські вчені вперше знайомилися з евклідовою геометрією, зокрема з важкими для розуміння постулатами. У цьому сенсі ан-Найрізі був не просто тлумачем давніх текстів, а активним учасником передачі наукового знання від античного світу — через арабську культуру — до Європи. Він був посередником, який не лише зберіг знання, а й розвивав їх, прагнучи зробити точнішими й зрозумілішими.

Аль-Хазін

Абу Джафар Мухаммад ібн аль-Хасан аль-Хазін (бл. 900 – бл. 970) жив і працював у місті Рей — одному з найважливіших наукових центрів епохи, що перебував під заступництвом Буїдів. При дворі правителя Адуда ад-Даули він входив до кола запрошених учених і в 959/960 році, за дорученням візира, здійснив вимір нахилу екліптики.

Аль-Хазін залишив глибокий слід у розвитку астрономії. Він створив коментар до «Альмагеста» Птолемея, у якому висунув 19 тверджень, що уточнювали або переосмислювали висновки давньогрецького вченого. Зокрема, він виступив із критикою птолемеївської моделі світу, запропонувавши іншу схему руху Сонця, яка увійшла в історію під назвою теорії концентричного екванта. У цій моделі Земля зберігає своє центральне положення, але швидкість руху Сонця по орбіті змінюється так, щоб із певної точки спостереження його рух здавався рівномірним. Це був один із ранніх кроків до відмови від суто геометричного підходу античності та переходу до фізико-математичного моделювання, яке згодом розвинулося у працях Коперника, Кеплера й Ньютона.

Однією з найвідоміших його праць стала книга «Зідж тимпанів» (буквально — «Таблиці дисків»), де він описав удосконалену конструкцію астролябії — приладу, за допомогою якого можна було здійснювати різноманітні астрономічні вимірювання. Аль-Хазін

запропонував оригінальне технічне рішення: на астролябію встановлювалися спеціальні пластини з вигравіюваними таблицями, що дозволяло проводити обчислення безпосередньо на приладі. Це трактат цитувався аж до пізнього Середньовіччя, а сам інструмент було реконструйовано у XX столітті, хоча під час Другої світової війни він був утрачений (збереглися лише фотографії).¹⁷

Цікавим є й його розв'язання задачі Архімеда про поділ кулі на частини із заданим співвідношенням об'ємів за допомогою конічних перетинів. Це ранній приклад застосування методів геометрії для розв'язання рівнянь третього степеня — напрям, який пізніше отримає подальший розвиток у працях Омара Хайяма.

Абу-ль-Хасан аль-Уклідісі

Одним із яскравих, хоча й не настільки відомих представників арабської математичної традиції був Абу-ль-Хасан Ахмад ібн Ібрагім аль-Уклідісі (бл. X ст.) — математик із Дамаска, чие ім'я безпосередньо вказує на його зв'язок із працями Евкліда: «Уклідісі» означає «послідовник Евкліда».

Головна праця аль-Уклідісі — «Книга про застосування індійського рахунку» (*Kitāb al-Fuṣūl fī al-ḥisāb al-Hindī*) — є узагальненням і розвитком індійської десяткової системи числення, адаптованої до потреб арабського світу. Індійська нумерація вже була широко відома, але переважно використовувалася з рахунковими дошками та спеціальними позначками. Аль-Уклідісі вперше в історії запропонував використовувати десяткові дроби у позиційному записі без допоміжних таблиць або абака, тобто безпосередньо на письмі.

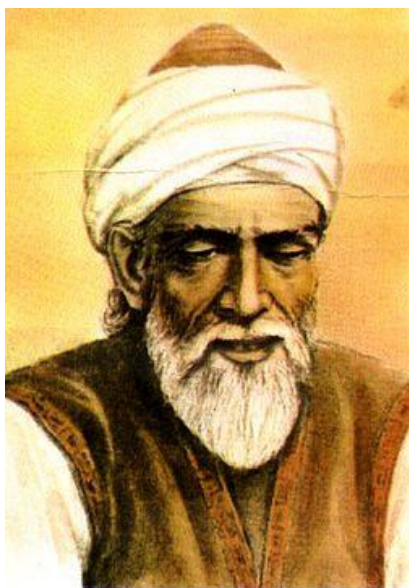
Це був справжній революційний крок. Він дозволяв записувати дробові числа в єдиній десятковій системі, наближаючись до того формату, який стане стандартом у Європі лише в епоху Регіомонтана, Симона Стевіна, а згодом — у добу Декарта та Ньютона. Аль-Уклідісі вводить символічне позначення для десяткового поділу — особливу риску, яку проводили над або під цифрою, що позначала початок дробової частини. Хоча це ще не десяткова кома в сучасному вигляді, принцип залишався тим самим: безперервний позиційний запис числа, включно з дробовою частиною.

Однак ця спроба була забута, і десяткові дроби були знову відкриті аль-Каші на початку XV століття.

Абу-ль-Вафа аль-Бузджані

Абу-ль-Вафа Мухаммад ібн Мухаммад ібн Ях'я ібн Ісмаїл аль-Бузджані народився 10 червня 940 року в місті Бузган, у Хорасані (сучасний Іран). Уже в юності він проявив видатні математичні здібності, а у 19 років переїхав до Багдада — одного з найбільших наукових центрів ісламського світу того часу. Тут він провів усе своє подальше життя, активно беручи участь в інтелектуальному житті міста й перебуваючи під заступництвом придворних Буїдів. Помер у Багдаді в 998 році.

¹⁷ Фото наведено в [King, David A. (2007). "New Light on the Zij al-Safāa'ih of Abū Jacfar al-Khāzin". *Centaurus*. 23 (2): 105–117.]



Абу-ль-Вафа листувався з аль-Біруні й навіть провів із ним спільне астрономічне спостереження затемнення 998 року: він — у Багдаді, аль-Біруні — в Ургенчі. Це дозволило досить точно визначити різницю довгот між двома містами — важливий крок у розвитку астрономічної географії.

Абу-ль-Вафа написав докладні коментарі до праць Евкліда, Діофанта й аль-Хорезмі, розвиваючи та уточнюючи їхні ідеї. На відміну від більшості арабських математиків свого часу, він (ймовірно, під впливом індійської традиції) почав активно використовувати від'ємні числа — новаторський крок, засвідчений у його трактаті «Про те, що потрібно знати писарям і ділцям із науки арифметики».

У цьому ж трактаті він систематизував прийоми арифметики, необхідні для ділової та повсякденної практики, що робить його працю унікальним прикладом прикладної математики середньовіччя. В іншому творі — «Про те, що необхідно реміснику з геометричних побудов» — він розглянув понад сто задач із геометрії, зокрема побудови циркулем із фіксованим розкриттям, відомі ще грецьким і індійським авторам, але вперше систематизовані.

Особливо цікава глава, у якій він розв'язує задачу розрізання двох довільних квадратів на частини, з яких можна скласти один квадрат — це, по суті, геометричне доведення теореми Піфагора.

Головним досягненням Абу-ль-Вафи в математиці вважається його внесок у розвиток тригонометрії — як пласкої, так і сферичної. Він одним із перших увів у вжиток функції тангенс і котангенс, уклав таблиці синусів, тангенсів і котангенсів із кроком у 15 хвилин дуги, розробив нову методику обчислення значень синуса, що забезпечила небувалу точність. Він вивів і довів тригонометричні тотожності:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$$

В астрономії Абу-ль-Вафа відомий як спостерігач і коментатор «Альмагеста» Птолемея. Його праця «Книга Альмагест» містила не лише виклад античної теорії, а й власні спостереження, зокрема опис нерівномірностей у русі Місяця — явища, яке пізніше незалежно відкрив Тихо Браге. Він також першим описав настінний квадрант — інструмент для вимірювання висоти небесних тіл.

Хоча більшість його оригінальних астрономічних праць утрачена, збережені фрагменти й відомості про його прилади та методи дозволяють вважати Абу-ль-Вафу одним із провідних астрономів X століття.

Аль-Кухі

Абу Сахль Вайджан (Біжан) ібн Рустам аль-Кухі (бл. 940–1000) народився в області Кух (або Кухістан), у районі Табаристана (сучасний північ Ірану), а зрілі роки провів у Багдаді — науковій столиці тієї епохи. Аль-Кухі був сучасником і, ймовірно, колегою Абу-ль-Вафи, з яким працював над розвитком астрономії. У 988 році за дорученням буїдського еміра Шарафа ад-Даули він очолив роботи в новій обсерваторії, де проводилися високоточні астрономічні спостереження. Аль-Біруні, описуючи цю установу, згадував круглу залу з діоптром у стелі: сонячні промені, проникаючи



всередину, залишали на сферичній підлозі сліди, за якими можна було відстежувати добовий рух світила — ранній приклад поєднання геометрії й фізики в архітектурі наукового приладу.

Аль-Кухі також брав участь у перекладі та тлумаченні класичних грецьких текстів, зокрема творів Евкліда й Архімеда, проте ще важливішим є те, як він розвивав ці ідеї й ставив власні задачі, часто складніші за античні.

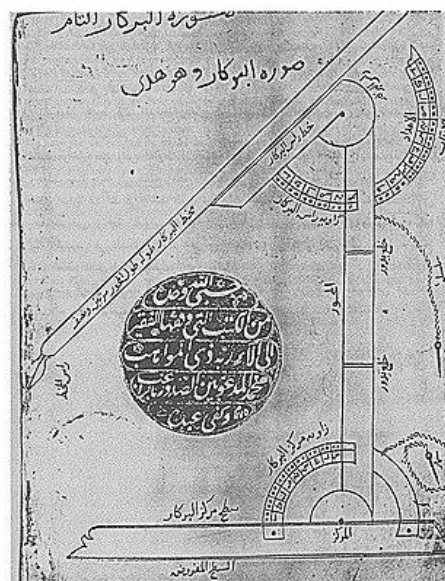
Основна математична спадщина аль-Кухі пов'язана з геометрією, особливо з її більш складними задачами, що потребують розв'язання рівнянь третього й четвертого степеня. Він активно розробляв методи побудов, засновані не лише на колах і прямих, а й на кривих другого порядку

— парабол, гіпербол, еліпсах. Це був значний крок уперед порівняно з класичною евклідовою геометрією — передвісник того, що в Європі згодом стане аналітичною геометрією.

Особливу увагу він приділяв задачам Архімеда й Аполлонія, що вимагали високої точності та винахідливості. Прикладом може бути його розв'язання задачі про вписання рівностороннього п'ятикутника у квадрат — задача, яка зводиться до рівняння четвертого ступеня й яку аль-Кухі розібрав із математичною строгістю.

Не менш вражаюча його робота над архімедівською задачею поділу кулі: аль-Кухі дав її повний геометричний розбір, продовживши міркування аль-Хазіна. Більше того, він запропонував нову задачу: побудувати сферичний сегмент, об'єм якого дорівнює об'єму одного заданого сегмента, а площа поверхні — поверхні іншого. Це призводить до кубічного рівняння, розв'язання якого аль-Кухі здійснив за допомогою перетину параболи й гіперболи.

Інтерес аль-Кухі до геометрії був тісно пов'язаний із технічною практикою. В одному з трактатів він описав пристрій, який, ймовірно, винайшов сам, — так званий досконалий циркуль. Це інструмент із



Kitāb al-Qānūn fī al-biḥār al-samāwiyya, MS Istanbul, Raghib Pasha 569, fol. 235r.

однією регульованою ніжкою, за допомогою якого можна креслити всі конічні перетини: прямі, кола, параболи, еліпси й гіперболи.

Аль-Кухі також залишив праці з практичної астрономії, зокрема трактат про астролябію, у якому він розв'язує низку складних геометричних задач, необхідних для точної роботи інструмента.

У галузі фізики аль-Кухі висунув цікаву, хоча й пізніше відкинуту гіпотезу: вага тіла залежить від його відстані до центра Землі. Ця ідея, по суті, розвивала уявлення про гравітацію задовго до Галілея й Ньютона — хоч і в межах геоцентричної моделі світу.

Ібн Юнус (аль-Місрі)

Абу-ль-Хасан Алі ібн Абдуррахман ібн Юнус ас-Садафі аль-Місрі (бл. 950 — 31 травня 1009), більш відомий як Ібн Юнус, був видатним арабським математиком і астрономом, який працював у Каїрі при дворі Фатімідів. Його вважають одним із найвизначніших астрономів ісламського світу і, можливо, всієї домодерної доби.

Математична спадщина Ібн Юнуса тісно пов'язана з його астрономічними працями, насамперед із головним твором — «Зідж аль-Хакімі аль-Кабір» (буквально: «Великі таблиці Хакіма»), завершеним близько 1007 року. Ці таблиці містять, серед іншого, точні тригонометричні значення синусів і косинусів із кроком в одну кутову хвилину. Ібн Юнус визначав тригонометричні функції не через кути, а через довжини дуг на одиничному колі, що передбачає сучасний підхід.

Особливо важливим є його внесок у сферичну тригонометрію. Він першим сформулював методи розв'язання сферичних трикутників за допомогою введення допоміжних кутів — підхід, який значно спростив обчислення й став основою для подальшого розвитку цієї галузі. Крім того, у його Зіджі міститься тригонометрична тотожність, еквівалентна сучасній формулі $2\cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$.

Ібн Юнус проводив астрономічні спостереження в обсерваторії на горі Мокаттам поблизу Каїра, обладнаний за наказом фатімідських халіфів. Його спостереження сонячних і місячних затемнень, а також планетних з'єднань відзначалися надзвичайною точністю. Зокрема, він описав 40 з'єднань планет і 30 місячних затемнень. Його спостереження з'єднання Венери й Меркурія 19 травня 1000 року підтверджене сучасними астрономічними розрахунками з точністю до третини градуса.

На основі даних про затемнення, спостережувані між 977 і 1007 роками, Ібн Юнус уперше вказав на вікове прискорення середнього руху Місяця — важливий внесок у вивчення динаміки небесних тіл, який у Європі було визнано лише через багато століть.

Числові дані в «Зіджі» Ібн Юнуса подані з точністю до сьомого знаку після коми. Такий рівень деталізації став можливим завдяки ретельним вимірюванням і вмілій роботі з тригонометричними методами. Ці таблиці використовувалися астрономами протягом двох століть, а єгипетські календарі спиралися на них навіть у пізній ісламський період.

Сам Ібн Юнус дотримувався наукового підходу, заснованого на спостереженні, експерименті й раціональній перевірці. Він відкидав авторитет традиції, якщо вона суперечила даним досвіду й логіці. Його підхід можна виразити трьома принципами:

наукове знання через спостереження, віра, зміцнена вивченням природи, і прагнення до пізнання, сповнене насолоди та естетики.

Аль-Караджі

Важним етапом розвитку алгебри в арабському світі стала творчість Абу Бакра аль-Караджі (бл. 953 — після 1019), математика й інженера, чия діяльність припала на період розквіту Багдада як наукового центру. Його внесок знаменує перехід від риторичної алгебри до більш формалізованої, символічної та структурної форми, близької до тієї, яку згодом розвиватимуть європейські математики Нового часу.

Про життя аль-Караджі відомо небагато. Він народився в районі поблизу сучасного Тегерана, а потім переїхав до Багдада, де працював інженером і, імовірно, викладачем. Його наукова діяльність розгорталася в контексті високорозвиненої традиції, започаткованої аль-Хорезмі, Сабітом ібн Куррою та іншими вченими X століття, але відзначалася новим підходом до алгебри.

Головне математичне досягнення аль-Караджі — систематизація операцій із многочленами й степенями, що вперше надало алгебрі структуру, аналогічну сучасному поняттю кільця. Він розглядав степені x , x^2 , x^3 і далі як абстрактні об'єкти, з якими можна виконувати арифметичні дії. При цьому вперше використовував вирази на кшталт «куб куба» для позначення x^9 і вводив правила роботи з цими об'єктами — множення, ділення, добування коренів і спрощення виразів.

Його трактат «Фахрій» («Славетний») містить ядро цієї нової алгебри. У ньому аль-Караджі чітко формулює правила роботи з одночленами й многочленами, зокрема ділення многочлена на одночлен — важливий крок у розвитку формальних алгебраїчних процедур. Ба більше, він застосовує алгебру для розв'язання задач на прогресії, площі та об'єми.

На відміну від своїх попередників, аль-Караджі свідомо відмовляється від геометричних інтерпретацій. Якщо в аль-Хорезмі квадратний член x^2 означає буквально площу квадрата, то в аль-Караджі це вже просто степінь змінної — абстрактне число. Цей рух від геометричної до суто алгебраїчної алгебри став вирішальним кроком у її становленні. Таким чином, аль-Караджі підготував ґрунт для формального символізму й поняття змінної як елемента структури.

Одним із найвизначніших досягнень аль-Караджі було використання трикутника чисел, аналогічного трикутнику Паскаля, для обчислення біноміальних коефіцієнтів — задовго до Ньютона та європейських алгебраїстів. Він сформулював рекурсивні правила побудови цього трикутника та вивів формули, еквівалентні сучасному розкладу бінома

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Хоч аль-Караджі не користувався сучасною символікою, його міркування фактично містять ту саму математичну структуру.

Ібн аль-Хайсам

Абу Алі аль-Хасан ібн аль-Хасан ібн аль-Хайсам (бл. 965, Басра — бл. 1040, Каїр), відомий у Європі під латинізованим іменем Альхазен (лат. Alhazen), був видатним ученим, чий внесок охоплює математику, оптику, астрономію, механіку та філософію. Він особливо знаний як реформатор оптики й один із перших учених, що систематично застосовували експеримент у дослідженнях. Сучасники називали його «другим Птолемеєм», а сучасні історики науки — «першим справжнім ученим» і навіть попередником наукового методу.



Ібн аль-Хайсам народився в Басрі (сучасний Ірак) і здобув класичну освіту, що включала богослов'я й філософію. Спочатку він обіймав адміністративну посаду візира, але згодом залишив державну службу заради науки. Близько 1011 року він був запрошений до Єгипту халіфом аль-Хакімом, якому представив грандіозний проект регулювання розливів Нілу. На місці вчений дійшов висновку, що здійснити цей проект неможливо при рівні техніки того часу. Це викликало гнів халіфа, і, рятуючись від покарання, Ібн аль-Хайсам удав божевільня й провів близько десяти років під домашнім арештом.

Саме тоді він написав свій головний твір — «Книгу оптики».

У математиці Ібн аль-Хайсам виявив себе як тонкий геометр і аналітик. У спробі довести п'ятий постулат Евкліда він уперше розглянув так званий чотирикутник Ламберта, у якого три кути прямі, а четвертий — довільний. Так він передбачив ідеї, що згодом ляжуть в основу неевклідової геометрії.



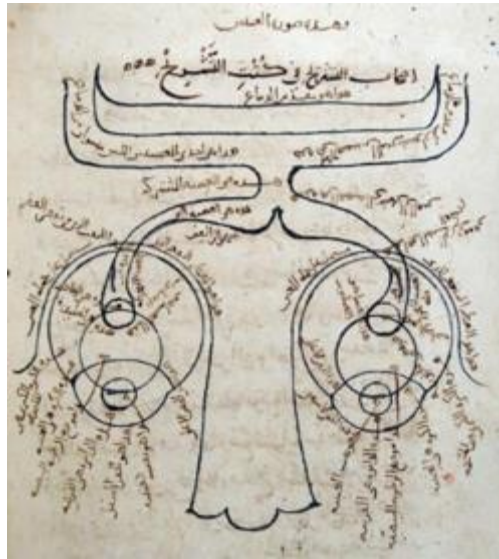
Ібн аль-Хайсам розробив геометричні методи інтегрування. У трактаті «Про вимір параболічного тіла» він вивів формули сум квадратів, кубів і четвертих степенів натуральних чисел — результати, еквівалентні сучасному обчисленню визначених інтегралів. Він також намагався довести ізопериметричну теорему, згідно з якою круг має найбільшу площу за заданого периметра, а куля — найбільший об'єм за заданої поверхні.

Йому належать також трактати про квадратуру кола, добування коренів, побудову правильних багатокутників, магічні квадрати та розв'язання рівнянь четвертого степеня. Однією з таких задач була знаменита «задача Альхазена», пов'язана з відбиттям світла від сферичних дзеркал — над нею у XVII ст. працювали Барроу й Гюйгенс.

Головний внесок Ібн аль-Хайсама в науку — це його «Книга оптики» (Kitāb al-Manāẓir, 1011–1021), перекладена латинською в XII столітті як Opticae thesaurus. Цей твір справив потужний вплив на розвиток європейської оптики — від Вітелона до Кеплера, Галілея й Ньютона. У ньому Ібн аль-Хайсам рішуче відкинув античну емісійну теорію зору, згідно з якою очі «випромінюють промені», й довів, що бачення відбувається завдяки тому, що світло від предметів потрапляє в око. Він детально описав анатомію ока,



пояснив перспективу, веселку, заломлення, відбиття, тіні, гало і навіть припустив, що світло має скінченну швидкість.



Структура людського ока за аль-Хайсамом

Особливого значення набуває його експериментальний підхід: він проводив досліди з камерою-обскурою, дзеркалами, прозорими середовищами, висував гіпотези й перевіряв їх емпірично. Саме за це Ібн аль-Хайсама часто називають попередником Галілея й Бекона, засновником наукового методу.

Ібн аль-Хайсам також залишив низку астрономічних трактатів: «Про затемнення», «Про світло світил», «Про паралакс Місяця», «Про форму світу», «Про визначення полюса» тощо. У цих працях він поєднував геометрію з астрономічними спостереженнями, прагнучи до максимальної точності у визначенні координат і рухів небесних тіл. Він також розробив методи визначення відстаней між містами за астрономічними вимірюваннями.

Ібн аль-Хайсам залишив понад 90 творів, більшість із яких присвячено математиці й астрономії. Його праці були відомі й використовувалися в Європі аж до XVII століття. Альхазен не лише поєднав античну традицію з ісламською наукою, а й справив глибокий вплив на європейську наукову революцію.

На честь ученого названо кратер на Місяці, а головна спадщина Ібн аль-Хайсама — це сама ідея, що істина в науці потребує не лише розуму, а й досвіду.

Аль-Біруні

Абу Рейхан Мухаммад ібн Ахмад аль-Біруні (973–1048) народився 4 вересня 973 року в місті Кят (сучасне Беруні в Узбекистані), у державі Хорезмшахів. Його дитинство минуло в непростих умовах — він сам зазначав, що не знав ні батька, ні діда. Попри це, Біруні здобув ґрунтовну математичну та філософську освіту. Його першим наставником був відомий математик Ібн Ірак.



Політична нестабільність Хорезму змусила молодого вченого покинути рідне місто: після зміни династії він перебрався до Рею, де співпрацював з астрономом аль-Ходжанді. Згодом він опинився при дворі Зіяридів у Табаристані, де близько 1000 року написав свій перший великий твір — «Хронологію».

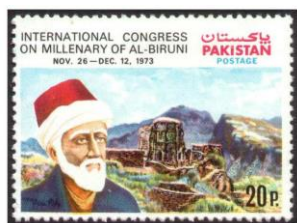
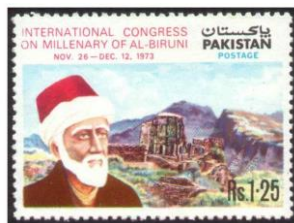
Повернувшись до Хорезму, Біруні потрапив у коло видатних учених Академії Мамуна в Гурганджі — серед них був і Ібн Сіна (Авіценна).

Після завоювання Хорезму Газневідами у 1017 році він опинився в Газні, столиці султана Махмуда, де продовжив наукову діяльність при дворі. Він супроводжував султана в індійських походах, провів кілька років в Індії та опанував санскрит, вивчаючи місцеву культуру й науку. Біруні помер у Газні 9 грудня 1048 року.



Біруні залишив по собі понад сотню творів, що охоплюють найрізноманітніші галузі знань.

Він зробив вагомий внесок у розвиток тригонометрії як самостійної математичної дисципліни, відокремленої від астрономії. У його працях зустрічаються синуси, косинуси, тангенси й котангенси — причому він оперував ними алгебраїчно, а не лише геометрично, як це робили греки. Зростання складності астрономічних і геодезичних задач вимагало від арабських математиків дедалі точніших обчислень тригонометричних величин, а отже — і вивчення дедалі складніших рівнянь.



Так, під час складання своїх знаменитих тригонометричних таблиць аль-Біруні підійшов до задачі обчислення синуса одного градуса. Для цього він використав геометричний метод, пов'язаний із побудовою правильних многокутників, вписаних у коло.

Першим кроком було визначення сторони правильного 18-кутника, вписаного в коло радіуса 1. Позначивши цю сторону через x , аль-Біруні показав, що вона задовольняє кубічному рівнянню $x^3 + 1 = 3x$.

Розв'язавши це кубічне рівняння, він обчислив сторону правильного 18-кутника, а потім, застосувавши відому формулу переходу від $2n$ -кутника до n -кутника, знайшов сторону правильного 9-кутника. Це дозволило, використовуючи тригонометричні тотожності та інтерполяцію, визначити значення $\sin 1^\circ$ з вражаючою точністю — його результат містив чотири правильні знаки у шістдесятковій системі числення.



У «Каноні Мас'уда» — фундаментальному астрономічному трактаті, завершеному близько 1030 року, — Біруні подає обґрунтування всіх використовуваних ним астрономічних теорій, наводячи математичні й експериментальні доведення. Тут він розглядає сферичну тригонометрію, описує властивості сферичних трикутників, а також застосування тригонометрії до задач небесної механіки й геодезії.

Крім того, йому належить оригінальна геометрична праця «Про визначення хорд у колі за допомогою вписаної ламаної лінії», у якій він переосмислює й розвиває ідеї Архімеда.

Одним із видатних досягнень Біруні стало експериментальне визначення радіуса Землі. Використовуючи метод астрономічних спостережень із вершини гори та ґрунтуючись на законах геометрії, він обчислив радіус Землі з надзвичайною для свого часу точністю — з похибкою менш ніж 1%. На відміну від грецького методу Ератосфена, що спирався на спостереження з двох віддалених міст, метод аль-Біруні не вимагав подорожей і міг бути реалізований у межах однієї гірської місцевості.



Суть методу проста й геніальна. Аль-Біруні спостерігав із вершини високої гори й вимірював кут між вертикаллю та напрямом погляду до лінії горизонту. Якщо уявити собі Землю як кулю, то лінія погляду з гори до горизонту є дотичною до поверхні планети. Геометрична модель, побудована на цій ідеї, дозволяла обчислити радіус Землі, знаючи висоту гори та вимірний кут.

Нехай R — радіус Землі (невідомий), h — висота гори (виміряна), θ — кут між вертикаллю на вершині гори та лінією погляду до горизонту. Ці величини пов'язані простим і красивим співвідношенням $(R + h) \cos \theta = R$, звідки легко виразити радіус R .

Отже, задача зводиться до двох вимірювань: висоти гори й кута до горизонту. Для визначення висоти гори аль-Біруні використав метод тригонометричного засічення. Він вибрав на рівнині дві точки, що лежали на одній прямій із вершиною гори, виміряв відстань між ними та кути піднесення до вершини. Знаючи це, можна обчислити висоту за формулою прямокутного трикутника. Усі необхідні вимірювання він проводив за допомогою астролябії — приладу, широко вживаного в ісламській астрономії.



Після всіх обчислень аль-Біруні отримав значення довжини кола Землі близько 39 960 км, що відповідає радіусу приблизно 6 370 км. Сучасне середнє значення — близько 6 371 км.

Біруні займався і практичними питаннями: створив трактати про астролябію та інші інструменти, необхідні для астрономічних і навігаційних вимірювань. У творі «Тіні» він досліджує поведінку тіней за різного положення Сонця — результат, важливий, наприклад, для визначення часу за гномоном.

Знання численних мов (арабської, перської, грецької, санскриту, сирійської, івриту тощо) дозволило Біруні створювати системи наукової транскрипції та точного перекладу. У праці «Кітаб аль-Тафхім» він розглядає багато математичних і астрономічних понять, подаючи їхні відповідники арабською та перською мовами. Цей твір став важливим кроком у розвитку наукової перської мови.

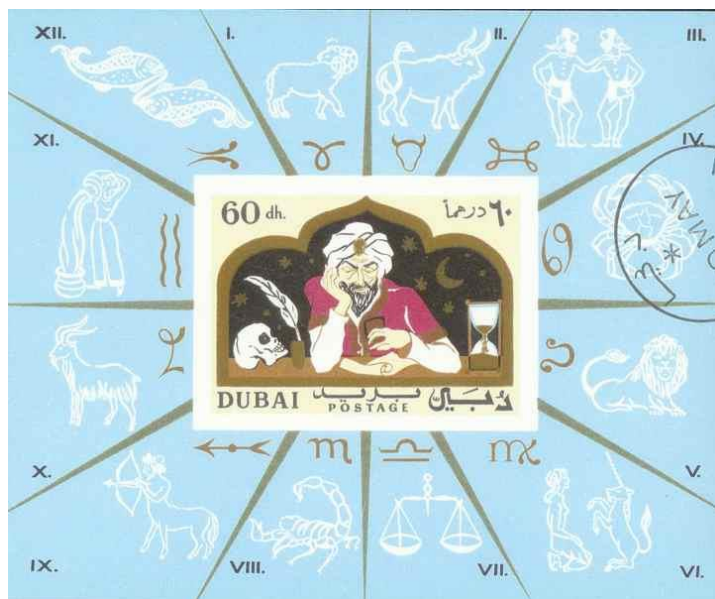
Біруні вважав математику універсальною мовою науки, що дає змогу пізнати світ і поєднати культури. У своїй праці «Індія» він аналізує індійську математичну та астрономічну традицію з повагою й науковою об'єктивністю, зіставляючи її з греко-арабською.



Омар Хайям

Омар Хайям (1048–1131, повне ім'я — Абу-ль-Фатх Омар ібн Ібрагім аль-Хайям) народився 18 травня 1048 року в місті Нішапур — великому культурному й науковому центрі Хорасану, провінції на території сучасного Ірану. Його нісба «аль-Хайям» указує на ремесло родини — ймовірно, його батько був наметником, хоча прямих свідчень про родовід поета й ученого збереглося небагато. Дитинство Хайяма минуло в Нішапурі, де з ранніх років проявилися його виняткові здібності: уже у вісім років він серйозно

займався математикою, астрономією та філософією. Його наставники невдовзі відправили юного Омара на навчання до знаменитого вченого Імама Мууаффака ан-Нішабурі, викладача знаті Хорасану, з яким Хайям зберіг тісні стосунки на довгі роки.



Після початкової освіти в Нішапурі Хайям продовжив навчання у провідних наукових центрах ісламського Сходу — Балху, Бухарі та Самарканді. У цих містах він оволодів медико-філософськими знаннями та здобув звання хакіма (лікаря-енциклопедиста), хоча, ймовірно, медична практика не посідала значного місця в його житті. Уже тоді він вивчав праці Сабіта ібн Курри та античних грецьких авторів, зокрема Евкліда.



У 1060-х роках Хайям, осиротівши після смерті батьків під час епідемії, продав сімейний дім і майстерню, а згодом переїхав до Самарканда — тодішнього наукового центру Мавераннахру. Тут він виступав на диспутах, вражаючи сучасників глибиною знань, і невдовзі сам став викладачем у місцевому медресе. Проте цей період його життя був нестабільним. В умовах міжусобиць і постійних воєн учені могли працювати систематично лише при дворі правителя. Хайям пережив початок сельджуцького завоювання, що залишило глибокий слід у його долі. Пізніше він із гіркотою згадував у передмові до «Алгебри», як науку було підмінено лицемірством, а щире прагнення до істини — підставою для насмішок і зневаги: «Ми були свідками загибелі вчених, від яких залишилася лише невелика, багато постраждала жменька людей. Суворість долі в ці часи заважає їм цілковито віддатися вдосконаленню й поглибленню своєї науки. Більшість тих, хто тепер має вигляд учених, покривають істину облудою, не виходячи в науці за межі підробки й лицемірства. І якщо вони зустрічають людину, яка відрізняється тим, що шукає істину і любить правду, намагається відкинути облуду й

лицемірство і відмовитися від хвастощів та обману, — вони роблять її предметом свого презирства й насмішок.»



Невдовзі він перебрався до Бухари, де отримав доступ до багатих бібліотек і написав низку важливих математичних трактатів. У 1070-х роках Хайям був запрошений до двору сельджуцького султана Мелік-шаха в Ісфахані, за ініціативою візира Нізам аль-Мулька. Тут він очолив роботу над реформою календаря та керував обсерваторією, у якій разом із групою вчених здійснив точні астрономічні спостереження. Цей проект завершився створенням сонячного календаря, що за точністю перевершував григоріанський.

Після смерті Мелік-шаха і вбивства Нізам аль-Мулька в 1092 році становище Хайяма при дворі похитнулося. Посилення політичної боротьби та ворожість духовенства, яке підозрювало його у вільнодумстві та ересі, змусили його здійснити паломництво до Мекки. За свідченням істориків, це могло бути не лише виявом релігійності, а й демонстрацією лояльності до ісламу на тлі звинувачень у безвір'ї та симпатіях до зороастризму.



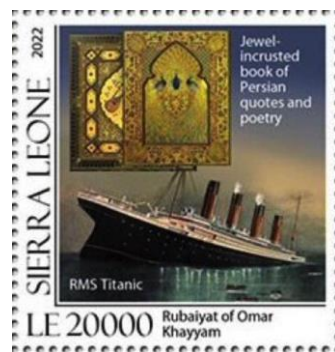
Джей Гамбіж, На могилі Омара Хайяма, 1911 р.

Пізніше Хайям отримав запрошення від султана Санджара і деякий час провів у Марві, можливо, обіймаючи посаду придворного астролога. Проте через погіршення здоров'я він повернувся до рідного Нішапура, де провів останні роки життя в усамітненні. Його

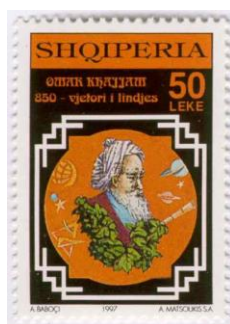
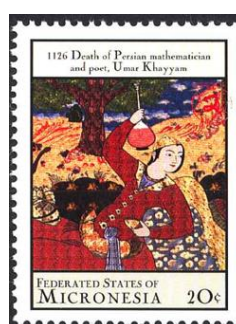
сучасник і біограф Нізамі Арузі згадував, що Хайям передбачив місце своєї майбутньої могили: воно мало бути там, де навесні вітер обсіпатиме її пелюстками квітучих дерев. І справді, багато років потому, після смерті поета в 1131 році, Арузі знайшов його могилу в саду, де цвітучі абрикоси й груші вкривали надгробок килимом опалих пелюсток.¹⁸

Хоча в масовій свідомості ім'я Омара Хайяма частіше асоціюється з філософськими рубаї, його математичні праці заслуговують не меншого захоплення. Одним із найважливіших математичних творів Хайяма став «Трактат про доведення задач алгебри та алмукабали», у якому він систематизував і розвинув досягнення ранньоісламської алгебри, закладені аль-Хорезмі. Центральне місце в трактаті посідає класифікація та розв'язання алгебраїчних рівнянь другого й третього степеня.

Хайям не лише строго довів правила розв'язання квадратних рівнянь, а й уперше запропонував повну класифікацію кубічних рівнянь з додатними коренями — він виокремив 14 різних типів залежно від співвідношення між членами рівняння. Особливо новаторським і значущим стало те, що Хайям запропонував геометричне розв'язання кубічних рівнянь за допомогою конічних перетинів — кола, параболи та гіперболи. Він стверджував, що такі рівняння неможливо розв'язати лише за допомогою циркуля й лінійки — це було перше в історії твердження про принципові обмеження евклідової геометрії.



Трактат також містить оригінальні міркування Хайяма про природу відношень і пропорцій. Він критикує евклідове визначення пропорційності як формально правильне, але таке, що не розкриває сутності поняття. З його точки зору, відношення — це кількісний результат вимірювання однієї величини іншою. Щоб визначити рівність або нерівність двох відношень, Хайям використовує процедуру, еквівалентну сучасному розкладанню на неперервний дріб, ґрунтовану на алгоритмі Евкліда. Він формалізує порівняння відношень через ланцюгові дроби, вводить поняття складених відношень і фактично наближається до поняття числа як результату порівняння та вимірювання.



У другому значному творі — «Коментарі до труднощів у вступних до книги Евкліда» (1077) — Омар Хайям зосереджується на фундаментальній проблемі — доведенні п'ятого постулату Евкліда. Він критично оцінює як сам постулат, так і спроби його

¹⁸ У 1893 році рожевий кущ, посаджений на могилі Хайяма, було пересаджено на могилу Едварда Фіцджеральда (1809–1883) — ірландського перекладача, який зробив поезію Хайяма всесвітньо відомою.

обґрунтування, зокрема аргументи Ібн аль-Хайсама, і особливо відкидає ідею опису паралельних як рівновіддалених прямих, пов'язаних рухом.

Натомість Хайям пропонує власний постулат: дві прямі, що зближуються з одного боку від перетнутої прямої, обов'язково перетнуться, і не може бути, щоб вони розходилися в цьому напрямі. Це твердження формулюється у вигляді двох логічно рівносильних положень, кожне з яких дозволяє вивести класичний п'ятий постулат. З нього Хайям робить висновок, що перпендикуляри до однієї прямої рівновіддалені, а потім на основі аналізу спеціального чотирикутника з двома прямими кутами й рівними сторонами будує міркування, яке спростовує можливість існування гострих і тупих кутів у геометрії без прийнятого постулату. Таким чином він закладає основи розрізнення між евклідовою, гіперболічною та сферичною геометріями — за кілька століть до Лобачевського й Рімана.

Важливою рисою Хайямового трактування відношень і чисел стало визнання ірраціональних величин повноправними об'єктами. На відміну від, скажімо, Абу Каміла, який визнавав ірраціональності лише в межах конкретних задач, але не як повноцінні елементи математичної мови, Хайям розглядав їх як природні числові сутності, що описують вимірювані величини. Його теорія відношень, основана на вимірюванні та неперервних дробах, допускала ірраціональні числа як значення, які можна порівнювати між собою.

Ібн Яхья аль-Магрибі аль-Самавал

У XII столітті арабська математика досягла етапу зрілості та узагальнень. На цьому тлі особливо вирізняється постать Ібн Ях'ї аль-Магрибі аль-Самавала (бл. 1130–1180) — ученого, який відіграв ключову роль у розвитку алгебри як абстрактної дисципліни, незалежної від геометрії. Його праці свідчать про перехід від риторичної алгебри (характерної для аль-Хорезмі) до більш абстрактного й символічного мислення.

Аль-Самавал народився в Багдаді в єврейській родині, згодом прийняв іслам. Його ім'я «аль-Магрибі» вказує на західне походження родини, а «аль-Самавал» — на місце служби або проживання. Він був не лише математиком, а й лікарем, астрономом і поетом — типовим представником енциклопедичної вченості ісламського Золотого віку.

Головна математична праця аль-Самавала — «аль-Бахр фі-ль-джабр ва-ль-мукабала» («Море в алгебрі та рівняннях») — була написана в середині XII століття. У ній він продовжує й систематизує ідеї, викладені в працях аль-Караджі, але робить крок далі у напрямку абстракції. Аль-Самавал працює з додатними й від'ємними степенями змінних, включаючи дробові та від'ємні показники, і оперує ними алгебраїчно — як із чистими символами, а не геометричними величинами.

Особливо важливою є його формулювання поняття алгебри як науки про дії з «відомими» та «невідомими величинами», що підпорядковуються загальним правилам. Він фактично дає одне з перших визначень алгебри як самостійної дисципліни, заснованої на правилах перетворення виразів. Як він сам зазначає: «Алгебра — це мистецтво оперувати з відомим і невідомим, використовуючи правила, властиві цим величинам, незалежно від їх числового значення». Для своєї епохи це було сміливе й

глибоке твердження, що відкривало шлях до більш формальної та символічної математики.

Крім того, аль-Самавал детально описав методи множення та ділення многочленів, роботи з від'ємними величинами, а також розв'язання рівнянь. Для подання многочленів він ще користується словесними конструкціями, проте вже помітне прагнення до уніфікації позначень. Його тлумачення від'ємних чисел — як «боргів» — стало традиційним для арабської математики та було сприйняте згодом у Європі.

Шараф ад-Дін ат-Тусі

Шараф ад-Дін ат-Тусі (бл. 1135 — бл. 1213) народився в Тусі (Персія, територія сучасного Ірану). Головна його праця — «Книга про те, що необхідно знати для складання рівнянь». Цей трактат присвячений розв'язанню кубічних рівнянь, але цікавий не стільки результатами (частину яких уже знаходили його попередники), скільки методом, що передбачає ідеї математичного аналізу.

На відміну від раннішої традиції, у якій розв'язання рівнянь супроводжувалося геометричними побудовами, ат-Тусі використовує алгебраїчні методи, спираючись на аналіз функцій. Він розглядає поведінку алгебраїчних виразів при різних значеннях змінної, досліджує, за яких умов рівняння має дійсні корені, і доходить важливого висновку: не кожне рівняння третього степеня має додатний розв'язок, а кількість розв'язків можна передбачити, аналізуючи максимум відповідного виразу.

Він упроваджує поняття максимуму алгебраїчної функції та описує спосіб його знаходження — фактично, це передвістя диференціального підходу. Хоча ат-Тусі не користується похідною в сучасному сенсі, він по суті знаходить точки, у яких функція досягає найбільшого значення, — отже, робить важливий крок у бік математичного аналізу.

Ат-Тусі першим в ісламській математиці чітко розділяє рівняння та його геометричну інтерпретацію, розглядаючи рівняння як абстрактний об'єкт, з яким можна працювати аналітично. Цей підхід, на відміну від традиції аль-Хорезмі та його послідовників, де алгебра була тісно пов'язана з геометрією, дозволяє ат-Тусі застосовувати більш загальні міркування й працювати з абстрактними функціями.

Хоча твори Шараф ад-Діна не були безпосередньо перекладені латинською мовою і не вплинули прямо на європейську науку XIII–XIV століть, вони належать до кола ідей, які розвивалися в ісламській математиці й пізніше дісталися Європи. Його аналітичний підхід до рівнянь, дослідження максимумів функцій і абстрактне мислення роблять його постать важливою в історії математики як одного з попередників аналітичної геометрії та математичного аналізу.

У цьому сенсі ат-Тусі стоїть поруч із Ібн аль-Хайсамом і Омаром Хаййомом, які також досліджували кубічні рівняння, але він іде далі — у напрямку дослідження поведінки функцій, що наближає його до духу новоєвропейської математики.

Насір ад-Дін ат-Тусі

Насір ад-Дін Абу Джафар Мухаммад ібн Мухаммад ат-Тусі (1201–1274) народився 18 лютого 1201 року в місті Тус, у Хорасані — історичній області на північному сході сучасного Ірану. Його дитинство минуло в культурному середовищі, пов'язаному з шийтським ісмаїлізмом, і вже з раннього віку він виявив потяг до знань. Смерть батька в юності залишила глибокий слід, але, як зазначав сам Тусі, саме батьків заповіт став для нього стимулом присвятити себе науці.



Початкову освіту він здобув у рідному місті, вивчивши основи релігійних і світських наук: Коран, хадиси, шийтську (джафаритську) юриспруденцію, філософію, логіку, медицину, математику та астрономію. Згодом, прагнучи поглибити свої знання, він вирушив до Нішапура й Хамадана, а потім до Мосула, де став учнем відомого математика Камал ад-Діна ібн Юніса. Цей етап відіграв ключову роль у становленні Тусі як ученого, особливо в галузях математики та астрономії.

З ранньої молодості Тусі багато подорожував у пошуках знань, що відповідало релігійній традиції ісламського світу, який високо цінував ученість і наставництво. У Нішапурі він спілкувався з відомими мислителями свого часу, зокрема з суфієм Аттаром Нішапурським, хоча сам Тусі згодом дистанціювався від містицизму в його екстатичній формі. Проте філософський суфізм певною мірою вплинув на нього: він написав трактат «Атрибути шляхетних», де виклав своє розуміння внутрішнього шляху до істини.



У 1230-х роках Тусі опинився в області Кухістан, що перебувала під контролем ісмаїлітів-нізаритів. Із 1235 року він проживав у фортеці Аламут — фактичній столиці ісмаїлітської держави. Тут він опинився у складній політичній ситуації: з одного боку, користувався покровительством правителів-нізаритів, а з іншого — бачив зростаючу загрозу з боку монголів. Тусі налагодив стосунки з промонгольськи налаштованою елітою і, вочевидь, відіграв важливу



роль у здачі Аламута військам Хулагу-хана 1256 року. Цей крок забезпечив йому особисту безпеку й нові можливості: він став радником при дворі монгольського правителя та придворним астрологом.

Після завоювання Багдада в 1258 році Тусі увійшов до найближчого оточення Хулагу-хана, виконуючи не лише наукові, а й адміністративні функції. Він брав участь у переговорах з останнім аббасидським халіфом і розробив проєкт фінансової реформи, що була реалізована за наступників Хулагу. Крім того, у цей період він активно підтримував шийтську традицію, відвідував святині та впливав на релігійну політику в регіоні.



Насір ад-Дін ат-Тусі помер 26 червня 1274 року в районі Кадимія, поблизу Багдада. Його життя охоплює один із найбухливіших періодів історії

Близького Сходу — час монгольських завоювань, занепаду Аббасидського халіфату й формування нових політичних і культурних центрів.

Особливе місце в математичній спадщині ат-Тусі посідає «Трактат про повний чотирибічник» — фундаментальна праця, що започаткувала тригонометрію як самостійну дисципліну, незалежну від астрономії. У трактаті, написаному перською мовою в Аламуті й пізніше переробленому арабською в Маразі (1260), ат-Тусі вперше систематизував методи розв'язання як плоских, так і сферичних трикутників. Він надав повне доведення теореми синусів і теореми тангенсів для сферичних фігур, а також увів поняття полярного трикутника.



Першою книгою трактату була теорія складених відношень, у якій ат-Тусі розвинув ідеї Сабіта ібн Курри та Омара Хайяма, розширивши поняття числа до раціональних і ірраціональних відношень. У наступних книгах він строго довів різні випадки теореми Менелая й сформулював методи обчислень у тригонометрії. Історик науки М. М. Рожанська зазначала, що саме в працях ат-Тусі тригонометрія набула статусу науки «про розв'язання трикутників» — із класифікацією трикутників і алгоритмами розв'язання типових задач.

Крім того, ат-Тусі залишив праці з вчення про паралельні прямі. У «Викладі Евкліда» та окремому трактаті «Зцілення сумнівів щодо паралельних» він навів власні доведення й критику теорій Омара Хайяма, Ібн аль-Хайсама та аль-Джаухарі. Ці твори привернули увагу європейських математиків у XVII–XVIII століттях: доведення п'ятого постулату Евкліда з трактату ат-Тусі було відоме Джону Валлісу, а Джироламо Саккері піддав його аналізу 1733 року.

У своїх доведеннях ат-Тусі активно використовував кінематичні уявлення — наприклад, метод накладання під час доведення геометричних теорем. Він трактував лінію як шлях рухомої точки, а коло — як результат обертання відрізка. Аналізуючи складні фігури, він звертався до поняття котіння та використовував уявлення про пряму й криву як про сукупність нескінченно малих точок, що збігаються при русі.



Цікаво, що в арифметичному трактаті ат-Тусі описав метод добування коренів будь-якого степеня й представив таблицю біноміальних коефіцієнтів у вигляді трикутника — задовго до Паскаля.

У галузі астрономії Насір ад-Дін ат-Тусі увійшов в історію як організатор Марагінської обсерваторії (1259), створеної при дворі Хулагу-хана. Це була одна з найпередовіших обсерваторій свого часу. На основі спостережень, виконаних у Маразі, ат-Тусі склав

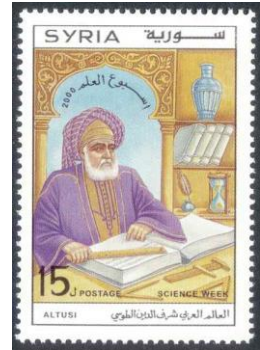
Зідж-і Ільхані — астрономічні таблиці, що містили точні дані про рух планет і зірок і використовувалися аж до появи геліоцентричної системи Коперника.

Одним із найважливіших досягнень ат-Тусі в теоретичній астрономії стало винайдення “пари Тусі” — геометричної конструкції, у якій сума двох кругових рухів дає прямолінійний. Ця модель дозволила позбутися проблемного екванта в системі

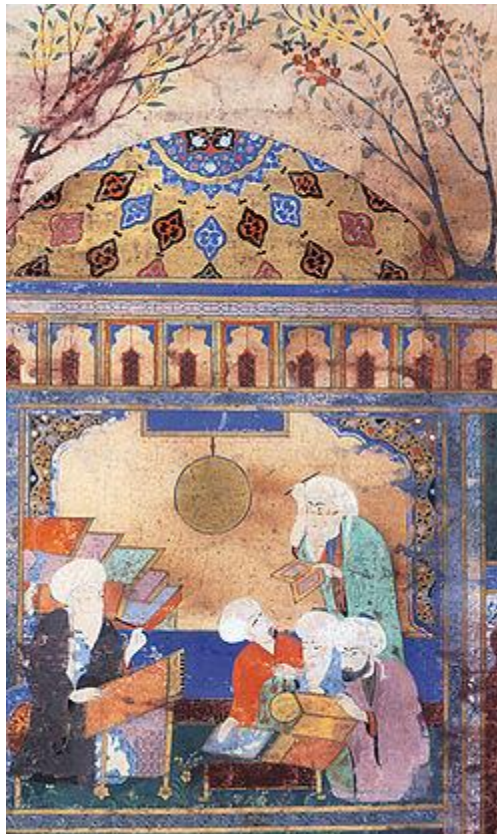
Птолемея. Згодом її використав Ібн аш-Шатір у своїх геоцентричних моделях, а потім і Коперник під час створення геліоцентричної системи.

Ат-Тусі також критикував аргументи Птолемея на користь нерухомості Землі, зазначаючи, що вони непереконливі, хоча сам не стверджував її рухомості. Його міркування перегукувалися з тими, які Коперник наведе через три століття.

У трактаті «Тазкіра» ат-Тусі дав напрочуд точний, майже сучасний опис Чумацького Шляху: «Чумацький Шлях складається з безлічі дрібних, щільно згрупованих зірок, які через свою скупченість і малість здаються мутною плямою». Це спостереження було підтверджене лише 1610 року за допомогою телескопа Галілея.



У галузі логіки ат-Тусі був послідовником учення Авіценни. Він коментував його трактати, розвиваючи теорію абсолютних суджень і прагнучи усунути логічні помилки у спадщині Аристотеля. Його логічні праці мали широку популярність як у мусульманському світі, так і за його межами.



Насір ад-Дін Тусі (сидить за столом) у Марагінській обсерваторії. Мініатюра 1562 року. Британська бібліотека.

Насір ад-Дін ат-Тусі був не лише спадкоємцем, а й критичним продовжувачем античної наукової традиції. Його праці, особливо в галузях тригонометрії та астрономії, стали відомі у Візантії через його учня Шамса ад-Діна аль-Бухарі та візантійського вченого Григорія Хіоніада. Через Візантію та латинські переклади вони потрапили до Європи, де вплинули на таких діячів, як Регіомонтан, Валліс, Саккері й, зрештою, Коперник.

Можливий вплив на Миколая Коперника

Одним із найобговорюваніших аспектів спадщини Насіра ад-Діна ат-Тусі в сучасній історіографії науки є питання про можливий вплив його праць на Миколая Коперника. Хоча прямих доказів того, що сам Коперник читав твори ат-Тусі, не існує, низка разючих збігів у геометричних моделях, які використовували обидва вчені, змушує дослідників серйозно розглядати цю гіпотезу.

Найвідоміший приклад — так звана пара Тусі (або рух Тусі), математичний прийом, за допомогою якого можна отримати прямолінійний рух із комбінації двох кругових. Цей метод ат-Тусі застосував, щоб усунути еквант — суперечливий елемент у геоцентричній системі Птолемея, який порушував принцип рівномірного кругового руху. Цікаво, що в моделі Коперника, спрямованій на ту ж мету — усунення екванта, зустрічається геометрична конструкція, майже повністю тотожна парі Тусі. Ба більше, обидва автори використовують однакову систему літерних позначень для вершин своїх побудов — малопомітну, але промовисту деталь, яку важко вважати випадковою.

Увагу дослідників також привертають інші подібності між моделями Коперника та його попередників з ісламського світу, таких як Ібн аш-Шатір, Муаййад ад-Дін ал-Урді та Кутб ад-Дін аш-Шіразі. Ці збіги створюють картину можливої інтелектуальної спадковості, хай навіть опосередкованої.

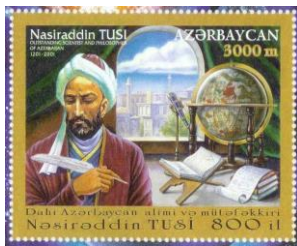
Як же такі ідеї могли потрапити до Європи? Шляхи передання наукових знань з ісламського світу до латинської Європи на той час уже існували. Єврейські вчені та паломники нерідко ставали посередниками, які переносили ідеї зі Сходу на Захід. Наприклад, Абнер з Бургоса, єврейський філософ і вчений XIII століття, залишив твір, у якому, на думку деяких дослідників, міститься спрощена версія пари Тусі, отримана, ймовірно, з вторинних джерел. Хоча його виклад не містить доведень і повних побудов, це свідчить, що подібні знання циркулювали, хай і у спотвореній формі.

Іншим можливим каналом могла бути трансляція праць з арабської чи перської на грецьку, зокрема завдяки таким постатям, як Григорій Хіоніад¹⁹, який вивчав астрономію в Маразі й, очевидно, ознайомився з працями Тусі та інших учених



¹⁹ Григорій Хроніад (бл. 1240–1320) – візантійський астроном, лікар і православний митрополит, який став одним із головних посередників між наукою Ісламського Сходу та Візантією. Народжений у Константинополі (світське ім'я — Георгій), він вирушив до Персії, де навчався в астронома Шамса ад-Діна аль-Бухарі, учня Насіра ад-Діна ат-Тусі, в обсерваторії Марага. Повернувшись до Трапезунда, Хроніад переклав низку арабських і перських астрономічних трактатів грецькою мовою, зокрема «Зіг-і Ільхані» ат-Тусі та «Санджарські таблиці» ал-Хазіні. Разом із цими текстами у Візантію потрапили нові астрономічні моделі — зокрема опис «пари кіл Тусі», який, ймовірно, згодом став відомим у Європі й мів вплинути на формування коперниківської системи. Хроніад також запровадив у Візантії використання універсального астролібія, незалежного від географічної широти, і заснував школу астрономії в Трапезунді. Його учні — Мануїл Врієннії і Теодор Метохіт — продовжили поширювати здобуті ним знання. Існує припущення, що саме через Хроніада інший візантійський учений, Максим Плануд, уперше познайомився з індо-арабською системою числення, яка згодом поширилася в Європі як сучасні «арабські цифри».

марагінської школи. Згодом його переклади могли потрапити до Візантії, а звідти — до Західної Європи. Крім того, ісламська астрономічна традиція була представлена в мусульманській Іспанії, звідки наукові ідеї регулярно проникали в латинський світ.



Усе це робить правдоподібною гіпотезу, згідно з якою Коперник так чи інакше міг познайомитися з концепцією пари Тусі — навіть у неповному або переробленому вигляді. Водночас слід підкреслити: жоден із відомих творів Коперника не містить прямих посилань на мусульманських авторів, і дотепер не існує твердих доказів свідомого запозичення. Деякі вчені вважають, що Коперник міг незалежно прийти до тієї самої геометричної конструкції, спираючись на античні джерела, передусім на твори Евкліда, а також на власне невдоволення птолемеєвою моделлю.

У будь-якому разі, подібність конструкцій залишається показовою і свідчить або про існування забутих каналів передання наукових знань, або про силу інтелектуального пошуку, що змушує вчених різних епох розв'язувати ті самі задачі схожими методами.

Джемшид аль-Каші

Гійяс ад-Дін Джемшид Масуд аль-Каші (або аль-Кашані; бл. 1380 — 22 червня 1429) народився в місті Кашан у центральній Персії (сучасний Іран), звідки походить його нісба — «аль-Каші».

Його юність припала на роки правління Тамерлана (Тимура), епоху, насичену як жорстокими завоюваннями, так і розвитком науки при дворах деяких правителів. Після смерті Тимура у 1405 році ситуація в регіоні стала більш сприятливою для інтелектуального життя. Його син, Шахрух Мірза, а особливо дружина Шахруха, тюркська принцеса Гохаршад, активно підтримували вчених і сприяли розквіту наукових занять при дворі. Саме в цей час аль-Каші зміг розвинути свої математичні інтереси та утвердитися як учений.



Вирішальну роль у долі аль-Каші відіграв син Шахруха — Улугбек, онук Тамерлана. У 1409 році, ставши правителем, Улугбек перетворив Самарканд на центр наукового життя регіону. За його правління була заснована школа вищих наук — свого роду академія, куди запрошували найкращих математиків і астрономів ісламського світу. Серед них був і Джемшид аль-Каші, який прибув до Самарканда близько 1414 року. Тут, при дворі Улугбека, він провів останні п'ятнадцять років свого життя та створив свої найважливіші праці.

За свідченнями сучасників, аль-Каші був не лише обдарованим ученим, а й активним викладачем. Він користувався повагою серед колег, а сам Улугбек високо цінував його як людину, здатну розв'язувати «найскладніші задачі». Судячи з усього, саме в ці роки він досяг піку своєї інтелектуальної зрілості.

Смерть аль-Каші у 1429 році супроводжувалася чутками. Деякі джерела стверджують, що він помер природною смертю, працюючи над своїм трактатом *Risālat al-watar wa'l-jaib* («Трактат про хорду та синус»). Однак існують версії, що його могли вбити за

наказом самого Улугбека. Підтвердженнь цим припущенням немає, і більшість істориків схилиються до більш прозаїчної причини — хронічної хвороби або раптового недугу.

Одним із найважливіших математичних творів аль-Каші став трактат «Ключ до арифметики» (1427), у якому він систематично виклав методи роботи з двома системами числення: традиційною для астрономії шістдесятковою та новою, десятковою. У той час як шістдесяткові дробі використовувалися в ісламській та античній науці переважно для запису дробової частини числа, аль-Каші розширив їхнє застосування, запропонувавши записувати і цілу частину в тій же системі. Це нововведення, можливо, було зроблене незалежно від давньовавилонської традиції, але фактично повторювало її.

Особливу значущість має внесок аль-Каші у розвиток десяткової системи дробів. Хоча дробі з основою 10 застосовувалися раніше в Китаї, саме аль-Каші першим докладно описав операції з десятковими дробами — додавання, віднімання, множення, ділення, а також перехід між шістдесятковою та десятковою формою запису.

У трактаті «Окружність» аль-Каші встановив новий стандарт точності при обчисленні числа π . Використовуючи архімедівський метод — обчислення середньоарифметичного периметрів вписаного та описаного багатокутників, він дійшов до багатокутника з числом сторін $3 \cdot 2^{28}$, отримавши значення $2\pi \approx 6,2831853071795865$. Це наближення було правильним у 16 десяткових знаках — рекордне досягнення, неперевершене майже два століття. Результат він спочатку отримав у шістдесятковій формі, а потім перевів у десяткову — продемонструвавши перший у історії зафіксований випадок точного переведення числа між двома системами числення.

Одним із найвидатніших результатів аль-Каші в обчислювальній математиці став ітераційний метод наближеного розв'язання кубічних рівнянь, розроблений ним для задачі трисекції кута. Записавши рівняння виду $x^3 + q = px$ у вигляді $x = (x^3 + q) / p$, він запропонував використовувати початкове наближення $x_1 = q / p$, а потім будувати послідовність $x_{n+1} = (x_n^3 + q) / p$. Ця процедура сходиться швидко, і з її допомогою аль-Каші обчислив значення $\sin 1^\circ$ з точністю до 19 значущих десяткових цифр, що вдвічі точніше аналогічних обчислень аль-Біруні.

Крім того, аль-Каші зробив внесок у розвиток біномальної алгебри. Він обґрунтував формулу бінома Ньютона для цілих степенів і описав метод послідовного обчислення біноміальних коефіцієнтів, по суті виклавши принцип трикутника Паскаля, відомого в ісламському світі як трикутник Омара Хайяма. Аль-Каші використовував біноміальні розклади для наближених обчислень коренів і степенів, розвиваючи ідеї, які стали основою алгебраїчного аналізу.

Аль-Каласаді

Абу ль-Хасан Алі ібн Мухаммад аль-Кураші аль-Каласаді (1412–1486) народився в місті Баса (сучасна Іспанія), що входило до складу емірату Гранада — останньої мусульманської держави на Піренейському півострові. Він здобув освіту в Гранаді, але продовжував підтримувати свою родину в рідному місті, де й провів більшу частину життя. Уже в зрілому віці, у 1480 році, після нападів християнських військ Фердинанда та Ізабелли, аль-Каласаді був змушений залишити батьківщину і переселитися до туніського міста Беджа, де й помер у 1486 році.

Аль-Каласаді прославився як автор ряду трактатів з арифметики та алгебри, найвідоміший з яких — «Ат-Табсіра фі ‘ильм аль-хісаб» («Пояснення науки рахунку»). Його твори стосувалися як прикладних, так і більш теоретичних аспектів математики. Він розглядав задачі, пов’язані з розрахунком пропорцій у медицині, обчисленням нахилу зрошувальних каналів, виявленням шахрайств при використанні мір та ваг. У дусі «культурної математики» деяких арабських авторів аль-Каласаді включав у свої тексти арифметичні задачі у формі поетичних загадок, що зближує його стиль із більш ранніми традиціями, які ведуть свій початок ще з епохи «Тисячі й однієї ночі».

Хоча в його працях немає принципово нових алгебраїчних відкриттів, аль-Каласаді увійшов в історію завдяки спробі перейти від словесного опису математичних операцій — типової для арабської алгебри — до більш короткої та зручної системи символів. Він позначав математичні операції та поняття за допомогою арабських літер і коротких слів. Наприклад:

و (ва) — «і», використовується для додавання (+);

لا (ілля) — «крім», означає віднімання (–);

في (фі) — «в», використовується для множення (×);

على (аля) — «на», позначає ділення (÷);

ج (дж) — джадр, квадратний корінь;

ش (шей’) — «річ», невідоме (x);

م (м) — маль, квадрат невідомого (x^2);

ك (к) — мука’аб, куб невідомого (x^3);

ل (л) — ю’аділу, «дорівнює» (=).

Ці позначення представляють перші кроки в бік символічної алгебри, подібні за духом до того, що приблизно в той самий час починалося в Європі. Хоча деякі подібні символи вже використовувалися в Північній Африці й до нього, аль-Каласаді, як зазначав французький історик Франц Вёпке, став першим, хто систематично застосував їх у трактаті з алгебри. Його новаторство полягало не стільки в винаході самих символів, скільки в спробі створити компактну, технічну нотацію для алгебраїчних операцій, замінивши громіздкі словесні описи.

Ця праця мала особливо важливе значення в контексті подальшого розвитку європейської математики. Уже в XVI–XVII століттях європейські алгебраїсти — від Вієта до Декарта — почали формувати сучасну мову алгебри. Хоча пряма зв’язок між працями аль-Каласаді та європейськими математиками того часу залишається предметом дискусій, сам факт існування символічної традиції в пізній арабській математиці підкреслює, що ідея алгебраїчної нотації визрівала в кількох культурних контекстах паралельно.

Занепад ісламської математики

Після періоду бурхливого розвитку ісламської науки в IX–XII століттях почався її поступовий занепад, що зачепив і математику. Цей процес був складним і пов'язаний як із внутрішніми змінами в ісламському світі, так і з ширшою політичною ситуацією.

Однією з причин занепаду стала політична роздробленість ісламського світу. Великі держави, які підтримували вчених, такі як Аббасидський халіфат і держава Сельджуків, слабшали або розпадалися. Монгольська навала в XIII столітті, особливо руйнування Багдада в 1258 році, завдала серйозного удару по науковій інфраструктурі. Бібліотеки та академії були знищені, а разом із ними й центри, де процвітала математика.

Падіння Багдада, захопленого армією Хулагу-хана, стало символом кінця Золотого віку ісламу. Місто, яке раніше було центром науки та культури, було зруйноване. Особливо трагічна доля Дому Мудрості. За свідченням хроніста ан-Нахравалі, «у Тигр було кинуту стільки книг, що по них можна було перейти річку верхи на коні, а вода почорніла від чорнил і почервоніла від крові вчених».

Монгольські завоювання також знищили Мерв — столицю східного ісламського світу, де знаходилися десятки бібліотек і навчальних закладів. У результаті були втрачені не лише матеріальні цінності, а й інтелектуальні зв'язки між науковими центрами, що призвело до фрагментації та ослаблення наукового життя.

Під час Хрестових походів і Реконкісти мусульманські країни почали втрачати території. В Європі в арабів відібрали іспанські землі. Важливо зазначити, що Кордова була великим науковим центром із відомим університетом і багатою бібліотекою. Після захоплення християнами ці скарби зникли безслідно. Толедо також був важливим науковим центром із великою бібліотекою. Зі сходу на мусульманські країни наступали монголи. Наукові центри, розкидані по всьому ісламському світу, втрачали зв'язок і фінансування. Коли доводиться воювати, наука відходить на другий план.

Поступово змінювалося й ставлення до науки всередині ісламського суспільства. Якщо в ранні століття халіфи та вельможі активно підтримували переклади та дослідження, то пізніше переважали більш консервативні течії. Теологія та право стали головними сферами освіти, витіснивши природничі та точні науки на периферію інтелектуального життя. Хоча математиків і астрономів продовжували поважати, їхню діяльність уже не сприймали як важливу частину суспільного прогресу.

Надалі підтримка та фінансування науки монгольськими ханами та їхніми наступниками були спрямовані на астрологію. Однак завдяки цьому розвивалися й суміжні науки — астрономія та математика (десяткові дробі, тригонометрія, методи астрономічних обчислень). Наукові центри тепер були пов'язані з обсерваторіями, такими як Марагінська обсерваторія, Обсерваторія Улугбека та Константинопольська обсерваторія Такиюддіна, які використовувалися для астрологічних спостережень.

З XII століття в Європу почали проникати праці арабських математиків. В Іспанії, Сицилії та інших прикордонних регіонах перекладачі, такі як Аделард з Бата і Джерард з Кремони, працювали над перекладом арабських текстів латинською мовою. Ці переклади відіграли ключову роль у розвитку європейської математики. Іронічно, але саме завдяки цьому «зворотному перекладу» (з арабської — часто з доповненнями та

коментарями) ідеї аль-Хорезмі, Омара Хайяма, ібн аль-Хайсама та інших почали жити новим життям — уже в рамках латинської наукової традиції.

Тим часом у самому ісламському світі оригінальна математична думка ставала все рідшою. Вчені часто займалися коментарями та компіляціями, повторюючи відкриття попередників. Новаторські ідеї зустрічалися дедалі рідше. В окремих регіонах, наприклад в Індії чи Османській імперії, математика ще зберігалася, але вже не задавала тон у розвитку науки.

Однією з часто згадуваних, хоча й напівлегендарних причин ослаблення ісламської математичної традиції в пізньому Середньовіччі вважається історія, пов'язана з правлінням Улугбека — правителя Тимуридської імперії та онука полководця Тамерлана. Улугбек сам був освіченим математиком і астрономом, який прагнув скласти максимально точну карту зоряного неба свого часу. Для цього він заснував у Самарканді видатну за масштабами та технічним оснащенням обсерваторію, зібравши навколо неї кращих учених імперії. Вважається, що за його наказом майже всі зусилля математиків регіону були зосереджені виключно на астрономічних спостереженнях та обчисленнях, необхідних для створення небесного атласу. Робота над цим проектом тривала поколіннями. До моменту, коли зоряний каталог нарешті було завершено, він уже у значній мірі застарів. Тим часом вузька спеціалізація призвела до того, що вчені майже повністю втратили навички та інтерес до інших галузей математики — таких як алгебра, теорія чисел чи геометрія. У результаті, незважаючи на вражаючі досягнення в астрономії, математичне знання втратило колишню широту та динаміку розвитку. Хоча ця розповідь, можливо, перебільшує масштаб залежності науки від однієї особи або проекту, вона яскраво ілюструє, як надмірна централізація та обмеження наукових завдань можуть призвести до інтелектуальної стагнації.

Вплив арабської математики на європейську культуру і проблема євроцентризму

Математика ісламського світу Середньовіччя справила значний вплив на формування європейської наукової традиції. Через Іспанію та Сицилію, особливо під час перекладу наукових праць з арабської на латинську мову в XII–XIII століттях, знання мусульманських учених були інтегровані в західноєвропейську інтелектуальну культуру. Такі постаті, як Халід ібн Язид, аль-Хорезмі, Омар Хайям, аль-Караджі та Абу Каміль, розробили найважливіші ідеї в галузі алгебри, арифметики, геометрії та тригонометрії, які стали основою для подальшого розвитку європейської науки.

Переклади праць аль-Хорезмі, а також творів Абу Каміля та аль-Баттані глибоко вплинули на таких європейських учених, як Фібоначчі, який у своєму *Liber Abaci* запозичив багато задач з арабської алгебраїчної літератури. Астрономічні та тригонометричні розробки аль-Баттані, у свою чергу, відіграли важливу роль у становленні європейської навігації та геодезії в епоху Великих географічних відкриттів.

Проте, незважаючи на це визнання в середньовічній Європі, починаючи з XVIII століття, у західній історіографії все більше утверджувався євроцентричний погляд, згідно з яким наука і раціональність нібито були унікальними досягненнями Заходу. Ця позиція особливо яскраво проявлялася в рамках так званого орієнталізму — ідеологічного та

культурного напрямку, що протиставляв «раціональний» Захід «інтуїтивному» і «містичному» Сходу. Схід, включно з ісламським світом, розглядався як нібито неспроможний до самостійного розвитку абстрактного мислення та наукової строгості.

Французький історик Ернест Ренан, наприклад, стверджував, що арабська математика є лише «відбитком Греції», доповненим перськими та індійськими елементами. На думку П'єра Дюгема і Поля Таннері, мусульманські вчені були лише «передавачами» грецької традиції, не вносячи власного внеску. А математична строгість, за оцінкою Ніколя Бурбакі та інших, нібито відсутня в ісламській математиці, що стало підставою для виключення цього періоду з «істинної» історії алгебри.

Таке виключення було не лише науковою помилкою, а й проявом ідеологічної упередженості. Історія алгебраїчної геометрії, наприклад, традиційно починалася з Декарта, ігноруючи роботи Омара Хайяма, який ще в XI столітті розробляв методи розв'язання кубічних рівнянь за допомогою перетину конічних перетинів — методи, подібні за духом до тих, що застосовувалися в аналітичній геометрії Нового часу.

Лише з кінця XIX століття розпочався поступовий перегляд цих уявлень. Вчені, такі як Франц Вьопке, Жозеф Рено, а пізніше Джордж Сартон, Ейльхард Відеманн і Рошді Рашед, почали систематично вивчати арабомовні наукові тексти і відкривати багатство та оригінальність математичної думки ісламського Золотого віку. Завдяки їхнім працям стало зрозуміло, що ісламські математики не лише зберігали грецьку спадщину, а й творчо її розвивали, іноді передбачаючи відкриття, зроблені в Європі століттями пізніше.

Попри цей прогрес, елементи євроцентризму й досі зберігаються в масовому сприйнятті історії науки. Навіть наприкінці XX століття Віктор Кац зазначав, що неможливо скласти повну історію математики ісламського Середньовіччя, оскільки багато арабських рукописів залишаються непрочитаними та невивченими. Водночас сучасні історики, такі як Джон Леннарт Бергтрен, Ян Хогендейк і Рошді Рашед, сприяли створенню більш збалансованої та справедливої картини наукового розвитку.

Таким чином, вплив арабської математики на європейську культуру — це не лише питання передачі знань, а й проблема історичного визнання. Повноцінне розуміння історії математики неможливе без урахування внеску ісламських учених. Їхні праці були не просто проміжним ланцюгом між античністю та Новим часом, а самостійною та оригінальною гілкою наукового розвитку, яка справила глибокий вплив на формування європейської наукової раціональності.

Використані джерела

- Alberti M., *Planet Mathematics: A Numerical Journey Around the World*, R BA Coleccionables, 2017.
- Archimedes, <https://math.nyu.edu/Archimedes/>.
- Ascher M., *Ethnomathematics*, Pacific Grove: Brooks/Cole, 1991.
- Banu Musa brothers at McTutor, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banu_Musa/
- Bardi J.S., *The Calculus Wars: Newton, Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time*, Thunder's Mouth Press, 2006.
- Berggren, J.L., *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986.
- Bertoloni Meli D., *Equivalence and Priority: Newton versus Leibniz: Including Leibniz's Unpublished Manuscript on the Principia*, Oxford University Press, 1993.
- Boyer C.B., *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover Publications, 1959.
- Bressoud D., Was Calculus Invented in India?, *The College Mathematics Journal*, 20026 **33** (1), 2–13.
- Brockliss L., *A History of the University in Europe. Vol. 2, Universities in early modern Europe (1500-1800)*, Cambridge, 1996.
- Brukner Havelková P., Dulíková V., Bejdová Š, Vacková J., Velemínský P., Bárta M., Ancient Egyptian scribes and specific skeletal occupational risk markers (Abusir, Old Kingdom), *Scientific Reports*, 2024, **14**, Article number: 13317.
- Cai T., *A Brief History of Mathematics. A Promenade through the Civilizations of Our World*, Birkhäuser, 2023.
- Cajori F., *A History of Mathematical Notations*, Cosimo, Inc., 2007.
- Capra F., *The Science of Leonardo*, US: Doubleday, 2007.
- Child J.M. (ed.), *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Dover Publications, 2005 (reprint of original 1920 edition).
- Closs M., *A Survey of Mathematics Development in the New World*, Ottawa, Canada: University of Ottawa, 1977.
- Colish M.L., *Medieval Foundations of the Western Intellectual Tradition (400–1400)*, Yale University Press, 1999.
- Conant L.L., *The Number Concept*, New York: Macmillan & Co, 1896.
- Culin S., *Games of the North American Indians*, Volume 1, *Games of Chance*, Lincoln: University of Nebraska Press, 1992.
- Dahan-Dalmedico A., Peiffer J., *Une Histoire des Mathématiques: Routes et Dédales*, POINTS, 1986.
- Dauben, J.W., *Chinese Mathematics*, in Katz V.J. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*, Princeton University Press, 2007.
- Daffa', A.A., *The Muslim Contribution to Mathematics*, Croom Helm, 1977.
- D'Errico F. et al, Early evidence of San material culture represented by organic artifacts from Border Cave, South Africa, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2012, **109**(33): 13214-13219.
- Eastwood B.S., *Dictionary of Scientific Biography*, New York 1970-1990.
- Everett D., *Don't Sleep, There Are Snakes: Life and Language in the Amazonian Jungle*, Vintage Departures, 2009.
- Gandz S., *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik: Abteilung B*, Studien, 1930.
- Gangooly P., *Sūrya-Siddhānta: A Text-book of Hindu Astronomy*, Motilal Banarsidass Publ., 1989.
- Gerbert, *Isagoge Geometriae*, Manuscript on Vellum, Collection of Schoenberg, ms. no. ljs194.

- Gorroochurn P., Thirteen correct solutions to the “Problem of Points” and their histories, *The Mathematical Intelligencer*, 2014, **36**, 56-64.
- Grant E., *God and Reason in the Middle Ages*, Cambridge University Press, 2010.
- Graves D., *Scientists of Faith: Forty-Eight Biographies of Historic Scientists and their Christian Faith*, Kregel Publications, 1996.
- Green J., Kushim the Sumerian and the first Accounting Mistake in History, <https://www.historicmysteries.com/archaeology/kushim-accounting-mistake/28873/>, 2022.
- Gordon P., Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia, *Science*, 2004, **306**, 496-499.
- Hall A.R., *Philosophers at War: The Quarrel between Newton and Leibniz*, Cambridge University Press, 1980.
- Hald A., *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750*, Wiley, New Jersey, 1990.
- Howard Whitley E., *An Introduction to the History of Mathematics*, Philadelphia: Saunders, (1990).
- Huff T.E., *The Rise of Early Modern Science: Islam, China and the West*, Cambridge University Press, 2003.
- Ifrah G., *From one to zero. A universal history of numbers* transl. by Lowell Bair. New York: Viking Penguin Inc. XVI, 1985.
- Ivanova N.M., *A Chronicle of Mathematical Milestones: The Mathematical Calendar*, Cambridge Scholars Publishing, 2023.
- Katz V., *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley; Subsequent edition, 1998.
- Kienast H J., *The Aqueduct of Eupalinos on Samos*. Athens: Ministry of Culture Archaeological Receipts Fund, 2005.
- Landon C.R., *American Indian Mathematics Traditions and Contributions*, Portland Public Schools American Indian Baseline Essays, 1993.
- Lewis C.S., *The Discarded Image: An Introduction to Medieval and Renaissance Literature (Canto Classics)*, Reprint Edition, Cambridge University Press, 2012.
- Lindberg D., *The Beginnings of Western Science. The European Scientific Tradition in Philosophical, Religious, and Institutional Context, Prehistory to A.D. 1450*, Chicago University Press, 2008.
- Manders K., Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes, *Historia Mathematica*, 2006, **33**(2), 184-209.
- Mansfield D.F., Wildberger N.J., Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry, *Historia Mathematica*, 2017, **44**(4), 395-419.
- Mikami Y., *The development of mathematics in China and Japan*, Leipzig, 1913.
- Morgan J., *Life and Adventure of William Buckley*, Hobart, Tasmania, 1952.
- Mozans H. J., *Woman in Science*, MIT Press, 1974.
- Needham J., *Science and Civilization in China: Volume 3, in Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*, Caves Books Ltd, 1986.
- Neugebauer O., *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover Publication, 1969.
- Neugebauer O., *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, 3 vols., Springer, 1975.
- O'Connor J.J., Robertson E.F., Etymology of some common mathematical terms, *MacTutor History of Mathematics Archive*, University of St Andrews.
- Olmstead A.T., Babylonian Astronomy: Historical Sketch, *The American Journal of Semitic Languages and Literatures*, 1938, **55**(2), 113-129.
- Ossendrijver M., Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph, *Science*, 2016, **351**(6272), 482-484.

- Pannekoek A., *A History of Astronomy*, Dover Publications, 2011.
- Parr R., Geometry of Native American Art,
<https://www.nku.edu/~longa/classes/mat305/resources/www.math.tamu.edu/~dallen/masters/american/parr.pdf>
- Pickover C.A., *The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics*, Union Square & Co. Milestones, 2012.
- Plofker K., *Mathematics in India*, Princeton University Press, 2009.
- Proclus Diadochus, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, B.G. Teubner, 1873.
- Rauff J.V., Native American Dice Games and Discrete Probability, *Journal of Mathematics and Culture*, 2009, 4(1), 50-62.
- Rajagopal C.T., Rangachari M.S., On Medieval Kerala Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, 1986, 35, 91–99.
- Rossi C., *Architecture and mathematics in Ancient Egypt*, Cambridge UP, 2004.
- Roshed R., *The Development of Arabic Mathematics: between Arithmetic and Algebra*, Springer, 1994.
- Rutman P., *How Mathematics Happened: The First 50,000 Years*, Prometheus, 2007.
- Sayili A., *Abdülhamit İbn Türk'ün Katışık Denklemlerde Mantiki Zaruretler Adlı Yazısı ve Zamanın Cebri*. (Logical necessities in mixed equations by 'Abd al Hamīd ibn Turk and the algebra of his time.), Türk Tarih Kurumu Basımevi, 1962. Rev. by Jean Itard in *Revue Hist. Sci. Applic.*, 1965, 18:123-124.
- Sarton G., *The Study of the History of Mathematics*, Cambridge, 1936.
- Schmandt-Besserat D., *Before Writing*, Vol.1. *From Counting to Cuneform*; Vol.2. *A Catalogue of Near Eastern Tokens*, Austin: University of Texas Press, 1992.
- Seidenberg A., The origin of mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, 1978, 18(4), 301–342.
- Sigler L., *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer, 2003.
- Singh S., *The Black Chamber*, https://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/kamasutra.html .
- Shastri A.M., *India as Seen in the Brhatsamhitā of Varāhamihira*. Motilal Banarsidass, 1969.
- Shank M.H., *The Scientific Enterprise in Antiquity and the Middle Ages*, Chicago University Press, 2000.
- Smith D.E. and Mikami Y., *A History of Japanese Mathematics*, Chicago: Open Court Publishing, 1914.
- Sonar T., *The History of the Priority Dispute between Newton and Leibniz: Mathematics in History and Culture*, Springer Nature, 2018.
- Stearns P. N., *The Encyclopedia of World History: Ancient, Medieval, and Modern, Chronologically Arranged*, Houghton Mifflin Harcourt, 2001.
- Struik D., *A Concise History of Mathematics: Fourth Revised Edition*, Dover Books on Mathematics, 1987.
- The Kama Sutra of Vatsyayana* (Translated From The Sanscrit In Seven Parts With Preface, Introduction and Concluding Remarks). Translated by Burton, Richard; Indrajit, Bhagavanlal; Bhide, Shivaram Parashuram. The Project Gutenberg. January 18, 2009. Retrieved 3 December 2015.
- Thureau-Dangin F., *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal*, Paris, 1932.
- van der Waerden H., *Science Awakening*, Springer, 1974.
- Van Brumellen G., Decimal fractional numeration and the decimal point in 15th-century Italy, *Historia Mathematica*, 2024, 66, 1-13.
- Wilson R.J., *Stamping through Mathematics*, Springer, 2001.

Μπλίκας Μ.Θ., Γυναίκες Μαθηματικοί της Κλασικής Αρχαιότητας, Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2021.

Σπανδάγος Ε., Σπανδάγου Ρ., Τραυλού Δ., *Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας*, ΑΙΘΡΑ, 2000.

Σπανδάγος Ε., *Οι Φυσικοί Επιστήμονες της Αρχαίας Ελλάδος*, ΑΙΘΡΑ, 2009.

Вайман А.А., *Шумеро-вавилонская математика III-I тысячелетий до н.э.*, под ред. Струве В.В., Москва, Издательство восточной литературы, 1961.

Рифтин А.П., *Старовавилонские документы в собраниях СССР*, М.-Л., 1937.

Юшкевич А.П., *История математики. 1. С древнейших времен до начала Нового времени*, М. Наука, 1970; **2. Математика XVII столетия**, М. Наука, 1970; **3. Математика XVIII столетия**, Москва, Наука, 1972.

Наукове видання

Історія математики в культурній спадщині Європи
Том II: Східна традиція

Наталія Іванова

<https://www.imath.kiev.ua/~ivanova/>

Київ, Інститут математики НАН України
01024 Київ 4, вул. Терещенківська, 3